Daxue 大学应用数学

Yingyong Shuxue

郑清平　张绪林　印德彬　主　编
卢社军　秦少武　严中芝　副主编
徐国洪　主　审

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

大学应用数学

郑清平　张绪林　印德彬　主编

重庆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学应用数学/郑清平,张绪林,印德彬主编.—
重庆:重庆大学出版社,2015.1
ISBN 978-7-5624-8803-3

Ⅰ.①大… Ⅱ.①郑…②张…③印… Ⅲ.①应用数
学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①029

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第010556号

大学应用数学

郑清平 张绪林 印德彬 主编
策划编辑:章 可
责任编辑:文 鹏 版式设计:章 可
责任校对:贾 梅 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行
出版人:邓晓益
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号
邮编:401331
电话:(023) 88617190 88617185(中小学)
传真:(023) 88617186 88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆紫石东南印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/6 印张:17.25 字数:430千
2015年1月第1版 2015年1月第1次印刷
ISBN 978-7-5624-8803-3 定价:35.00元

前言

为了适应高等职业教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,本书依照教育部制定的《高职高专数学课程教学基本要求》,汲取国内高职数学教材的优点,从不同专业岗位对数学知识的需求出发,结合编者多年教学实践编写而成。本教材具有以下特色:

1. 淡化理论性和系统性,强化针对性和实用性。“以应用为目的,以必需、够用为原则”,既考虑到高等数学学科的系统性、逻辑性,又针对高职学生的接受能力及专业课程数学知识的需求,适当选取教材内容的深度和广度,舍去不必要的烦琐证明,注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,使学生能够获得专业课程、职业岗位及终身学习所必需的数学知识,掌握基本的数学思想方法和必要的应用技能。

2. 知识编排新颖实用,强化专业个性化服务。本书面向高职专业岗位对数学的不同需求,将高等数学、工程数学、离散数学、概率统计等学科知识优化重组而成。全书共分 11 个章节,涵盖极限、导数、微分、积分、拉普拉斯变换、线性代数、离散数学、概率等方面,区别于传统高等数学教材内容,便于针对专业需求对内容有选择性地菜单式教学。如拉普拉斯变换、线性数适用于机械工程类专业,离散数学适用于计算机类专业,概率适用于财经类专业等。

3. 采用教、学、练一体化编写风格,突出易教、易学、易用的特点。本书每一个章节都配有“本节导学”,对授课内容和重点进行阐述,并以知识引入、新课讲授、例题分析、知识归纳、练习巩固、复习小结为序,采用了“教案式”“讲义式”编写风格。版面设计新颖,利用 4 分之 1 的版面作注释,给出提示、点评、分析等,更适于学生做学习笔记,使教材、讲义与笔记三位一体,既便于教师教,又便于学生学,使学生解决“学什么?怎么学?学后怎么用?”的问题。

4. 内容呈现形式多样,强化科学人文教育。本书文字描述简洁明快流畅,图文并茂,使抽象的内容形象化,注重基本概念和基本定理的几何解释、物理意义和经济背景,通俗易懂,便于学生理解与掌握,同时还配有部分科学家的图文简介,强化人文教育。

本书由郑清平、张绪林、印德彬担任主编，由秦少武、卢社军、严中芝担任副主编，由郑清平、张绪林修改、统稿、定稿，杨金才、付晓军、张光勇、郭波涛、田德旭也参加了本书的编写。在本书的编写过程中，仙桃职业学院的领导和老师提出了许多宝贵的意见和建议，编者在此表示诚挚的谢意。

本书的所有素材文件可在重庆大学出版社网站下载，用户名和密码都为 cqup。限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，书中难免有不足之处，敬请广大师生、读者批评指正。

编　者

2014 年 11 月

目 录

第一章
极限与连续

极限是高等数学中的一个重要概念. 极限概念的产生源于解决实际问题的需要,极限理论的确立使微积分有了坚实的逻辑基础,并使微积分在当今科学的各个领域得以更广泛、更合理、更科学地应用与发展. 本章主要介绍极限的基本概念和方法,并用极限的方法讨论无穷小及函数的连续性.

第一节 极 限

本节导学
内容:数列和函数的极限.
重点:①极限的概念;②函数极限的判别方法.

一、引入

中国古代从先秦时期开始,一直是取“周三径一”(即圆周周长与直径的比率为 3∶1)的数值来进行有关圆的计算. 我国魏晋时期伟大的数学家刘徽发现,用“周三径一”计算出来的圆周长实际上不是圆的周长,而是圆内接正六边形的周长,其数值要比实际的圆周长小得多.

为了求出圆的精确面积,刘徽发明了割圆术. 所谓割圆术,其实就是极限的思想,即用圆内接正多边形的面积来逼近圆的面积. 下面我们看一下刘徽割圆术的具体做法.

他从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆,依次得正 12 边形、正 24 边形……割得越细,正多边形面积和圆面积之差越小,用他的原话说是“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”他割了 10 次,计算了正 3072 边形的面积.

若把圆内接正 6 边形的面积记为 S_1,圆内接正 12 边形的面积记为 S_2,依此类推,圆内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 S_n,圆的面积记为 S,则形成了一个数列 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$无限接近 S.

刘徽(约 225—295).
中国魏晋时期著名数学家.

观察数列变化方法：①可从数字的变化规律上理解；②可从图形上点的位置变化规律上理解.

二、数列的极限

观察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势.

①$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

②$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$

③$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

④$3,3,3,\cdots,3,\cdots$

发现当n趋近∞（记为$n\to\infty$）时，

①式$x_n=\frac{1}{n}$无限趋近0$\left(记为 x_n=\frac{1}{n}\to 0\right)$；

②式$x_n=\frac{1}{2^{n-1}}\to 0$；

③式$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\to 1$；

④式$x_n=3\to 3$.

像这样，如果当$n\to\infty$时，有x_n无限趋近某一个常数A，则称A为数列$\{x_n\}$的**极限**，或者称数列$\{x_n\}$收敛于A，记为

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$.

知识归纳：①分母趋近无穷大，而分子为常数，则该分式的极限为0；②常数A的极限仍然为A.

因此，①式极限为0，可记为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；

②式极限为0，可记为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$；

③式极限为1，可记为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$；

④式极限为3，可记为$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$.

例 1.1.1　观察数列的变化趋势，写出极限.

(1)$x_n=1-\frac{1}{n^2}$　　　　(2)$x_n=(-1)^n\frac{1}{n^n}$

解　(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^n}=0$

注意：数列的一般项x_n必须是趋近“唯一”的常数时，才有极限；但如果一般项x_n不是趋近常数（如∞）或者变化趋势是几个常数时，数列都没有极限. 如：

数列$0,1,0,1,\cdots$

或数列$1,2,3,1,2,3,1,2,3,\cdots$

由于没有趋近“一个”确定的常数，所以这两个数列没有极限.

练习 1.1.1

观察下列数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的变化趋势,写出极限.

(1)$0,1,2,\cdots,n-1,\cdots$

(2)$0,\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\cdots,\frac{n-1}{n+1},\cdots$

(3)$x_n=1-\frac{1}{10^n}$　　　(4)$x_n=\frac{2n}{1+3n}$

(5)$x_n=\begin{cases}\frac{1}{n!!},n\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{n!},n\text{ 为偶数}\end{cases}$

三、函数的极限

1. 当 x→∞ 时,函数的极限

观察图 1.1.1 中函数$y=\frac{1}{x}$的变化趋势.

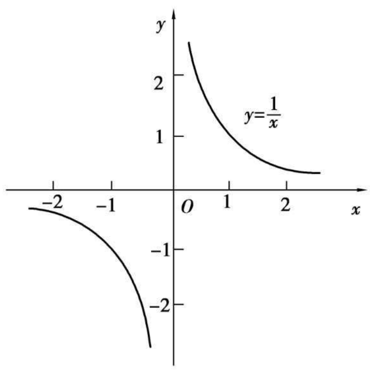

图 1.1.1

发现:当$x\to\infty$时(包括$x\to+\infty$和$x\to-\infty$两种情况),函数$y=\frac{1}{x}$的值的变化趋势是无限趋近 0.

像这样,当$x\to\infty$时,函数$y=f(x)$的变化趋势是无限趋近某一个常数A,则称A是函数$y=f(x)$当$x\to\infty$时的**极限**. 记为:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$

如果当$x\to+\infty$时(或$x\to-\infty$时),函数$y=f(x)$的变化趋势是无限趋近某一个常数A,则称A是函数$y=f(x)$当$x\to+\infty$时(或$x\to-\infty$时)的**极限**. 记为:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$)

例 1.1.2　观察函数$y=\arctan x$分别在当$x\to+\infty$和$x\to-\infty$时的变化趋势,并求$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$,$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　如图 1.1.2 所示.

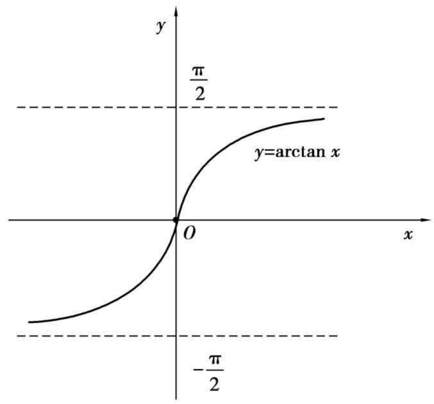

图 1.1.2

观察图形的变化趋势知:

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

在这里,虽然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 都存在,但它们并不相等,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

练习 1.1.2

观察函数的变化趋势,并写出极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数的极限

观察表 1.1.1 中,函数 $y=2x-1$ 当 x 从 2 的左右两侧趋近 2 时,对应的函数值.

表 1.1.1

x	1	1.5	1.8	1.9	…→	2	←…	2.1	2.2	2.5	3
y	1	2	2.6	2.8	…→	3	←…	3.2	3.4	4	5

从函数值的变化趋势上可以看出:当 $x\to2$ 时,$y\to3$.

如图 1.1.3 所示为函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的图像.

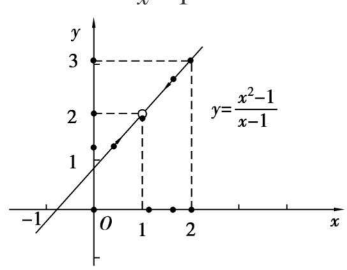

图 1.1.3

显然,当 x 从 1 的左右两侧趋近 1 时,$\frac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近 2,即当 $x\to1$ 时,$y\to2$.

像这样,当 $x\to x_0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的变化趋势是无限趋近某一个常数 A,则称 A 是函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**. 记为:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$

注意:极限值是否存在与函数值是否存在并无关系.

例 1.1.3　观察图 1.1.3,求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

例 1.1.3　解题说明:本题是求 $f(x)$ 的极限值,不是求 $x=1$ 的函数值,因此求函数的极限与函数在 $x=1$ 处是否有定义无关.

解　当 $x=1$ 时,函数值不存在. 当 x 从 1 的左右两侧趋近于 1 时,而不是 $x=1$,此时,$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ 都趋近于 2,即 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

练习 1.1.3

画出函数的图形,观察变化趋势,求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}(x+2)$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}|x|$

3. 左极限与右极限

若当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^-$)时,函数 $y=f(x)$ 无限趋近于某一个常数 A,则称 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**. 记为:

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^-)$$

若当 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^+$)时,函数 $y=f(x)$ 无限趋近于某一个常数 A,则称 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**. 记为:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^+)$$

左极限与右极限也可分别记作 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$. 显然,函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在的充要条件是:当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的左右极限存在且相等,即 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

例 1.1.4　已知 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解　函数图像如图 1.1.4 所示.

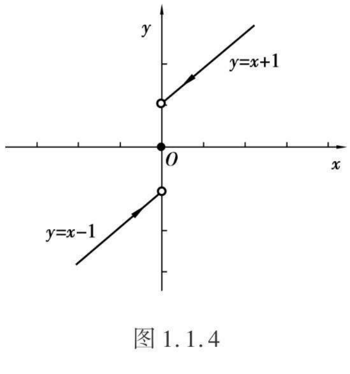

图 1.1.4

观察变化趋势可知：

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$,

而$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，故$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

练习 1.1.4

已知$f(x)=\begin{cases}-x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

第二节 极限的求法

本节导学

内容：①极限的四则运算法则；②两个重要极限；③无穷小与无穷大.

重点：①极限的四则运算法则的应用；②会使用两个重要极限求解极限问题；③利用等价无穷小的替换求解极限.

一、引入

由极限定义可知，当$n\to\infty$时，$3n-1\to\infty$，$5n+4\to\infty$，因∞不是一个确定的常数，故$3n-1$、$5n+4$的极限都不存在，那么两者的商极限是不是也不存在呢？即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{5n+4}$是否存在？

二、极限的四则运算法则

若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

①$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

③$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

注意：

①参与运算的每个函数的极限必须存在；

②函数商的极限中，分母的极限不能为零.

说明：极限的四则运算法则中的函数可以推广到有限个函数的情形.

例 1.2.1 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+1}{x^2-2x+3}$.

解 原式$=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(2x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+3)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}2x+\lim\limits_{x\to1}1}{\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}2x+\lim\limits_{x\to1}3}$

$=\dfrac{2\times1+1}{1^2-2\times1+3}=\dfrac{3}{2}$

例 1.2.2 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.

解 原式$=\dfrac{1^2+2\times1-3}{1+1}=0$

例1.2.3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2+2x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=0+2=2$

例1.2.3解题说明：约分化简，方法是展开分子.

例1.2.4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\dfrac{1}{2}$

例1.2.4解题说明：目的是约分化简，方法是分子有理化，分子分母同乘以某一项.

例1.2.5　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{5n+4}$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{n}}{5+\dfrac{4}{n}}=\dfrac{3-0}{5+0}=\dfrac{3}{5}$

例1.2.5解题说明：目的是约分化简，方法是分子分母同时除以它们中n的最高次.

练习1.2.1

1.求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+3)$　　(2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　　(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{4-x}}$

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2-n+1}{3n^2+n}$

2.求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

三、两个重要极限

1.重要极限1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

重要极限1的特点：

①形状为$\dfrac{0}{0}$型；

②含有三角函数；

③结构为$\lim\limits_{()\to 0}\dfrac{\sin()}{()}=1$，以含有( )为标准.

例1.2.6　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}$

$=1\times 1=1$

例1.2.7　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x}=3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$

归纳：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$（$k$ 为常数）

例 1.2.8 解题说明：利用三角函数倍角公式化简 $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$

例 1.2.8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\right)^2$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

练习(4)提示：$\sin x=-\sin(x-\pi)$

练习 1.2.2

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$　　(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

重要极限 2 的特点：①形状为 1^∞ 型；②结构为 $\lim\limits_{(\ )\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{(\ )}\right)^{(\ )}=e$，以含有( )的为标准. 解题方法："倒倒抄".

2. 重要极限 2

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ 或} \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

其中，e 是一个无理数，e =2.718 28…

例 1.2.9 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

分析：这是 1^∞ 型. 应用重要极限 2，用"倒倒抄"构造满足重要极限 2 的结构，再计算极限.

解 原式 $=\lim\limits_{-x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

例 1.2.10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

解 原式 $=\lim\limits_{\frac{x}{2}\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2$

归纳可得：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k\ (k\text{ 为常数})$$

同理可得

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k\ (k\text{ 为常数})$$

例 1.2.11 解题说明：极限的底数需要首先构造出"1 +(　)"，然后再用"倒倒抄".

例 1.2.11 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{1-x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left[1+\left(\dfrac{2}{x+1}-1\right)\right]^{\frac{1}{1-x}}$

$$=\lim_{\frac{1-x}{x+1}\to 0}\left[\left(1+\frac{1-x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{1-x}}\right]^{\frac{1}{x+1}}=e^{\frac{1}{2}}$$

例 1.2.12　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^{2}$

例 1.2.12 解题说明：

由于$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)=e^{k}$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=e^{-1}$

练习 1.2.3

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$

2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{kx}=e^{-1}$，求常数 k.

四、无穷小与无穷大

1. 无穷小

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称$f(x)$为$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

说明：无穷小一般情况下是一个绝对值无限变小的变量，以常量形式出现的无穷小只有零这个数.其他任何绝对值很小的常量都不能叫无穷小.

无穷小的性质：

(1) 有限个无穷小的和仍然是无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积仍然是无穷小；

(3) 有界函数与无穷小的乘积仍然是无穷小.

例 1.2.13　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解　因为$|\sin x|\leqslant 1$，且$\frac{1}{x}\to 0$（$x\to\infty$）为无穷小，由无穷小性质 3 可得：

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=0$

例 1.2.13 解题说明：

注意区别$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

和$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

2. 无穷大

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$），则称$f(x)$为$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的**无穷大量**，简称**无穷大**.