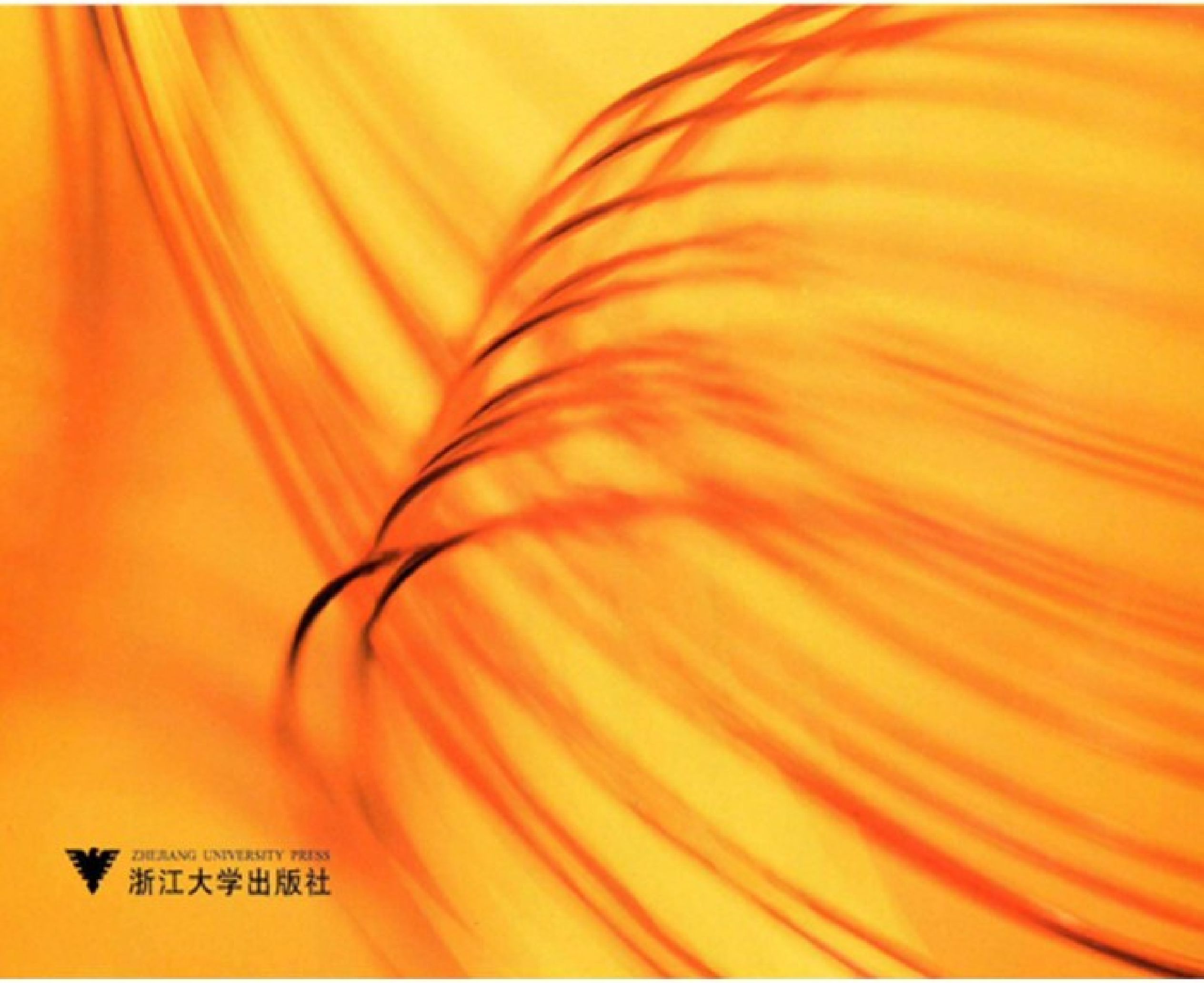
高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编　陶平生　冯跃峰　边红平

RANSE YU RANSE FANGFA

# 染色与染色方法

王慧兴 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

# 染色与染色方法

主　　编　王慧兴

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座.染色与染色方法/王慧兴主编.—杭州:浙江大学出版社,2008.8
ISBN 978-7-308-06100-1

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第097183号

# 高中数学竞赛专题讲座(染色与染色方法)

主　　编　王慧兴

责任编辑　徐素君
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路148号　邮政编码310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　7.25
字　　数　160千
版 印 次　2008年8月第1版　2008年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06100-1
定　　价　11.00元


浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

# 丛书编委会

**丛书主编**

陶平生　冯跃峰　边红平

**编委名单**

陶平生(江西科技师范学院)

冯跃峰(深圳中学)

边红平(武汉钢铁厂第三中学)

王慧兴(河南实验中学)

李世杰(衢州市教研室)

许康华(富阳二中)

蔡小雄(杭州二中)

# 编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来,反响强烈,深受广大读者喜爱,并收到了大量反馈信息。很多读者,包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见,希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求,我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共8种:《图论方法》、《周期函数与周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》;考虑到配套,把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,传授数学思想方法,侧重培养学生的逻辑思维能力,不唯解题而解题;

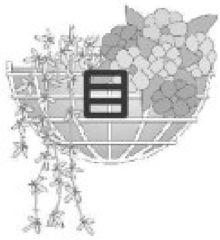
2. 本着少而精的原则选择材料,不搞题海战术,不追求大而全,而是以点带面,举一反三;

3. 以数学修养和能力培养为立意,通过深刻剖析问题的数学背景,挖掘数学内涵,培养学生的数学品格和解决实际问题的能力;

4. 在注重基础知识训练同时,有适当程度的拔高,对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编;参加编写的成员是:陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限,书中的不妥之处敬请读者批评指正。



# 目 录

# 第一章　染色问题与染色方法

染色问题和染色方法是两个不同的术语，前者是说题目给出了一种染色方法，在给定的染色条件下，提出一个待解决的问题；后者通常是题目没有提到染色，解题者为了解决问题，自觉探究一种染色方法，使问题得到解决．与染色相关的问题通常表现出某种不确定性，多归属于组合问题．染色问题多而杂，但主要分为两类：对边染色和对点染色．解决染色问题的基本方法有逐步调整法、整体处理法、不变量法、赋值计算法、极端性方法以及递推方法等等；染色问题中的存在性问题通常可考虑抽屉原理．

**例 1**　设 $O$ 是线段 $AB$ 的中点，点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在线段 $OA$ 上，点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 在线段 $OB$ 上，并且点 $A_i$ 与 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 关于点 $O$ 对称，将其中 $n$ 个点染红色，另 $n$ 个点染蓝色．求证：所有红点到点 $A$ 的距离之和等于所有蓝点到点 $B$ 的距离之和．(1985 年北京市数学竞赛题)

**解**　对一种具体染色 $S$，记所有红点到点 $A$ 的距离之和为 $S_h$，所有蓝点到点 $B$ 的距离之和为 $S_b$．

第一步，考察极端情况：如果线段 $OA$ 上的点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是红点，则线段 $OB$ 上的点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 都是蓝点，由对称性，得 $OA_i = OB_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而

$$S_h = \sum_{i=1}^{n} AA_i = n \cdot OA - \sum_{i=1}^{n} OA_i = n \cdot OB - \sum_{i=1}^{n} OB_i = \sum_{i=1}^{n} BB_i = S_b.$$

第二步，对任一染色方法，证明 $S_h = S_b$，为此我们应用逐步调整法来证明 $S_h - S_b$ 是不变量．

如果一种染色 $S$，在线段 $OA$ 上存在一个蓝点 $P$，则在线段 $OB$ 上必存在一个红点 $Q$，我们改变一下这两个点的颜色，即 $P$(蓝 → 红)，$Q$(红 → 蓝)，这样，我们得到另一种染色方法 $S'$，计算，

$$S'_h = S_h - AQ + AP = S_h - PQ,$$
$$S'_b = S_b - BP + QB = S_b - PQ,$$

$\therefore$　$S_h - S'_h = S_b - S'_b$，即 $S_h - S_b = S'_h - S'_b$．

故　$S_h - S_b$ 是不变量.

∵　经过有限次上述操作,我们可以把染色 $S$ 变换成上述极端情况.

∴　由上述不变量,得 $S_h - S_b = 0$,即 $S_h = S_b$.

**例 2**　平面上任给 $n$ 个互异的点,每两点连一条线段,再将所得的 $C_n^2$ 条线段的中点染红色,求红点个数的最小值.(1991 年亚太地区数学竞赛题)

**解**　我们利用极端性原理实现隔离计数.

第一步,设 $n$ 个点共线,顺次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,且记线段 $A_1A_n$ 的中点为 $P$,则 $n-1$ 条线段 $A_1A_i(i=2,3,\cdots,n)$ 的中点互异,且都分布在线段 $A_1P$ 内;$n-1$ 条线段 $A_iA_n(i=2,3,\cdots,n)$ 的中点互异,且都分布在线段 $PA_n$ 内;很明显,上述 $2(n-1)$ 个中点中,恰有点 $P$ 是一个二次重点,故这 $n$ 个共线的点至少有 $2n-3$ 个红点.

第二步,设 $n$ 个点不共线,记为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,且 $\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_iA_j = A_1A_n$,并记最长线段 $A_1A_n$ 的中点为 $P$,则 $n-1$ 条线段 $A_1A_i(i=2,3,\cdots,n)$ 的中点互异,且都分布在以 $A_1$ 为圆心,以 $A_1P$ 为半径的圆内;$n-1$ 条线段 $A_iA_n(i=2,3,\cdots,n)$ 的中点互异,且都分布在以 $A_n$ 为圆心,以 $A_nP$ 为半径的圆内;很明显,上述 $2(n-1)$ 个中点中,恰有点 $P$ 是一个二次重点,故对这 $n$ 个不共线的点,得到的红点数至少有 $2n-3$ 个.

第三步,构造:$n-1$ 等分线段 $A_1A_n$,标记分点为 $A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$.根据上述分析,对这样的 $n$ 个点,红点数至少 $2n-3$ 个;又这 $2n-3$ 个点涵盖了所有线段 $A_iA_j$ 的中点,故我们恰好有 $2n-3$ 个红点.

综上所述,红点数目最小值是 $2n-3$.

**例 3**　在 $n\times n(n\geqslant 3)$ 棋盘中,将某 $r$ 个方格染红色,其余方格染白色.规定:如果某个白格至少与两个红格相邻(具有公共边),则将此格染红色;如果还有这样的白格,则染色继续进行.如果不论怎样选取最初哪 $r$ 个方格染红色,都不能通过上述操作使棋盘中所有格都染红色,求 $r$ 的最大值.

**解**　如图 1.1,将 $n$ 个方格染红,则可以将全部小方格染红,故 $r\leqslant n-1$,$r_{\max}\leqslant n-1$.

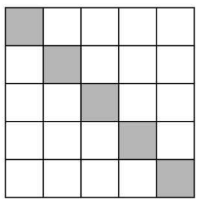


图 1.1

再证明 $r_{\max}\geqslant n-1$,这只要证明 $r=n-1$ 满足题意即可.

任意染红 $n-1$ 个小方格,记红色区域的边界长度为 $L$,则 $L\leqslant 4(n-1)$;我们来证明 $L$ 在染色后不增.

按题意,每新染一个红色格,此格在染红之前,最少有 2 条红色边,这 2 条红色边为红色区域的边界;此格染红色后,至多增加 2 条红色边,但原来 2 条红色边不再是红色区域的边界,所以 $L$ 在染色后不增.故始终有 $L<4n$,所以 $r=n-1$ 满足题设,$r_{\max}\geqslant n-1$.

综上所述,$r_{\max}=n-1$.

**例 4**　平面上有 $n$ 个点（$n \geqslant 5$），或是红点，或是蓝点，而且任意三个同色点不共线．证明：存在一个三个顶点同色的三角形，并且该三角形至少有一条边上不含另一种颜色的点．

**证明**　一个明显的办法是把目标瞄准面积最小的"同色三角形"（三顶点同色）．

以任意三个同色点作三角形．因为所有这些三角形的个数有限，由极端性原理，它们的面积有最小值，记这个面积最小的三角形为 $\triangle ABC$，不妨设其三个顶点为红色．

假设 $\triangle ABC$ 的三边 $AB$、$BC$、$CA$ 上都存在蓝色点，分别记作 $C'$、$A'$、$B'$，则 $\triangle A'B'C'$ 的三个顶点都是蓝色，并且其面积比 $\triangle ABC$ 的面积还小，这与 $\triangle ABC$ 的取法矛盾．

故　$\triangle ABC$ 必有一边上不含蓝色点．

这个问题的三维形式是：空间中有 20 个点，或是红点，或是蓝点，而且任意四个同色点不共面．证明：存在四个顶点同色的四面体，这个四面体中有某一侧面不含另一种颜色的点．我们把它留作练习．

**例 5**　一个立方体有 12 条棱，甲、乙两人在这 12 条棱上做涂色游戏：每人每次选择 3 条未涂过色的棱给予涂色，甲涂红色，乙涂蓝色．规定：先把某一面上的四条棱涂成自己的颜色者获胜．先涂色的甲有没有必胜策略？

**证明**　先涂色的甲没有必胜策略．

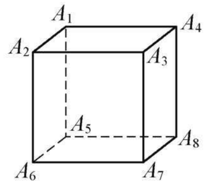



图 1.2

如图 1.2，把立方体的 12 条棱分成 8 组，每一组三条棱并且两两异面：

$$S_1=\{A_1A_2, A_3A_7, A_5A_8\}, S_2=\{A_1A_2, A_4A_8, A_6A_7\},$$
$$S_3=\{A_2A_3, A_4A_8, A_5A_6\}, S_4=\{A_2A_3, A_1A_5, A_7A_8\},$$
$$S_5=\{A_3A_4, A_2A_6, A_5A_8\}, S_6=\{A_3A_4, A_1A_5, A_6A_7\},$$
$$S_7=\{A_1A_4, A_3A_7, A_5A_6\}, S_8=\{A_1A_4, A_2A_6, A_7A_8\},$$

每一条棱都含于其中某两个组．

为证明先涂色的甲没有必胜策略，即要证明：不论甲如何涂色，后涂色的乙都有办法阻止甲获胜，即不让甲将某一个面上的四条棱都涂成红色．

设甲先把某三条棱涂成红色，因为这三条棱至多含于上述八个组中的某六个组中，所以至少还有两组，其中每组的三条棱都未涂色，不妨设这两组是 $S_1$、$S_2$；乙为了阻止甲获胜，只要把 $S_1$（或 $S_2$）中的三条棱都涂成蓝色；这样，立方体的六个面中每个面已有一条蓝色棱，所以，不论甲以后如何涂色，都不可能把一个面上的四条棱都涂成红色．

故先涂色的甲没有必胜策略．

**例 6**　任意给定平面直角坐标系里由有限个整点组成的集合 $A$，问：能否对集合 $A$ 中的整点用红色或黑色两种颜色染色，每个点染其中一种颜色，使得与纵坐标轴、横坐标轴平行的每一条直线上，红点与黑点的个数至多相差一个？

**解**　答案是肯定的,可以做到.

**定义**　平行于纵坐标轴的直线称为纵线;平行于横坐标轴的直线称为横线.

**证明**　如果每一条纵线、每一条横线上都至多含有集合 $A$ 中的一个点,则结论成立.下面证明其他情况.

记 $\mathrm{card}(A)=n$,则当 $n=1,2,3$ 时,相应的染法明显存在.

假设当 $n<k(k\geqslant 4)$ 时,相应的染法都存在,下面证明当 $n=k$ 时也存在相应的染法.

设有一条横线 $l$ 上至少有 $A$ 中的两个点,不妨设 $M,N\in l(M,N\in A)$,并记过点 $M$ 有纵线 $l_1$,过点 $N$ 有纵线 $l_2$.

情形一:$A$ 中落在 $l_1$ 上的点只有 $M$,$A$ 中落在 $l_2$ 上的点只有 $N$,则把直线 $l$ 上的点用红、黑两种颜色交错染色,对 $A$ 中其余点按归纳假设存在相应的染色方法,合在一起即得符合题目要求的染色方法.

情形二:$l_1$ 上除点 $M$ 外还存在另一点 $P$,而且矩形 $MNRP$ 的顶点 $R$ 也是 $A$ 中的点.这时,把 $M,R$ 染红,把 $N,P$ 染黑,对 $A$ 中其余点按归纳假设存在相应的染色方法,合在一起即得符合题目要求的染色方法.

情形三:$l_1$ 上除点 $M$ 外还存在另一点 $P$,而且矩形 $MNRP$ 的顶点 $R$ 不是 $A$ 中的点.这时,记 $A_1=(A-\{M,N,P\})\cup\{R\}$,则 $\mathrm{card}(A_1)=n-2$,由归纳假设,对 $A_1$ 存在符合题目要求的染色方法,不妨设点 $R$ 染了红色.把点 $R$ 去掉,再把 $M$ 染黑,把 $N,P$ 染红,这样的染色方法符合题目要求.

综上所述,题目得证.

**例 7**　证明:可以用两种颜色给正整数 $1,2,3,\cdots,1986$ 染色,使得它不含有由 18 项组成的单色等差数列.

**证明**　我们利用组合计数方法完成证明.

一方面,集合 $A=\{1,2,\cdots,1986\}$ 的元素二染色的染色方法总数为 $2^{1986}$ 种(这其实就是允许有空子集的 $A$ 的 2-划分数目).

另一方面,把 $A$ 中由 18 项组成的每个等差数列都看成一个元素,由这些元素组成的集合记作 $B$.

任取 $\alpha\in B$,则 $\alpha$ 的首项 $a$ 与公差 $d$ 满足充要条件:

$$\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 1969\\ 1\leqslant d\leqslant\left[\dfrac{1986-1}{17}\right]\end{cases}$$

,即以 $a\in\{1,2,\cdots,1969\}$ 为首项的 18 项等差数列的数目为 $\left[\dfrac{1986-a}{17}\right]$,所以,得

$$\text{card}(B)=\sum_{a=1}^{1969}\left[\frac{1986-a}{17}\right]$$

$$\leqslant\sum_{a=1}^{1969}\frac{1986-a}{17}=\frac{1}{17}(1986\times1969-985\times1969)<115940.$$

设 $\alpha\in A$，则对 $A$ 中除去出现在 $\alpha$ 中的 18 个元素之外的 1968 个元素的二染色方法数为 $2^{1968}$，而每个 18 项单色等差数列 $\alpha$ 有 2 种染色方法，这样含有 18 项单色等差数列的染色方法数目不超过 $2\cdot\text{card}(B)\cdot2^{1968}$.

$\because$ $2^{1986}-2\cdot\text{card}(B)\cdot2^{1968}=(2^{17}-\text{card}(B))\cdot2^{1969}$

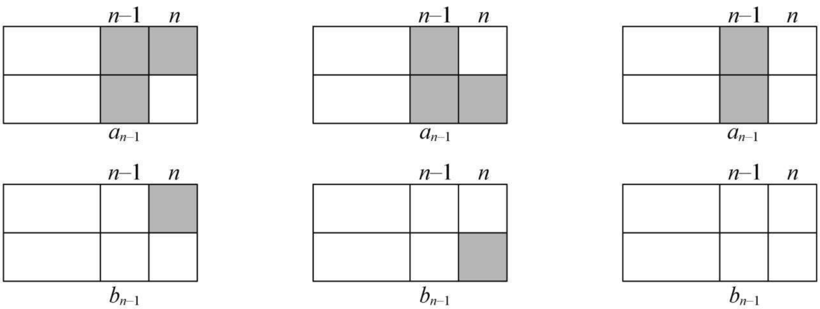
$>(2^{17}-115940)\cdot2^{1969}=(131072-115940)2^{1969}>0$，

$\therefore$ 至少存在 $1,2,3,\cdots,1986$ 的一种二染色方法，使得染色后不含 18 项组成的单色等差数列.

**例 8**　将一个 $2\times n$ 的方格带形中的某些方格染色，使得任意一个 $2\times2$ 的方格中都没有完全染上颜色，以 $P_n$ 来标记所有满足条件的不同染色方法的数目. 求证：$3\mid P_{1989}$，并求能整除 $P_{1989}$ 的 3 的最高次幂.

**解**　记 $P_n=a_n+b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $a_n$ 表示 $2\times n$ 的方格带形中满足题目条件且最后两个都染色的染法数目，$b_n$ 表示 $2\times n$ 的方格带形中满足题目条件且最后两个没有全染色的染法数目.

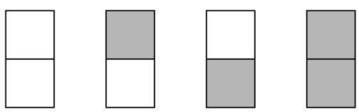
$\because$ $a_n=b_{n-1}$，且 $b_n$ 包括以下六种情形：




$\therefore$ $b_n=3(a_{n-1}+b_{n-1})\ (n\geqslant2)$，

$P_n=a_n+b_n=b_{n-1}+b_n=3P_{n-2}+3P_{n-1}\ (n\geqslant3)$.

当 $n=1$ 时，对 $2\times1$ 方格带形按题目要求染色，有以下四种情况：



$\therefore\quad P_1=4$.

当 $n=2$ 时,按题意,有 $P_2=2^4-1=15$.

故　当 $n\geqslant 2$ 时,有 $3\mid P_n$,从而 $3\mid P_{1989}$.

下面对奇数 $n$,求 $r\in\mathbf{N}^*$,使得 $3^r\parallel P_n$.

直接计算,得

$$\begin{aligned}&P_1=4,\ P_2=15,\\&P_3=3\times19,\ P_4=3^2\times24,\\&P_5=3^2\times91,\ P_6=3^3\times115,\\&P_7=3^3\times436,\ P_8=3^4\times551.\end{aligned}$$

故　$3^0\parallel P_1$,$3^1\parallel P_3$,$3^2\parallel P_5$,$3^3\parallel P_7$;$3^1\mid P_2$,$3^2\mid P_4$,$3^3\mid P_6$,$3^4\mid P_8$.

假设 $3^{k-1}\parallel P_{2k-1}$ 以及 $3^k\mid P_{2k}$,由 $P_{2k+1}=3(P_{2k}+P_{2k-1})$ 以及 $P_{2(k+1)}=3(P_{2k+1}+P_{2k})$,得 $3^k\parallel P_{2k+1}$,并且 $3^{k+1}\mid P_{2(k+1)}$,

由数学归纳法得,对一切 $l\in\mathbf{N}^*$,都有 $3^{l-1}\parallel P_{2l-1}$,并且 $3^l\mid P_{2l}$.

$\therefore$　对奇数 $n$,有 $3^{\frac{n-1}{2}}\mid P_n$,所求 $r=\dfrac{n-1}{2}$.

故　能整除 $P_{1989}$ 的 3 的最高次幂是 $3^{994}$.

**例 9**　平面上有 $n$ 条直线,它们将平面划分成若干个区域.求证:可以将平面 2-染色,使得有公共边界的任何两个区域异色.

**分析**　由于没有具体给出 $n$ 条直线,也就无法给出具体的染法,且由于直线的条数也是变化的,所以,我们只能按递推的思想给出一种染法规则,再证明这种规则总是符合题意的.

**解**　先给出如下递推染法:

当 $n=1$ 时,在直线的一侧染上颜色 1,在直线的另一侧染上颜色 2,则符合要求.

假设当 $n=k$ 时已给出符合题意的染法,则当 $n=k+1$ 时,添加一条直线 $L$ 后,将直线 $L$ 一侧的所有区域都改变成另一种颜色,另一侧的区域都保持原来的颜色不变.

下面证明这种染法符合要求:任取两个有公共边界的区域 $M$、$N$,我们按照这两个区域所在的位置分情况证明两者涂上的颜色相异.

(1) $M$、$N$ 都在 $L$ 的未改变颜色的那一侧,因为 $M$、$N$ 有公共边界,它们在添加直线 $L$ 之前是异色的,添加直线 $L$ 后,它们的颜色未改变,仍然异色.

(2) $M$、$N$ 都在 $L$ 已改变颜色的那一侧,因为 $M$、$N$ 有公共边界,且公共边界非直线 $L$ 引起,它们在添加 $L$ 之前是异色的,所以,添加直线 $L$ 后,这两个区域各经过一次变色,从而 $M$、$N$ 仍然保持异色.

(3) $M,N$ 之一在直线 $L$ 未改变颜色的那一侧,而另一个在直线 $L$ 改变了颜色的那一侧,因为 $M,N$ 有公共边界,其公共边界只能在直线 $L$ 上.在添加直线 $L$ 之前,它们为同一区域,从而同色.所以添加直线 $L$ 之后,它们之一改变了颜色,另一个保持原来的颜色,结果两者异色.

综上所述,我们已经给出了一种符合题意的递推出的染法.

**例 10** 已知 $n(n>2)$ 条直线把平面分成若干个区域,其中的一些区域被涂上颜色,使得任何两个涂色区域都没有公共边.求证:涂色区域的数目不超过$\frac{n^2+n}{3}$.

**证明** 如果给定的 $n$ 条直线两两平行,则染色区域数目不超过

$$\left[\frac{n}{2}\right]+1\leqslant\frac{n}{2}+1=\frac{n^2+n}{3}-\frac{(n+2)(n-3)}{6}\leqslant\frac{n^2+n}{3}$$

结论成立.

其他情况,设有 $k$ 条边的涂色区域的数目为 $m_k(k=1,2,\cdots,n)$.

∵ 一条直线被其他直线至多分成 $n$ 段(线段或射线),

∴ $n$ 条直线相互相交至多分成 $n^2$ 段.

∵ 每一段(线段或射线)至多是一个涂色区域的边,

∴ $2m_2+3m_3+\cdots+nm_n\leqslant n^2$ ①

∵ 一条直线上只有两段的射线部分才可能是有两条边的涂色区域的边,

∴ $m_2\leqslant n$,

$$m_2+m_3+\cdots+m_n\leqslant\frac{m_2}{3}+\frac{1}{3}(2m_2+3m_3+\cdots+nm_n)\leqslant\frac{n+n^2}{3}.$$

综上所述,命题得证.

## 练 习 1

1.有一张 $n\times n(n\geqslant 3)$ 的方格表,首先允许在表中任意选择 $n-1$ 个方格染黑色,其余的小方格都染成白色;接下来再把那些凡是至少与两个黑色方格相邻(具有公共边)的小方格也都染成黑色,如果还有这样的白格,则染色继续进行.求证:不论怎样最初选择 $n-1$ 个小方格染黑色,都不能按这样的法则将表中所有小方格都染成黑色.

2.将 $1998\times1998$ 棋盘的每个小方格染红蓝两色之一,使得关于棋盘中心对称的两个小方格异色,问:是否可以适当染色,使得每行每列中红蓝两色格的个数相等?

3.有一个凸 $n$ 边形$(n\geqslant 4)$所有顶点都用红绿蓝三色染色,并且三种颜色都出现,任

意两个相邻顶点不同色.求证:可以用在 $n$ 边形内不相交的对角线将多边形剖分成 $n-2$ 个三角形,使得每个三角形的顶点都不同色.

4.将一个四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点染色,要求同一条棱的两个顶点异色.如果只有5种颜色可供选用,问:共有多少种染色方案?

5.将圆分成 $n(n\geqslant 2)$ 个扇形,每个扇形用 $r$ 种不同的颜色之一染色,要求相邻扇形所染的颜色不同,问共有多少种不同的染色方法?

6.在数轴上每一个坐标为整数的点,都涂上红、蓝两色之一.试证:至少有一种颜色具有如下性质:对每个正整数 $k$,都能找到无穷多个涂有这种颜色的点,它们的坐标都能被 $k$ 整除.

7.试证明可以用4种不同颜色为数集 $M=\{1,2,\cdots,1987\}$ 中的每个数都涂上一种颜色,使得 $M$ 中任何一个等差数列的10元子集中的10个数的涂色都不全相同.

8.给定若干个红点和若干个蓝点,其中某些点间连有线段.如果与一个点相连的所有点中半数以上的点的颜色与该点不同,则称该点为奇异点.奇异点可以重新染色:在每一步中可任选一个奇异点并把它涂成另一种颜色.求证:经过若干步之后,不再有奇异点.

9.把一张无穷大的方格纸的每个结点都涂上4种颜色之一,使得每个方格的4个顶点的颜色都互不相同.求证:方格纸上存在一条网格线,其上的节点只有两种不同的颜色.

10.白色球面上有12%的面积沾上了红色,试证存在着球的一个内接平行六面体,它的所有顶点都是白色的.

11.在平面上给定一个正六边形,将它的每边都分成1000等份,并用平行于正六边形各边的线段将分点连接起来,于是将正六边形剖分成若干个小正三角形.在所得的网格图中任选一个正三角形(大小不论)并把它的3个顶点涂上颜色.然后继续用这个办法给结点涂色,但已涂过色的结点不能再涂色,直到不能再进行为止.试证:如果只剩一个结点没有涂色,那么这个结点一定不是原正六边形的顶点.

12.能否把一个矩形方格表的每个方格都涂上白色与黑色之一,使得白格与黑格的数量相等,但在每一行和每一列中都有一种颜色的方格多于 $\frac{3}{4}$?

13.将一个 $(n-1)\times(n-1)$ 的方格表的 $n^2$ 个结点中的每一个都涂上红、蓝两色之一,求使得表中每个方格都恰好有两个红色顶点的不同涂色方案的种数.这里说两个涂色方案不同,指的是在这两个方案中,至少有一个顶点两者异色.

# 第二章　染色分类,探究解法

通过审题探究,对所研究的图形(或题目中的某类元素)巧妙染色,更加形象地把某一部分从整体中突出出来,从而比较直观地、容易地揭示出问题的本质,快捷地给出问题的解答.只有对题目的条件作深刻的分析,才能探究出合适的染色方法,实现对相关元素的巧妙分类.

本节我们选择例题与习题,重在突出以下七类专门问题:染色与赋值、染色与覆盖、表格中的红点问题、棋盘染色问题、图论中的染色问题、几何中的染色问题以及染色极值问题等.

## 2.1　染色与赋值

通过对染色对象合理地、巧妙地赋值,或者获得相关对象的有价值的分类,或者转化为数值计算问题,从而利用数值计算的途径揭示出相应的染色方式下所隐含的某种极端性、某种特定的结构或要跟踪的某种数学关系.

**例1**　有 $n$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 依次排列在直线 $L$ 上,现将这 $n$ 个点染成红色或蓝色,每个点染其中一种颜色;若相邻两点 $A_i,A_{i+1}$ 的颜色不同,则称线段 $A_iA_{i+1}$ 为一条标准线段.已知 $A_1$ 与 $A_n$ 异色,证明 $L$ 上的标准线段有奇数条.

**解**　按题意,$L$ 上相邻两点才构成标准线段,因此标准线段只能在形如 $A_iA_{i+1}$ 的线段中产生,所以我们采用赋值计算的方法来推证.

赋值:对点 $A_i$ 赋值 $x_i$,如下:

$$x_i=\begin{cases}+1, A_i\text{ 是红点}\\-1, A_i\text{ 是蓝点}\end{cases}\left(i=1,2,\cdots,n\right).$$

由题意,得 $x_1x_n=-1$,所以,得

$$\prod_{i=1}^{n-1}(x_ix_{i+1})=x_1x_2^2x_3^2\cdots x_{n-1}^2x_n=-1,$$

故 $n-1$ 个乘积 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{n-1}x_n$ 中恰有奇数个 $-1$,对应的 $n-1$ 条线段 $A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_{n-1}A_n$ 中恰好有奇数条标准线段.

**例 2** $m+n$ 个点将圆周划分成 $m+n$ 条弧,其中 $m$ 个为红点,$n$ 个为蓝点,若一条弧的两个端点都是红点,则此弧标上数 2;若一条弧的两个端点都是蓝点,则标上 $\frac{1}{2}$;若一条弧的端点异色,则标数 1,求所有标数的乘积 $s$ 的所有可能值.

**解** $s=2^{m-n}$,下面采用赋值方法计算.

赋值:把 $m+n$ 个点记作 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+n}$,并如下赋值:

$$x_i=\begin{cases}\sqrt{2}, & x_i\text{ 是红点}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & x_i\text{ 是蓝点}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m+n).$$

按题意,每条弧段上标注的数正好等于该弧段两端点上赋值之积,约定 $x_{m+n+1}=x_1$,所以

$$s=\prod_{i=1}^{m+n}(x_ix_{i+1})=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\left[(\sqrt{2})^m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]^2=2^{m-n}.$$

**例 3** 平面上给定了 $n(n\geqslant 2)$ 条直线,其中任何两条不平行,任何三条不共点,它们把平面划分成若干个区域,试在每一个区域内填写一个绝对值不大于 $n$ 的非零整数,使得任一直线同一侧所有区域中各数之和为零.

**解** 从特殊情况出发,当 $n=2$、3 时,我们分别有如下图 2.1、图 2.2 染色方法,结论成立.

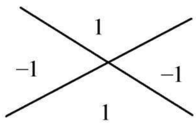



图 2.1

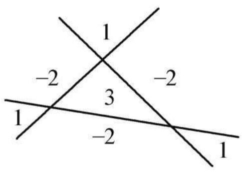



图 2.2

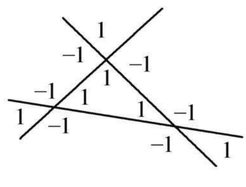



图 2.3

我们把图 2.2 改成图 2.3,就会得到赋值规律:每两条直线相交成 4 个区域,在这 4 个区域的公共顶点处都按图 1 的方式填入 $+1$ 和 $-1$,再求各个区域内所填 $+1$ 或 $-1$ 的代数和,就得到这个区域内应填入的数.

下面得证明两个问题:各个区域内所填数之和不为零且各数的绝对值不大于 $n$.前

者的充分条件是：各个区域内所填的数都同号．根据第二节例 3 可知，这 $n$ 条直线划分成的区域可以 2－染色，使得公共边界的两个区域都异色，再在每个对顶角处分别填入 $+1$ 和 $-1$，使得红色对顶角中填入 $+1$，蓝色对顶角填入 $-1$；这样，每个区域内至少填入了一个数，并且同一区域内所填入的数都同号；对同一条直线，它同一侧的 $+1$ 和 $-1$ 的个数都相等，所以它的同一侧各数之和为零；一个区域至多有 $n$ 条边，从而至多有 $n$ 个顶点，因此至多填入 $n$ 个数，将同一区域内所填入各数之和作为该区域内的数，其和的绝对值就不大于 $n$．

**例 4** 将一个 99 边形的边依次涂为红、蓝、红、蓝、…、红、蓝、黄，每条边涂一种颜色．然后允许进行如下操作：在保证任何相邻两边都不同色的条件下，每次改变一条边的颜色．问：能否经过若干次操作而使得 99 条边的涂色状态变为红、蓝、红、蓝、…、红、黄、蓝？(1994 年第 23 届美国数学奥林匹克)

**解** 将 99 边形的 99 条边依次编号为 1，2，…，99．用 $r$，$b$，$y$ 分别表示红、蓝、黄，定义：

$$f(i)=\begin{cases}0,\ i-1 \text{ 与 } i+1 \text{ 同色}\\ 1,\ (i-1,\ i,\ i+1)=(r,\ y,\ b),(y,\ b,\ r),(b,\ r,\ y)\\ -1,\ (i-1,\ i,\ i+1)=(r,\ b,\ y),(b,\ y,\ r),(y,\ r,\ b)\end{cases}.$$

考察操作前后，和数 $s=\sum_{i=1}^{99}f(i)$ 的变化情形．

∵ 仅当第 $i-1$ 条边和第 $i+1$ 条边共色时，才能将第 $i$ 条边改变颜色；当第 $i$ 条边改变颜色时，又仅仅影响到 $f(i-1)$ 与 $f(i+1)$ 的值，而其他各项的值都保持不变．

当写出 5 条边 $i-2$，$i-1$，$i$，$i+1$，$i+2$ 的颜色时，变化情况如下

$(brbrb)\leftrightarrow(bryrb)$，$(brbry)\leftrightarrow(bryry)$，$(yrbry)\leftrightarrow(yryry)$，$(yrbrb)\leftrightarrow(yryrb)$，这里只列出当第 $i-1$、$i+1$ 条边均为红色的情况，两者均为蓝色或黄色的情况可由此轮换得出．

∴ 操作前后 $f(i-1)+f(i+1)$ 的值保持不变，即在允许的操作之下，和数 $s$ 的值是不变量．

∵ 初始状态所对应的和数 $s_0=-3$，

∴ 希望达到的终结状态所对应的和数 $s_1=3$ 是不能实现的．

**例 5** MO 牌足球由若干多边形皮块用三种不同颜色的丝线缝制而成，它有以下特点：

(1) 任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合；

(2) 足球上每一个结点，恰好是 3 个多边形的顶点，每一结点的三条缝线颜色互不相同．