高职高专测绘专业规划教材

测量平差

主编　张慧慧

东北大学出版社

高职高专测绘专业规划教材

测 量 平 差

主　编　张慧慧
副主编　鲁　纯　佟　彪　王春波
谭立萍　马　驰
主　审　李　勇

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

测量平差／张慧慧主编. — 沈阳：东北大学出版社，2013. 8
高职高专测绘专业规划教材
ISBN 978-7-5517-0416-8

Ⅰ. ①测…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①测量平差—高等职业教育—教材　Ⅳ. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 189215 号

出 版 者：东北大学出版社
　　地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
　　邮编：110004
　　电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
　　传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
　　E-mail：neuph @ neupress. com
　　http：//www. neupress. com
印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：9
字　　数：230 千字
出版时间：2013 年 8 月第 1 版
印刷时间：2013 年 8 月第 1 次印刷
策划编辑：刘宗玉
责任编辑：潘佳宁
封面设计：刘江旸
责任校对：北　辰
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-0416-8　　　　定　　价：26. 00 元

序

辽宁省交通高等专科学校工程测量技术专业自1995年创办以来，为社会培养了大批工程测量技术专业人才。为了进一步适应交通行业发展的需求，在深入调研的基础上，从1999年开始，我系进行了面向测绘现场的教育教学改革，将工程测量技术专业特色定位为“精测量、懂施工、会管理”。2005年，工程测量技术专业被辽宁省教育厅确定为示范专业。

高等职业教育专业教学改革和建设的核心是课程改革和建设。课程改革和建设的重点是教学内容的改革和建设，教材建设是第一位的，要充分体现应用性、先进性和实践性，兼顾现场技能应用与技术更新培养，使教学内容与测绘现场和专业技术发展接轨。正是出于上述考虑，我系工程测量技术专业教师和有关工程技术专家，在辽宁省教育厅对接产业群项目资助下，编写了这套专业规划教材。

这套规划教材的出版是这一课程改革和建设思想探索与实践的成果，是全体专业教师、工程技术专家、一线技术人员共同劳动的结晶，同时也为今后进行更深入的课程改革和建设打下了很好的基础。

这套规划教材适用于工程测量技术专业，也可供相关专业选用。希望这套规划教材能被更多的院校采用，供大家借鉴，并提出宝贵意见，使其推广、发挥更大作用。

辽宁省交通高等专科学校测绘系工程测量教研室

2013年1月

前　言

测量平差是高职高专“测绘专业”及其相关专业的一门专业基础课程，是专业核心能力模块的重要组成部分。本书根据高职高专“测绘专业”学生的实际情况和测量平差课程的特点，尽量弱化平差较难的理论知识，着重介绍平差的基础理论，同时介绍了基本的平差方法，并运用实例详细、具体地说明了测量数据处理的基本方法，通俗易懂、简明实用，力求达到易学易用的目的。本书非常适合于希望直接解决具体工程测量问题的技术人员参考。

本书共分为六章，第一章测量误差理论，介绍了测量的基本误差理论，尤其是精度评定的几种常用指标；第二章测量平差原理，阐述了平差的数学模型；第三章条件平差，主要阐述如何应用条件平差法求最可靠值；第四章间接平差，主要阐述间接平差原理及其算例；第五章误差椭圆，具体阐述点位精度评定；第六章常用测量平差软件应用，介绍两种常用的成熟平差软件，平差易系统和科傻系统。通过本课程的学习，学生能够明确平差的两大任务，掌握如何运用条件平差及间接平差法求出观测值及其函数的最可靠值，并评定其精度。学生在掌握基础理论的同时，掌握两种常用的平差实用软件，使理论与实践有机结合，培养学生工程测量需要的基本职业能力。

本书由张慧慧担任主编，鲁纯、佟彪、王春波、谭立萍、马驰担任副主编。李勇教授审阅了全稿，提出了许多宝贵意见。同时，我们在书稿编写过程中参阅了大量的书籍和文献资料，引用了部分专家、学者的研究成果，在此表示感谢！

本书可用做高职高专测绘专业的测量平差课程教学用书，也可供有关专业的工程技术人员学习参考。

由于作者水平有限，书中难免有许多错误和不当之处，恳请各位专家读者批评指正。

编　者

2012年12月18日

目　录

第 1 章　测量误差理论

1.1　观测值与观测误差

1.1.1　观测值及其函数

误差理论的研究对象就是观测值。观测值，就是通过观测得到的测量信息。

所谓测量观测值是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的地球与其他实体的空间分布有关信息的数据。测量观测值可以是直接测量的结果，也可以是经过某种变换的结果。

根据测量方式，测量观测值可分为直接观测值和间接观测值。

直接观测值是指直接从仪器或量具上读出待测量的数值。例如，钢尺量距的读数、经纬仪或全站仪测某方位的度盘读数、水准测量中每一站的前后视读数，都是直接观测值。然而，在测量工作中，有些未知量往往不能直接测得，而需要由其他的直接观测值按一定的函数关系计算出来，这样的测量值称为间接观测值。这类例子很多，如水准测量中，高差 $h=a-b$ 就是关于直接观测值 a，b 的函数，这里的函数 h 就是间接观测值。

一个量是否是直接观测值不是绝对的。随着科学技术的发展，测量仪器的改进，很多原来只能间接测量的量，现在可以直接测量了。然而在测量工作中，现在大多数所求的量还都是间接测量值，即观测值的函数。

1.1.2　观测误差

任何一个被观测的量，客观上总是存在着代表其真正大小的数值，简称真值。在测量工作中，由于测量仪器、外界条件、测量人员等诸多因素的影响，对某个量的测量值不可能是无限精确的，即测量中的误差是不可避免的。通常将对某量（如某一个角度、某一段距离或某两点间的高差等）进行多次观测所得的各次观测结果存在着的差异，实质上表现为每次测量所得的观测值与该量的真值之间的差值，称为测量误差，也称观测误差，即

$$\text{测量误差}(\Delta) = \text{真值} - \text{观测值}$$

测量误差存在于一切测量之中，贯穿于测量过程的始终。随着科学技术水平的不断提高，测量误差可以被控制得越来越小，但是却永远不会降低到零。

在实际测量工作中，往往会遇到某些量不是直接测定的。既然观测值一定存在误差，那么导致观测值的函数也必然存在误差。例如：三角高程测量中，两点间的高差即为观测量竖直角与平距的函数。那么观测量的误差是通过什么规律传递给函数的呢？这个规律就称为误差传播律，将在本章后续内容中具体阐述。

1.2 误差分类

1.2.1 误差来源

测量误差产生的原因主要有以下三个方面。

1. 仪器设备

测量工作是利用测量仪器进行的。常用测量仪器设备有钢尺、水准仪、经纬仪、全站仪、GPS 等，每一种测量仪器都具有一定的精确度，同时仪器本身在设计、制造、安装、校正等方面也存在一定的误差，因此会使测量结果受到一定影响。例如钢尺的实际长度和名义长度总存在差异，由此所测的长度总存在尺长误差。又如水准仪的视准轴不平行于水准管轴，也会使观测的高差产生 i 角误差。再如经纬仪度盘的偏心差。同样，全站仪、GPS 等仪器的观测结果也会有误差的存在。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力存在一定的局限性，所以，对于仪器的对中、整平、瞄准、读数等操作都会产生误差。例如，在厘米分划的水准尺上，由观测者估读毫米数，则毫米级估读误差是完全有可能产生的。另外，观测者的技术熟练程度、工作态度也会给观测结果带来不同程度的影响。

3. 外界环境

观测时所处的外界环境中的温度、风力、大气折光、湿度、气压等时刻在变化，外界条件发生变化，观测成果将随之变化，也会使测量结果产生误差。例如，温度变化使钢尺产生伸缩，大气折光使望远镜的瞄准产生偏差等。

上述三方面的因素是引起观测误差的主要来源，因此把这三方面因素综合起来称为观测条件。观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。观测条件的优劣直接影响观测成果的质量，反之观测成果的质量也反映观测条件的好坏。但是，不管观测条件如何，观测的结果都会受到上述因素的影响而产生这样或那样的误差，因此测量中的误差是不可避免的。当然，在客观条件允许的限度内，可以而且必须确保观测结果具有较高的质量。

把在同一观测条件下的观测称为等精度观测；反之，称为不等精度观测。而相应的观测值称为等精度观测值和不等精度观测值。

1.2.2 误差分类

观测误差按其对观测成果的影响性质，可分为粗差、系统误差、偶然误差三种。

1. 粗　差

粗差就是测量中出现的错误，如读错、记错、照错等。这主要是由于工作中的粗心大意而引起的。一般粗差值很大，不仅大大影响测量结果的可靠性，甚至造成返工，给工作带来难以估量的损失，因此必须采取适当的方法和措施，杜绝其发生。

2. 系统误差

在相同的观测条件下，对某量进行一系列的观测，若观测误差的符号及大小保持不变，或按一定的规律变化，这种误差称为系统误差。这种误差往往随着观测次数的增加而

逐渐积累，且对测量成果质量影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱系统误差对观测成果产生的影响，达到实际上可以忽略不计的程度。

3. 偶然误差

在相同的观测条件下作一系列观测，若误差的大小及符号都表现出偶然性，即从单个误差来看，该误差的大小及符号没有规律，但从大量误差的总体来看，具有一定的统计规律，这类误差称为偶然误差或随机误差。

例如，经纬仪测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差和仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差。例如照准误差可能是由于照准部旋转不正确、脚架或觇标的晃动与扭转、风力风向的变化、目标的背影、大气折光等偶然因素影响而产生的小误差。因此，测角误差实际上是用许许多多微小误差项构成的，而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化，其数值的大小和符号的正负具有随机性，这样，由它们所构成的误差，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的。因此，把这种性质的误差称为偶然误差。

当观测值中剔除了粗差，排除了系统误差的影响，或者与偶然误差相比系统误差处于次要地位后，占主导地位的偶然误差就成了我们研究的主要对象。如何处理这些随机变量的偶然误差，是测量平差这一学科所要研究的主要内容。在下一节将详细介绍偶然误差特性。

1.2.3　粗差特点及其处理办法

粗差是一种大量级的观测误差，在测量成果中，是不允许粗差存在的。在观测数据中应设法避免出现粗差。

处理粗差的办法主要有以下两种。

（1）采用 3σ 准则，统计理论表明，测量值的偏差超过 3σ 的概率已小于 1%。因此，可以认为偏差超过 3σ 的测量值是其他因素或过失造成的，为异常数据，应当剔除。

（2）进行必要的重复观测和多余观测，通过必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗差。国家的测绘机构制定的各类测量规范和细则，也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此，一旦发现粗差，该观测值必须舍弃或重测。尽管观测过程十分小心，粗差有时也在所难免。因此，如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差，或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差成果的影响，乃是测绘界十分关注的课题之一。

1.2.4　系统误差的规律和处理方法

1. 系统误差规律

系统误差的特点是测量结果向一个方向偏离，其数值按一定规律变化，具有重复性、单向性。我们应根据具体的测量条件，系统误差的特点，找出产生系统误差的主要原因，从而采取适当措施降低它的影响。

系统误差的产生主要有以下几个方面。

（1）仪器误差。这是由于仪器制造或校正不完善而造成的。例如，角度测量时经纬仪的视准轴不垂直于横轴而产生的视准轴误差，水准尺刻画不精确所引起的读数误差。

（2）环境误差。外界环境（光线、温度、湿度、电磁场等）对测量仪器的影响等所产生的误差等。例如测角时因大气折光而产生的角度误差。

（3）理论误差（方法误差）。这是由于测量所依据的理论本身的近似性，或测量条件不能达到理论所规定的要求，或者是测量方法本身不完善所带来的误差。例如钢尺量距时外界温度与仪器检定时温度不一致所引起的距离误差。

（4）人为误差。这是由于观测者个人感官和运动器官的反应或习惯不同而产生的误差。例如由于观测者照准目标时，总是习惯于偏向中央某一侧而使观测结果带有系统误差。

需要注意的是，由于系统误差总是使测量结果偏向一边，或者偏大，或者偏小，因此，多次测量求平均值并不能消除系统误差。

2. 系统误差的处理办法

消除和减少系统误差的方法一般有以下三种。

（1）检校仪器，把系统误差降低到最小程度。例如每次水准测量前都要进行 i 角检验，对 i 角误差超限的，应校正后才能用于观测。

（2）观测方法和观测程序上采用必要的措施，限制或削弱系统误差的影响。这是消除系统误差的主要方法。

① 如测水平角时采用盘左、盘右观测并在每个测回起始方向上改变度盘的配置等；方向观测法测角时，为了检查水平度盘在观测过程中是否发生变动，计算归零误差。

② 水准测量中，保证前后视距尽量相等，以减弱 i 角影响。在水准观测过程中，水准仪和水准标尺的自重对地面施加了一定荷载，随安置时间的延长会产生连续的沉降。因此在一测站的观测过程中，须采用后—前—前—后的观测顺序减弱其影响；对于整条水准线路来说，应进行往返观测，并取往测高差与返测高差的中数作为一条线路最后观测高差。这样做可以使得在观测过程中由仪器与标尺下沉所引起的观测高差大部分得到消除。另外，外业观测一测段设站时一定要设为偶数站以消除标尺零点差。

（3）找出产生系统误差的原因和规律，对观测值进行系统误差的改正。

如在钢尺量距中，某钢尺的注记长度为 30m，经鉴定后，它的实际长度为 30.016m，即每量一整尺，就比实际长度量小 0.016m，也就是每量一整尺段就有+0.016m 的系统误差。这种误差的数值和符号是固定的，误差的大小与距离成正比，若丈量了五个整尺段，则长度误差为 $5\times(+0.016)=+0.080\text{m}$。若用此钢尺丈量结果为 167.213m，则实际长度为：

$$167.213+\frac{167.213}{30}\times 0.016=167.213+0.089=167.302\text{m}$$

因此，钢尺量距时，要计算尺长改正数对丈量结果进行改正，从而消除系统误差。

1.2.5 测量平差的任务

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响，在实际工作中，为了提高成果的质量，防止错误发生，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，一个平面三角形，只需要观测其中的两个内角，即可决定它的形状，但通常是观测

三个内角。由于偶然误差的存在，通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致，或不符合应有关系而产生的不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，消除不符值，得到观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，因此，可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果，这就是测量平差的一个主要任务。测量平差的另一个主要任务是评定测量成果的精度。

概括来说，测量平差的任务就是：

① 对一系列带有观测误差的观测值，运用概率统计的方法来消除他们之间的不符值，求出未知量的最可靠值；

② 评定测量成果的精度。

1.3　偶然误差统计特性

1.2 节中，我们知道偶然误差是一种随机变量，一组误差表面上没有规律性，但就总体来说具有一定的统计规律。即在相同观测条件下，大量偶然误差分布表现出一定的统计规律性，因此可以应用概率统计的方法来研究偶然误差的规律性。

为了便于理解，现先引入一个直观的例子。

大家都熟悉“抛硬币”的游戏。如果抛的次数较少，正、反面出现的频率是难以预计的事，可能是正面，也可能是反面。但是如果连续抛无数多次，正反面出现的频率就会趋近相等，表现出统计规律性。

1.3.1　偶然误差的表示方法

为了研究偶然误差的统计规律性，可以用下列方法来表示。

1. 真误差

设进行了 n 次观测，各观测值为 L_1，L_2，…，L_n，观测量的真值为 $\tilde{L}_1$，$\tilde{L}_2$，…，$\tilde{L}_n$。由于各观测值都带有一定的误差，所以，每一个观测值的真值 $\tilde{L}_i$（或 $E(L_i)$）与观测值 L_i 之间必存在一个差数，设为

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \tag{1-1}$$

称 Δ_i 为真误差（在此仅包含偶然误差），有时简称为误差。若记

$$\underset{n,1}{\boldsymbol{L}} = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^{\mathrm{T}}, \qquad \underset{n,1}{\tilde{\boldsymbol{L}}} = [\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \cdots \quad \tilde{L}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\underset{n,1}{\boldsymbol{\Delta}} = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \cdots \quad \Delta_n]^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\boldsymbol{\Delta} = \tilde{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L} \tag{1-2}$$

从概率论与数理统计的观点可知，当只含偶然误差时，可以以被观测值的数学期望表示该观测值的真值，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{L}) = [E(L_1) \quad E(L_2) \quad \cdots \quad E(L_n)]^{\mathrm{T}} = [\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \cdots \quad \tilde{L}_n]^{\mathrm{T}} = \tilde{\boldsymbol{L}}$$

则有

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{L}) - \boldsymbol{L} \tag{1-3}$$

在此用观测值的真值与观测值之差定义真误差，有些教材和文献中用观测值与观测值

的真值之差定义真误差。这两种定义方式仅仅是使真误差符号相反，对于后续各种计算公式的推导没有影响。

2. 误差分布表

在某测区，在相同的条件下，独立地观测了 358 个三角形的全部内角，由于观测值带有偶然误差，故三内角观测值之和不等于其真值 180°。各个三角形内角和的真误差：

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, \ 2, \ \cdots, \ 358)$$

式中，$(L_1+L_2+L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。

现取误差区间的间隔 $\mathrm{d}\Delta$ 为 0.20″，将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列，统计误差出现在各区间内的个数 v_i，以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n $(n=358)$，其结果列于表 1-1 中。

表 1-1　　某测区三角形内角和的误差分布

误差值/(″)	小于 -1.60	-1.6	-1.4	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	大于 1.6
个数	0	4	6	13	17	23	33	40	45		46	41	33	21	16	13	5	2	0
频率/‰	0	11	17	36	47	64	92	112	126		128	115	92	59	45	36	14	6	0
$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$ (10^{-3})	0	55	85	180	235	320	460	560	630		640	575	460	295	225	180	70	30	0

从表 1-1 可以看出，偶然误差具有以下性质：

① 在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值，也称有界性；

② 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多，也称单峰性；

③ 绝对值相等的正、负误差出现的机会基本相等，也称对称性；

④ 偶然误差的算术平均值随着观测次数的无限增加而趋近于零，也称补偿性。

3. 直方图法

上述例子误差的分布情况，除了采用表 1-1 的形式表达外，还可用直方图来表达。例如，以横坐标表示误差的大小，纵坐标表示各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值，即$\dfrac{\frac{v_i}{n}}{\mathrm{d}\Delta}$，根据表 1-1 的数据绘制出图 1-1。此时图中每一个误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率，如图 1-1 中画斜线的长方条面积就代表误差出现在 0.4″～0.6″区间内的频率为 0.092，这种图称为直方图，它形象地表示了误差分布情况。

4. 误差概率分布曲线——正态分布曲线

当在同一观测条件下，随着观测个数的无限增多，即 $n\to\infty$ 时，误差出现在各区间的频率也就趋于一个确定的数值，这就是误差出现在各区间的概率。就是说在一定的观测条件下，对应着一种确定的误差分布，若 $n\to\infty$，$\mathrm{d}\Delta\to 0$，图 1-1 中各长方条顶边所形成的折线将变成图 1-2 所示的一条光滑曲线。该曲线就是误差的概率分布曲线，或称为误差分布曲线。

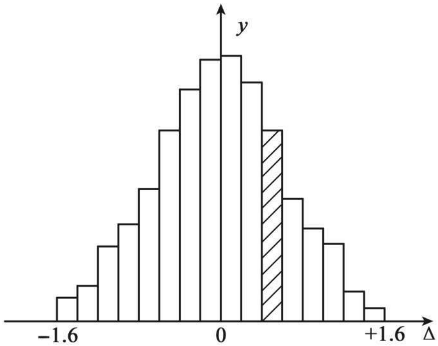


图 1-1　直方图

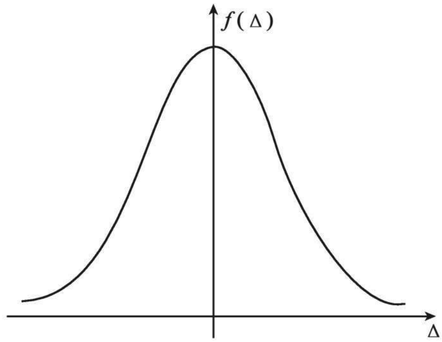


图 1-2　误差概率分布曲线

由此可见，偶然误差的频率分布随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布，这样 Δ 的概率密度式为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

式中，σ 为标准差，测量上称为中误差。

而误差出现在某一区间内的概率 $P(\Delta)$ 为

$$P(\Delta)=f(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta$$

1.3.2　偶然误差的分布特性

通过以上讨论，可以进一步用概率术语概括出偶然误差的几个特性。

① 在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者讲，超出一定限值的误差出现的概率为零。

② 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

③ 绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

④ 偶然误差的数学期望为零，即

$$E(\Delta)=0$$

换句话讲，偶然误差的理论平均值为零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{1-4}$$

式中，$[\Delta]$ 表示 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$，偶然误差的第四个特性是由前三个特性导出的。因为在大量的偶然误差中，正、负误差有互相抵消的性能，当观测次数无限增加时，真误差的算术平均值必然趋向于零。

对于一系列的观测而言，不论其观测条件是好是差，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差必然都具有上述的四个特性。掌握了偶然误差的特性，就能根据带有偶然误差的观测值求出未知量的最可靠值，并衡量其精度。同时，也可应用误差理论来研究最合理的测量工作方

案和观测方法。

1.3.3 偶然误差的意义

1. 制订测量限差的依据

由偶然误差的有界性可知：在一定的观测条件下，若仅有偶然误差的影响，误差的绝对值必定会小于一定的限值。我们在实际工作中，就可依据观测条件确定一个误差限值，若观测值的误差绝对值小于该限值，认为观测值合乎要求；否则应剔除或重测。

2. 判断系统误差（粗差）的依据

由偶然误差的对称性和偶然性可知，误差的理论平均值为零，即观测值的期望值为真值，观测值中不含有系统误差和粗差。若误差的理论平均值不为零，且数值较大，说明观测成果中含有系统误差和粗差。

1.4 精度指标

1.4.1 精度、准确度、精确度

1. 精　度

评定测量成果的精度是测量平差的主要任务之一。为了正确理解精度的含义，先分析上节的实例。

从上节直方图中可以看出，误差分布较为密集的，其图形在纵轴附近的顶峰则较高，且由长方形所构成的阶梯比较陡峭；误差分布较为分散的，其图形在纵轴附近顶峰则较低，且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线的形态上，即有误差分布曲线较高而陡峭和误差分布曲线较低而平缓两种情形。

不难理解，误差分布密集的，即离散度较小时，则表示该组观测质量较好，也就是说该组观测精度高；反之，如果分布较为离散，即离散度大时，表示该组观测质量较差，也就是说，这一组观测精度较低。综上所述，精度是指在一定观测条件下，误差分布的密集或离散的程度。

另外，根据数学中方差的定义也可以知道，精度实际上反映的是该组观测值与其理论平均值（即数学期望）的接近程度。也可以说，精度是以观测值自身的平均值为标准的。从概率与数理统计的观点可知：当观测量仅含偶然误差时，其数学期望就是它的真值。在这种情况下，精度描述的是该组观测值与真值的接近程度，可以说它表示观测结果的偶然误差大小程度，是衡量偶然误差大小程度的指标。

2. 准确度

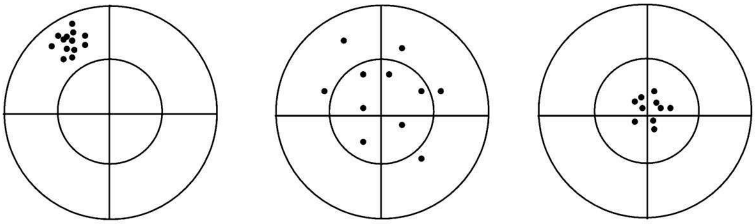
准确度是指随机变量 X 的真值 $\tilde{X}$ 与其数学期望 $E(X)$ 之差，即 $E(X)$ 的真误差，这是存在系统误差的情况。因此准确度表征了观测结果系统误差大小的程度，是衡量系统误差大小程度的指标。准确度高，则随机变量 X 的数学期望偏离真值较小，测量的系统误差小，但数据较分散，偶然误差的大小不确定。

3. 精确度

精确度是精度和准确度的总称。指观测结果与其真值的接近程度，包括观测结果与其

数学期望的接近程度和数学期望与其真值的偏差。精确度反映了偶然误差和系统误差联合影响的大小程度，是一个全面衡量观测质量的指标。精确度高，测量数据较集中在真值附近，测量的偶然误差及系统误差都比较小。当仅含偶然误差时，精确度就是精度。

可以用打靶实验来形象地说明这三个概念之间的区别。打靶可以看成是用枪对靶心进行“观测”。如图 1-3，甲、乙、丙三人分别对（a）（b）（c）靶进行射击。



(a) 精　度　　(b) 准确度　　(c) 精确度

图 1-3　精度、准确度与精确度

在图 1-3 中（a）图表示弹着点比较密集，但都偏离靶心，说明甲射出的精度高，但准确度较低，一定是某些因素影响（如准星偏）而产生了系统误差；（b）图表示乙弹着点比较离散，但是它们的中心位置比较接近靶心，说明射击的准确度比甲高，但精度比甲较低；（c）图表示丙弹着点比较集中靶心，说明射击的精度和准确度都较高，即精确度较高。

1.4.2　精度指标

判断观测误差对观测结果的影响，必须建立衡量观测值精准度的标准。测量平差的研究对象是一系列含有误差的观测值。当认为仅含偶然误差时，精确度就是精度，因此测量平差把精度作为衡量观测质量的指标。观测质量优劣或者说精度高低，可以按上节组成误差列表，绘制直方图、画出误差分布曲线的方法来比较，但在实际工作中比较麻烦，而且人们需要对精度有一个数字概念来说明误差分布的密集或离散的程度，作为衡量精度的指标。衡量精度的指标有很多种，下面介绍几种常用的精度指标。

1. 中误差

用 σ^2 表示误差分布的方差，偶然误差 Δ 的概率密度函数为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

由方差的定义

$$\sigma^2=D(\Delta)=E(\Delta^2)-(E(\Delta))^2$$

由于在此 Δ 主要包括偶然误差部分，$E(\Delta)$，所以有

$$\sigma^2=D(\Delta)=E(\Delta^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\,d\Delta \tag{1-5}$$

σ 就是中误差

$$\sigma=\sqrt{E(\Delta^2)} \tag{1-6}$$

不同的 σ 将对应着不同形状的分布曲线，σ 愈小，曲线愈为陡峭，σ 愈大，则曲线愈

为平缓。σ 的大小可以反映精度的高低，所以常用中误差 σ 作为衡量精度的指标，σ 恒取正值。

正态分布曲线具有两个拐点，它们在横轴上的坐标为 $X_{拐}=\mu_x \pm\sigma$，μ_x 为随机变量 X 的数学期望。对于偶然误差，由于其数学期望 $E(\Delta)=0$，所以拐点在横轴上的坐标为

$$\Delta_{拐}=\pm\sigma \tag{1-7}$$

如果在相同的条件下得到了一组独立的观测误差，根据定积分的定义可以写出

$$\sigma^2=D(\Delta)=E(\Delta^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta \tag{1-8}$$

对于离散型

$$\sigma^2=D(\Delta)=E(\Delta^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n};\quad \sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-9}$$

方差是真误差平方(Δ^2)的数学期望，也就是 Δ^2 的理论平均值。在分布律为已知的情况下，$E(\Delta^2)$是一个确定的常数。或者说，方差 σ^2 是$\frac{[\Delta\Delta]}{n}$的极限值，它们都是理论上的数值。实际上观测个数 n 总是有限的，由有限个观测值的真误差只能得到方差和中误差的估值，方差 σ^2 和中误差 σ 的估值分别用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 表示，即

$$\hat{\sigma}^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n},\quad \hat{\sigma}=\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-10}$$

这就是根据一组等精度独立真误差计算方差和中误差估值的基本公式。在后续的文字叙述中，在不需要特别强调“估值”意义的情况下，也将“中误差的估值”简称为“中误差”。

[例 1-1] 对同一三角形用不同的仪器分两组各进行了十次观测，每次测得内角和的真误差 Δ 如下。

第一组：+3″，−3″，+4″，−2″，0″，+3″，−2″，+1″，−1″，0″；

第二组：−1″，0″，+8″，+2″，−3″，−7″，0″，+1″，−2″，−1″。

求两组观测值的中误差，并比较其精度。

解： $\sigma_1=\sqrt{\frac{3^2+3^2+4^2+2^2+0^2+3^2+2^2+1^2+1^2+0^2}{10}}=1.3''$

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{1^2+0^2+8^2+2^2+3^2+7^2+0^2+1^2+2^2+1^2}{10}}=2.7''$$

由于 $\sigma_1<\sigma_2$，说明第一组观测值的离散度小于第二组，故前者的观测精度高于后者。

中误差作为度量观测质量的“尺子”，在测量中形成各种各样的精度指标。例如三级导线测量中规定测角中误差不超过 12″，测距中误差不超过 15mm；四等水准测量中规定每公里高差中数偶然中误差不超过 5mm；地形测量中地形图图上地物点相对于邻近图根点的点位中误差，一般地区不应超过 0.8mm，等等。上述角度中误差、测距中误差、点位中误差等都称为绝对误差。

2. 极限误差

中误差不是代表个别误差的大小，而是代表误差分布的离散度的大小。由中误差的定义可知，它是代表一组同精度观测误差平方的平均值的平方根极限值，中误差愈小，即表