高师函授讲义

高等几何

高等几何编写组编

前　言

本教材是根据原部颁高等师范数学专科函授教学大纲，由湖南高等几何研究会组织编写的。叙述时兼顾了综合法和代数法，尽可能联系中学实际。内容精练，便于自学，并附全部习题解答，以便参考。其中个别章节和习题可以舍去，这部分均带有“＊”号，以便酌定。一般面授40学时，自学90学时，可以完成教学任务。

本教材由李厚荣、揭沛林、彭群钦、黄大顺、唐齐琼、欧阳干执笔编写。在编写过程中，全国高等几何研究会理事、湖南高等几何研究会理事长、长沙水电师院黄贵卿付教授自始至终给予了热情鼓励和具体指导，并亲自审阅了全部内容，在此谨致深切的谢意。

在本教材的印刷过程中，得到了常德师专印刷厂的大力支持一并表示感谢。

由于编者水平有限，难免存在疏漏错误之处，请广大读者见教。

编　者

目　　录

第一章　仿射变换

第二章　射影平面

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　仿射变换

本课程的主要内容是射影几何，而中学所讲的是欧几里得几何，它与射影几何的差距甚大，所以先讲与射影几何差距较小的仿射几何，作为过渡，这将有助于以后深入理解射影几何的基本概念。

§1．1　平行投影与仿射对应

太阳的光线照在窗户上，把窗框和窗花映照在地面上，随着时间的推移，它们的影子的位置在变，影子的形状和大小也在变，形象和实物之间的对应关系就是一种近似的平行投影。时间变了，太阳光的方向就变了，就出现不同的影象。这就类似于下面要讲的投影方向变了，就得出不同的平行投影。

下面我们就从最简单的情形入手，来讲述平行投影的概念。

在同一平面上，任给两条直线 a 和 a'，设直线 e 与 a 和 a' 都相交，在直线 a 上任取一些点 A、B、C、D……，过这些点作 e 的平行线，交直线 a' 于点 A'、B'、C'、D'……，这时 a 上的点与 a' 上的点之间就呈现出一一对应的关

系，称此关系为直线 a 与 a' 间的平行投影或透视仿射对应。a 上的点 A、B，……称为原象点，它们在 a' 上的对应点 A'，B'……称为映象点或象点，若用 T 表示透视仿射对应，则此对应关系可记为 $A'=T(A)$，$B'=T(B)$……，或记为 $A \xrightarrow{T} A'$，$B \xrightarrow{T} B'$……。e 称为平行投影的方向。显然，平行投影和投影方向 e 有关，取不同的方向，就有不同的从直线 a 到直线 a' 的平行投影。

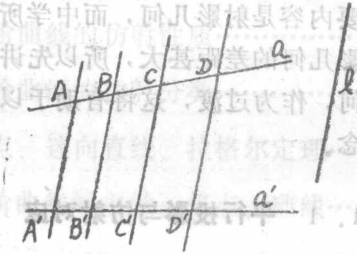

图1.1

现设同一平面内有 n 条直 a_1，a_2，…，a_n，用 T_1，T_2，…，T_{n-1} 分别表示 a_1 与 a_2，a_2 与 a_3，…，a_{n-1} 与 a_n 间的平行投影，那么，这一连串的平行投影使得第一条直线 a_1 上的各点与末一条直线 a_n 上的各点间存在着一一对应关

图1.2

系，称此关系为直线 a_1 与 a_n 间的仿射对应（图1．2是 $n=4$ 的情形）。由此可见，直线 a_1 与 a_n 间的仿射对应是由有限回的平行投影组成的。所以仿射对应是透视仿射链或平行投影链，也可以说，仿射对应 T 是 $n-1$ 个透视仿射的乘积，记为 $T=T_{n_1}\cdots T\cdot T_1$。透视仿射对应是由一回平行投影所成的，是最简单的仿射对应。

同样，我们可以建立平面 π 到平面 π' 的平行投影或透视仿射对应。设直线 e 与平面 π 及 π' 都相交。过平面内诸点 A，B，C，…作 e 的平行线，交平面 π' 于点 A'，B'，C'，…（图1．3）这样，两平面的点之间就有了一一对应关系：$A\to A'$，$B\to B'$，$C\to C'$，……。这种对应关系称为平面 π 与 π' 间的平行投影或透视仿射对应。而点对 A 与 A'，B 与 B'，…称为透视仿射的对应点或对应点对。当平行投影方向 e 改变时，就得出另外的从 π 到 π' 的透视仿射对应。

如果 A，B，C 在一条直线 a 上，则易见它们的对应点 A'，B'，C' 也在一条直线 a' 上，且 a' 是 a 的对应直线。也就是说，平行投影将 π 上的点映射为 π' 上的点，将 π 上的直线映为 π' 上的直线，透视仿射对应的这个性质叫做保持同素性。在 π 上有点 C 在直线 AB 上，经透视对应 T，在 a' 上有象点

图1．3

$C'=T(C)$在象直线$A'B'=T(AB)$上，这个性质叫做保持结合性。所谓结合性在这里是指点在直线上或直线通过点。

在直线e到直线e'的透视仿射下，若两直线相交，则交点自己对应自己，称为自对应点。若两直线平行，透视仿射就只是平移，自对应点不存在。同样，在平面π到平面π的透视仿射下，若两平面相交，则交线g上的π有点都是自身对应点，即交线是自对应点的轨迹，称为对应轴。显然，对应直线a与a'或相交于对应轴上；或都与轴平行；若两平面平行，它们之间的透视仿射是平移，对应轴不存在。

两平面间的仿射对应如同两直线间的仿射对应一样，是由有限回的平行投影所组成的，或说是由透视仿射链组成的。因为透视仿射对应保持同素性，结合性，所以仿射对应也保持同素性与结合性。但是仿射对应点对的连线却不见得平行，也就是说仿射对应不一定是透视仿射对应。

§1.2 仿射不变性与不变量

我们已经知道，在仿射对应下，图形的一些性质如同素性、结合性都是不变的。象这种经过一切仿射对应不变的性质（量，图形）称为图形的仿射性质（仿射不变量，仿射图形）

仿射对应是有限次透视仿射的积，所以讨论仿射不变性、不变量、不变图形只要就透视仿射讨论就够了。

定理1 两直线间的平行性是仿射不变性。

证明 假定在平面π内有两条直线a和b互相平行。它们在平面π'内的对应直线为a'和b'。如果a'与b'不平

行，那么它们应有一个交点P'。可是在仿射对应下，两平面内的点是一一对应着的。因此，P'应有一个原象点P在平面π内，又因仿射对应保持点与直线的结合性，所以点P应在直线a与b上，即直线a与b相交，这与假设矛盾。所以必有$a' /\!/ b'$。

推论1　平行四边形经仿射对应变为平行四边形。

推论2　两条相交直线经仿射对应变为两条相交直线。

定义　设A，B，C是同一直线上的三点，我们将有向线段AC与BC的数量的比称为三点A，B，C的简比，记作(ABC)。

$$\text{即}\quad (ABC)=\frac{AC}{BC}$$

不难看出，当C内分有向线段AB时，$(ABC)<0$；当C外分AB时，$(ABC)>0$；当C与A重合时，$(ABC)=0$；特别是当C是AB中点时，$(ABC)=-1$。

定理2　共线三点的简比是仿射不变量。

证明　在图1．1和图1．3中，因为$AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$所以

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}=(A'B'C')$$

这表明简比经过透视仿射是不变的，因此，经过透视仿射链，简比也保持不变。

下面我们把两条有向线段的数量的比简单说成线段之比。

推论　一直线上任意两线段之比是仿射不变量。

证明 设直线a上任意四点A，B，C，D的仿射映象为直线a'上的四点A'，B'，C'，D'。由定理2，有

$$(ACD)=(A'C'D') \qquad (BCD)=(B'C'D')$$

即$$\frac{AD}{CD}=\frac{A'D'}{C'D'} \qquad \frac{BD}{CD}=\frac{B'D'}{C'D'}$$

两式相减，得$$\frac{AD-BD}{CD}=\frac{A'D'-B'D'}{C'D'}$$

所以$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

定理3 两条平行线段之比是仿射不变量。

证明 设AB和CD是平面π内的平行线段，$A'B'$和$C'D'$是它们在平面π'内的对应线段（图1．4）。由定理1，$A'B' \parallel C'D'$。

在平面π内连结BD，过C作BD的平行线交AB于点E，那么$CDBE$是一个平行四边形。它经过仿射对应变为π'内的平行四边形$C'D'B'E'$，共线点AEB变为共线点$A'E'B'$。由定理2，得出

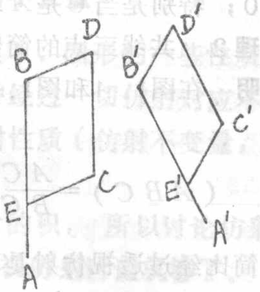

图1.4

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{EB}=(AEB)=(A'E'B')$$

$$=\frac{A'B'}{E'B'}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

注意：我们证明了，共线或平行两线段之比在仿射对应下保持不变，但任意两线段之比经过仿射对应后却可能改变。例如：等腰三角形经仿射对应通常变为不等腰三角形。

上面我们证明了直线上两线段之比是仿射不变量，由此想到：平面上两三角形面积之比是否也是仿射不变量呢？为了回答这个问题，我们先证明下面的引理。

引理　在透视仿射对应下，任何一对对应点到对应轴的距离之比是一个实数。

证明　设A与A'，B与B'是透视仿射对应下的两对对应点，由这些点分别引对应轴g的垂线，其垂足分别为A_0与A_0'，B_0与B_0'（图1．5）。若对应直线AB，$A'B'$都与轴g平行，引理显然成立；若AB与$A'B'$相交于轴g上，设交点为P。因为$AA_0 \parallel BB_0$，所以$\triangle AA_0P \backsim \triangle BB_0P$由相似三角形的性质得

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{AP}{BP}\quad 同理，有\quad \frac{A'A_0'}{B'B_0'}=\frac{A'P}{B'P}$$

因为简比是透视仿射对应的不变量，所以

$$\frac{AP}{BP}=\frac{A'P}{B'P}$$

由以上几个等式，得

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A_0'}{B'B_0'}$$

或

$$\frac{A'A_0'}{AA_0}=\frac{B'B_0'}{BB_0}=K（定数）$$

给定一个透视仿射对应T_n，就有一个与之相应的定数K_n。

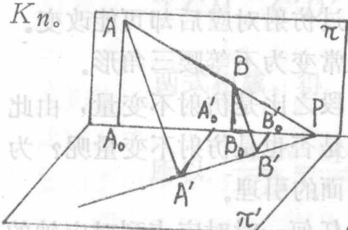

图1.5

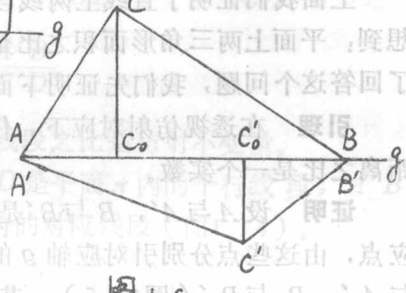

图1.6

定理4 任何一对仿射对应三角形面积之比是个定数。也就是说，任意两个三角形面积之比是仿射不变量。

证明 先对透视仿射证明这个定理，分两步来证。

（1） 对应三角形有一对对应边重合于对应轴上。

如图1.6中的两个对应三角形ABC和$A'BC'$，它们的对应顶点A与A'，B与B'重合于对应轴g上，由第三对对应顶点C和C'分别引轴g的垂线，垂足为C_0和C_0'。对应三角形的面积之比为

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{C'C_0'}{CC_0}$$

由引理， $\dfrac{C'C_0'}{CC_0}=K（定数）$

所以 $\triangle A'B'C' = K\triangle ABC$

（2）一般情况。

如图1.7所示，一对透视仿射对应$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的三对对应边相交于对应轴g上。由情况（1）的结论，得

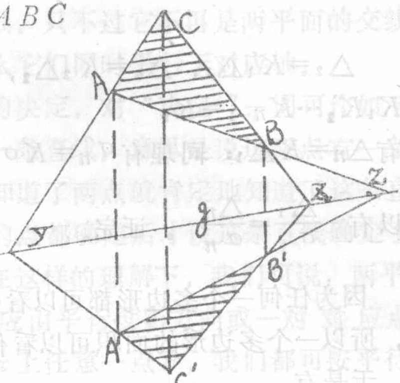

图1.7

$$\triangle A'B'C' = \triangle C'YX + \triangle B'XZ - \triangle A'YZ$$
$$= K\triangle CYX + K\triangle BXZ - K\triangle AYZ$$
$$= K(\triangle CYX + \triangle BXZ - \triangle AYZ)$$
$$= K\triangle ABC$$

当$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$有一对对应边与轴g平行时，这对对应边的交点不存在，但易见定理仍成立。

前面我们对透视仿射证明了定理成立，下面证明对一般仿射对应定理也成立。

设平面π_1上的三角形$\triangle_1$经过透得仿射T_1变换为平面π_2上的三角形$\triangle_2$，$\triangle_2$经过透视仿射T_2变换为平面π_3上的三角形$\triangle_3$，以下类推，直至最后变为平面π_n上的三角形$\triangle_n$。同样平面π_1上的三角形σ_1经过同一串透视仿射变为π_n上的三角形σ_n。据引理，设与T_i相应的定数为K_i（$i=1, 2, \cdots, n-1$），于是由前面透视仿射的结论

有

$$\triangle_2=K_1\triangle_1,\ \triangle_3=K_2\triangle_2,\ \cdots,\ \triangle_n=K_{n-1}\triangle_{n-1},$$

令$K_1K_2\cdots K_{n-1}=K$，

则有$\triangle_n=K\triangle_1$；同理有$\sigma_n=K\sigma_1$

所以有 $\dfrac{\triangle_1}{\sigma_1}=\dfrac{\triangle_n}{\sigma_n}$ 。证完。

因为任何一个多边形都可以看作是由若干个三角形组成的，所以一个多边形的面积可以看作若干个三角形的面积之和。于是有

推论1　任何一对仿射对应多边形面积之比等于定数。也就是说，任意两个多边形面积之比是仿射不变量。

因为任何一条封闭曲线都可以用它的内接n边形来逼近，运用极限过程可得

推论2　任意两条封闭曲线所围成的面积之比是仿射对应下的不变量。

§1.3　平面内的透视仿射变换

前面我们建立了两个相交平面间的透视仿射对应，它有一条由自对应点构成的直线称为对应轴，就是两平面的交线g。我们设想其中一个平面绕交线g旋转，到与另一平面重合时停止，并且假定对应关系在旋转过程中没有被破坏（保持不变），这样，两相交平面内的点对应就变为两重合平面内的点对应了，或说是变为平面到自身的点对应了。我们称平面到自身的透视仿射对应为平面内的透视仿射变换。它保持了两相交平面间透视仿射对应的基本特征：对应点的连线都互相平行，对应直线若相交，则交点就是自对应点，自对

应点组成的直线就是对应轴，只不过它不再是两平面的交线了。对应直线若平行，那么它们同时平行于对应轴。

下面要提到仿射变换的决定，对“决定”一词可作如下理解。我们常说两点决定一条直线，意思是说过两点有一条且仅有一条直线，或者说知道了两点就肯定地知道了这条直线，不必等到直线上所有的点都确定后才说这条直线确定了（直线作为点的集合）。在这样的理解下，我们可说：两平面π与π'间的透视仿射对应由平行投影方向或一对对应点唯一决定．因为对于平面π上任意一点B，我们都可按平行投影的规律在平面π'上找到B的唯一象点B'。在明确了上述意义后，我们有以下的定理，

定理　平面内的透视仿射变换由对应轴与一对对应点完全决定。

证明　设已知对应轴g与一对对应点A，A'。我们只须证明，对于平面上任意一点B，它的对应点B'可以唯一地确定。

作直线AB交对应轴g于P点，连结PA'，则AP与$A'P$是一对对应直线，过点B作AA'的平行线交$A'P$于点B'，则B'就是B的对应点。由作图显见，B'的位置唯一确定。

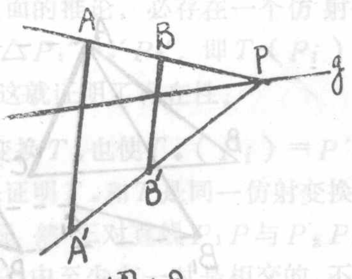

图1.8

如果$AB \parallel g$，那么过A'作AB的平行线，过B作

AA'的平线，这两条直线的交点就是B的对应点B'。

§1.4 平面内的仿射变换

平面π内的有限回透视仿射变换组成平面π内的仿射变换，或者说，一般仿射变换是由透视仿射变换链组成的。因为平面内的仿射变换就是平面到自身的仿射对应，所以仿射变换下的不变性质与不变量就是仿射对应下的不变性质与不变量，例如同一平面内的仿射变换也保持同素性，结合性，平行性，简比，平行线段之比，两图形面积之比不变。

定理 给定平面内的两个三角形，至多利用三回透视仿射变换可使一个三角形变为另一个三角形。

证明 把$\triangle A'B'C'$平行移动到$\triangle A_1B_1C_1$使顶点A'与A重合。这个平移变换可以看作透视仿射变换的特例，记作T_1，因为这时对应轴虽不存在（由于对应边互相平行而无自对应点），但对应顶点的连线是互相平行的。然后以直线AB_1作为透视仿射对应轴

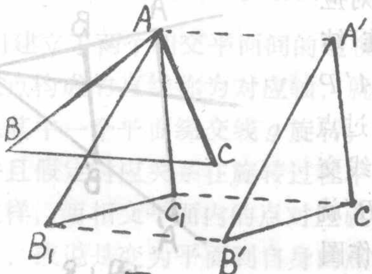

图 1.9

以$C_1\to C$为对应点确定一个透视仿射变换T_2，将$\triangle AB_1C_1$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com