函数概念

北京大学数学力学系

第一章　函数概念

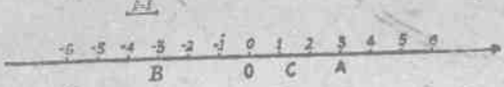
§1　引　論

我們在中学里通过几何、代数、三角等課程的学习，加强了我們对現实世界的空間图形与数量关系这两方面的理解。我們所学过的这些数学都直接地或者差不多直接地联系到每一个人的日常生活，这些数学理論都来之于实踐，并且可以用之于实踐来解决問題。这些理論如果用来对付产业革命以前的滯緩的生产力对于数学方面的需要，原来是可以过得去的（而历史上也確实是这样过去的），但是对于大規模的迅速发展的現代生产来說却是很不夠的。一則由于概念表現太具体了，不能有充分广泛的应用，再則由于方法考慮得太另散了，缺乏深刻的原理以利于掌握；而更重要的是由于研究的对象局限于不变的量无法处理发展迅速变化复杂的生产与生活問題。我們祖国的生产的高速度发展，在工程技术上与經济生活上都要求我們努力提高数学理論的学习。我們今后在数学的学习中将逐步加强概念的抽象性、方法的系統性与演算的精確性，使所学能更广更好地运用于实际与其他学科的学习。我們将在数学分析这門課程中研究变动的量之間的依从关系，并以此为基础通过一系列的課程进行深入細致的研究。

中学里所学得的数学知識与訓練給我們今后深入学习数学打下了基础，对抽象性与系統性提供了具体的內容，便于我們逐步訓練推理能力，同时还成为我們今后計算訓練的基础。但是有三个东西在当时研究不变的量的观点之下并不重要，而在今后研究变量的数学分析中却是十分重要的。我們現在逐一地加以簡单的叙述。

1.　实数軸。　我們将利用空間图形与数量之間的联系，采用一部份几何語言来表述数量的性質，使我們对数量的研究获得几何直观的帮助。这将給我們以很大的便利。

我們将用一条直綫上所有的点来表示一切实数而称这条直綫为实数軸或簡称数軸。表示方法如下。先选定一綫段l为单位长度，再在数軸上取一点O，称为原点或另点。这样，数軸上每一点就代表一个数（称为这一点的坐标）另点右面的点代表正数，它的坐标就是它和另点的距离（以l为1），而另点左面的点代表負数，它的



(图一)

坐标是它和另点的距离带上負号。例如OA=BO=3l，但A在O的右方，故A的坐标为3。而B在O的左方，故B的坐标为-3。

数軸上的点不单可以代表有理数，也可以代表无理数。例如C点在O右方而OC长度等于以l为一边的正方形的对角綫的长度时OC=$\sqrt{2}\,l$，因而C点就代表$\sqrt{2}$这个无理数。数軸上每一点代表一个实数。

反之，每一个实数也已被数軸上的一个点代表了。这只要根据实数的符号来决定它在O的左方或右方，再根据它的数值来决定它与O之間的距离。

这样我們就建立了一切实数和数軸上一切点之間的一个一一对应关系。这就是說，任意一个实数都和数軸上的一个点对应，并且只和一个点对应，反之，数軸上任意一个点都和一个实数对应，并且只和一个实数对应。以后我們在語言中将不严格区分数与点。我們有时說数軸上一个点x，实际意思是說一个实数x。

2. 絕对值　现在来看如何表示数軸上两个点之間的距离。先考虑距离OA。因为A的坐标为3。可知OA=3（l是单位长度，l=1）。

再考虑距离OB。B点的坐标是-3。但是这里的負号說明B在O的左方，和距离是沒有关系的，因而也有OB=3。

由此可见，当A点坐标a大于0时，$\overline{OA}$就等于a，而当B点坐标b小于0时，$\overline{OB}$就应該等于将b的負号变成正号后的值，也就是$\overline{OB}=-b$。

于是我們有需要規定一个数a的"絕对值"，記作$|a|$，它是这样定义的：

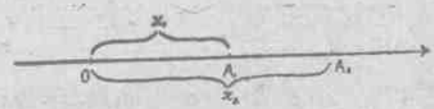
$$|a|=a \qquad \text{当} a\geqslant 0,$$
$$|a|=-a \qquad \text{当} a<0。$$

例如$|3|=3$，$|-2|=2$，$|-\pi|=\pi$，$|0|=0$，……

数量a的絕对值$|a|$表出了数量a在不計正負号（或方向）时的大小。

如果A点的坐标是a，則a代表A与O的距离。

利用絕对值的概念不难得出数軸上任意两点的距离的表达式。若这两点的坐标是x_1和x_2，它們的距离就等于$|x_2-x_1|$。这是可以直接驗証的。例如在附图中，$\overline{A_1A_2}=\overline{OA_2}-\overline{OA_1}=x_2-x_1$因$A_2$在$A_1$右方，故$x_2>x_1$，或$x_2-x_1>0$。因此$|x_2-x_1|=x_2-x_1=\overline{A_1A_2}$。在$A_1$，$A_2$处于其他位置时，



(图2)

証明是同样的，不再一一叙述。

两点間的距离反映在数量上就是两个量相差的大小。这在我們研究变量时是不可少的。所以我們在数学分析中經常要进行絕对值的运算。

关于絕对值和它的运算有下列各等式：

$$1)\ |a|\geqslant 0,$$

$$2)\ |-a|=|a|,$$

$$3)\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|,$$

$$4)\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\qquad(b\neq 0)$$

由定义不难驗証这些等式，不过要分开$a\geqslant 0$，$a<0$，$b\geqslant 0$，$b<0$等情况。現举3)为例。

若$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，則$ab\geqslant 0$因而$|ab|=ab=|a|\cdot|b|$；

若$a\geqslant 0$，$b<0$，則$ab\leqslant 0$因而$|ab|=-ab=a\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$；

若$a<0$，$b\geqslant 0$，則$ab\leqslant 0$因而$|ab|=-ab=|a|\cdot|b|$

若$a<0$，$b<0$，則$ab>0$因而$|ab|=ab=(-a)\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$，

可見等式3）在一切情形下都成立。

3．不等式　数学分析里研究的是变量，变量有大小順序，所以經常要用不等式来描写变量的变化。以后我們会看到，为了要估計量的大小以及量与量之間的差别，我們用到不等式的地方比用等式还多。

不等式的理論基础当然在于数量的可比較性（即任二实数 a 与 b 之間必有而且只有 $a<b$，$b<a$，$a=b$ 这三个关系之一），其运算法則有下面四条：*

$$1)\quad a<b,\ b<c\longrightarrow a<c,$$

$$2)\quad a<b,\ c<d\longrightarrow a+c<b+d,$$

$$3)\quad a<b,\ o<c\longrightarrow ac<bc,$$

$$4)\quad a<b,\ c<o\longrightarrow ac>bc,$$

結合到絕对值不等式有两个极重要的性質我們以后經常要用到它們。

首先我們有

$$\text{I)}\quad |x-a|<r\longleftrightarrow a-r<x<a+r。$$

几何意义是說，若要 x 和 a 的距离小于 r 必需而只需 x 落在 $a-r$ 和 $a+r$ 之間。

証明：自然只需考虑 $r>o$ 的情形。　　設 $|x-a|<r$

若 $x-a\geqslant o$ 我們有 $x\geqslant a>a-r$ 并且同时 $x-a=|x-a|<r$，因而 $x<a+r$。

若 $x-a<o$ 我們有 $x<a<a+r$ 并且同时 $a-x=-(x-a)=|x-a|<r$ 因而

$$x>a-r$$

这样就証明了

$$|x-a|<r\longrightarrow a-r<x<a+r。$$

反之，若 $a-r<x<a+r$ 則 $x-a<r$ 并且 $a-x<r$。当 $x-a\geqslant o$ 时我們有 $|x-a|=x-a<r$，而当 $x-a<o$ 时我們也有 $|x-a|=a-x<r$，所以我們总有

$$a-r<x<a+r\longrightarrow|x-a|<r。$$

証完。

特例，当 $a=o$ 时我們有

$$\text{I}')\quad |x|<r\longleftrightarrow -r<x<r$$

其次我們有

$$\text{II)}\quad |a+b|\leqslant|a|+|b|。$$

証明．由絕对值的定义我們有

$$\pm a\leqslant|a|\quad \pm b\leqslant|b|$$

因而　　$\pm(a+b)\leqslant(|a|+|b|)$；

而由此立得 II）。

若在 II）中把 a 换成 $a-b$ 即得

$$\text{II}')\quad |a-b|\geqslant|a|-|b|。$$

---

* $A\rightarrow B$ 意即由 A 可推出 B；$A\longleftrightarrow B$ 意即 A，B 等价

§3. 常量与變量

在自然现象或劳动生产的每一变化过程中，有些量是保持一个不变的值的，有些量則取得不同的值。前者称为常量，后者称为变量。其实常量只是变量的一种特殊情形。但是一般来說，分开是有好处的。

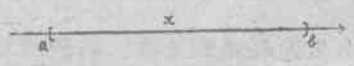
例如对在密閉容器中的气体加热，气体的体积与分子的个数都不发生变化。这些都是常量。但气体的溫度升高了，压力增大了。这时溫度和压力都是变量。如果容器可以膨脹收縮使得容器所受压力不变，那末压力就是常量，而气体体积这时是变量。

在体积不变的情形下，测量或計算体积时不必考虑溫度或压力对它的影响。研溫度与压力的关系也可以不去理会体积的大小。

可以从三方面去研究变量：范圍、趋势与速度。为此我們将引进变化域、极限、微商等数学概念。

现在先講变量的变化域。重要的变化域有下面几种。

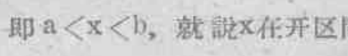
1. 变化区間。若变量x所取的值是由a到b的一切实数，換句話說是适合条件$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x，而在数軸上也就是以a与b为端点的綫段上的一切点，我們这时称这綫段为閉区間并且就說x在閉区間[a, b]內变化，記作$x\in[a, b]$。方括号表示閉区間。



(图3)

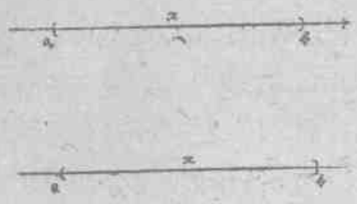
例如1959年7月1日北京最高溫度是30°C而最低溫度是19°C。这一天北京的溫度t的变化范圍便是$19\leqslant t\leqslant 30$。

如果x不能等于a或b，即$a<x<b$，就說x在开区間(a, b)上变化，圆括号表示开区間。



(图4)

对于$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的情形分别用$[a,b)$和$(a,b]$表示叫做半开区間。



$a\leqslant x<b$

$a<x\leqslant b$

（图5）

2.变化范圍是一切实数。这时可以記作$-\infty<x<+\infty$或$x\in(-\infty,+\infty)$这里∞不是数，只是一个符号，这时x在数軸上可以是任意的点。

有时x时的变化范圍是比a大的一切的实数$(x>a)$我們記作$x\in(a,+\infty)$，这时x在数軸上可以是在a右方的任一点。相似地还有$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b)$。

这几类区間統称为无穷区間。

3.变化范圍是一序列的数值。例如x表示每天的平均溫度从某一天算起，第一天是x_1，第二天是x_2，第三天是x_3，等等。这时我們記作$x\in\{x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots\}$。

有时称这种变量为**整序变量**，而称前面两种变量为**連續变量**。

变量的变化范圍称为**变化域**，通常用大写字母X，Y等表示。

§4. 函数关系

变量变化过程中，經常有彼此联系的关系。我們特别注意的是函数关系。

定义：　考虑两个变量x与y，其变化域分别是X，Y。若对于x的每一个值$x\in X$，都相应地有唯一地確定的一个y的值$y\in Y$与之对应，并且y的每一个值$y\in Y$都至少有一个x的值$x\in X$对应到它。我們就称y是x的一个（单值）**函数**，記作$y=f(x)$我們称X为这个函数的**定义域**，Y为这个函数的**值域**；x叫作**自变量**，y叫作**因变量**或函数，f代表x对应到y的规律，叫作**函数关系**。

换句話說，函数关系不过是一个规律，通过这个规律，对于自变量x的任意給定的一个值都可以唯一地確定y的一个值。

例1.　圆的周长与面积都是圆半徑的函数。給定半徑长度r，就可以按照公式$l=2\pi r$与$s=\pi r^2$来確定周长l与面积s。这两个函数的定义域与值域都是$(0,+\infty)$。就是$0<r<+\infty$，$0<l<+\infty$，$0<s<+\infty$。

例2. 一运动着的質点的速度是时間的函数。在一定时間t，它总有一定的速度。虽然不一定能夠通过測量与計算去直接確定它，但它总是存在的，并且被时間唯一地確定。

例3. 內接于单位园的正多边形的面积s_n是n的函数。这里n的定义域是$N=\{3,4,5,\cdots\}$而值域是$S=\{s_3,s_4,s_5,\cdots\}$。

註. 下面举两个不是函数的例。

例4. 身体越鍛炼越强壮，鍛炼与强壮之間有異常密切的关系。但是鍛炼情况与强壮程度却不是单純地用数量表达出来的；因而二者之間的关系不是数学上的函数关系。

例5. 多施肥就多打粮食。施肥多少与收获多少都可用数量表示出来，然而光是施了多少肥却不能保証收获量一定是多少，施肥量并不是收获量的唯一决定因素。收获量旣然不是唯一地被施肥量所確定它也就不是施肥量的函数。［小麦丰产有"八字宪法"，还有其他复杂因素，也不能单純地看作是数学上的函数关系］。

說来說去，要判断两个变量之間是否有函数关系，方法总是根据定义去檢驗是否全部条件都适合，如果全部条件都适合就是，只要有一个不适合就不是。

§5. 函数的表示法

函数的表示方法通常有三种。

1. 列表法。将属于定义域X里的x按某种次序写下，再对每一个x写下对应的y的值，造成一張函数表。例如三角函数表，对数表，或其他特殊函数表。应用函数表可以簡便地由x的值去確定y的值。例如对于函数

$$y=f(x)=\sin x,$$

若給定$x=\frac{\pi}{2}$即可由三角函数表查得$y=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，若給定$x=\frac{\pi}{4}$，即查得$y=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.7071$等等。

2. 分析表达式。写出f(x)的一个式子，使得給出x时按照这个式子进行运算得出f(x)的值，例如$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$，$g(x)=\sqrt{x^2-1}$，即有

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2} \qquad g(1)=\sqrt{1^2-1}=0$$

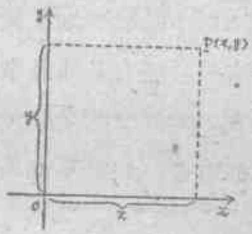
$$f(3)=\frac{1}{3^2+1}=\frac{1}{10}\quad g(3)=\sqrt{3^2-1}=\sqrt{8}$$

某些时候当x属于不同区間时分析表达式也不同。例如当$x\epsilon[1,2]$时，由f (x) $=\frac{1}{x^2-1}$表达，$x\epsilon(2,3)$时由$f(x)=\sqrt{x^2-1}$表达。我們可以写成

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & 当1\leqslant x\leqslant 2\\ \sqrt{x^2-1} & 当2<x<3\end{cases}$$

函数f(x)的定义区域是[1,3)。

3. **图示法**。在平面上取两条互相垂直的直綫，一条由左向右，一条由下向上，以它們的交点为另点，并取相等的长度为单位长。这样作成两条数軸，以水平的一条作为x的数軸，称x軸；以另一条为y的数軸，称y軸。对于每一数組（x,y），我們可以在平面上確定一点P与之对应，使P在x軸与y軸上的垂足分别是x与y。反之对于平面上任一点P，我們可以確定一数組（x,y）与之对应，



（图6）

使x与y分别是P点在x軸与y軸上的垂足。这样我們就在数組（x,y）与平面上的点之間確定了一个一一对应的关系，而在平面上建立了一个“直角坐标系”。

給定函数y=f(x)，对于每一个$x\epsilon X$都確定唯一的一个y，也就相应地確定唯一的一个数組（x,y）現在又使这数組对应于平面上的一个点P。于是給定x一个值后按照函数規律就得到平面上一个点P与之对应。对于X中的每一个x都有平面上的一个对应点，全体x值確定平面上的一类点。这一类点的总体（通常是一条曲綫）称为**函数f(x)的图形**。

附图表示函数$y=2x+2$的图形，这里$X=(-\infty,+\infty)$。


图（7）

以上表示函数的三种方法各有其优缺点。列表法的优点在于求函数值时一目了然，不費多大工夫。但是不能明显地表出函数的变化規律与特点，也不能表示函数的深刻性質，不便进行深入研究，并且只能表示出有限个函数值，x值越多函数表越大而不方便。分析表达式的好处是簡捷精確便于探討函数的深刻規律，但缺点在于求函数值往往要通过繁复的計算，并且对函数值的变化特点缺乏显明的表达。图

示法的特点在于使函数值的变化趋势与某些基本性質具有强烈的直观性，并且在实際問題中往往先知道函数的图形然后才找出函数規律（如自动記录仪器）但几何直观不能代替严格推理。我們以后研究函数将以分析表达式为主，結合其他二法，取长补短。

可注意的是要判断一个函数关系存在与否的問題不同于要找出这函数表示法的問題，例如无理数π的第n位小数π_n我們很容易看出它是n的函数，并且无論指定那一个自然数n我們都有方法去求出π_n，但是我們却还沒有一个明確的統一的公式来表示π_n。对于第n个質数p_n也有同样的情形。

不但如此，即使已經有了分析表达式，表示的函数有时也往往难以確定函数值。例如狄鋭西勒函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{为有理数时}\\ 0 & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

与黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当}x=\dfrac{p}{q}\ (\text{整数}p,g\text{无公因子})\text{时}\\ 0 & \text{当}x\text{为无理数或}0\text{时}\end{cases}$$

表达式是明显的，函数的值随自变量x为有理数或为无理数而完全確定。但是，要判定一个实数x是有理数还是无理数有时却是非常困难的，有些实数到目前为止还不知道它究竟是有理数还是无理数。

§6. 初等函数(一)

在历史发展过程中，有一类函数具有特别重要的意义，它們比較簡单，但是具有很多重要的性質，并且是构成与研究其他許多較复杂的函数的基础。我們称这一类函数为初等函数。

初等函数在理論上和实际应用中都是很重要的。有許多初等函数已在中学里学过，现在我們先系統而扼要地介紹一下。有关它們的許多重要性質，在以后几章中再詳細討論。

1. 多項式：函数中最簡单的是代数学中所研究过的多項式

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \tag{1}$$

其中x是自变量，n是任意一个自然数或另而a_0，$\cdots a_n$是或实数，$a_0\neq 0$。

例一，函数 $y=ax+b$ 的图形是一条直綫

例二，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图形是一抛物綫。

每一个n次多項式函数的图形都是一条連續的曲綫，和x軸最多只有n个交点

思考题 1．函数在什么情形下它的图形和x軸相交？n阶多項式函数和x軸一定有n个交点嗎？为什么？試举出二阶多項式的一些例子来加以說明。

2． 有理函数

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m}。\tag{2}$$

这是由一个多項式除以另一个多項式而得到的。最簡单的有理函数是多項式；此外就是中学里遇見的反比函数：

$$y=\frac{c}{x}。$$

这函数的图形为一对双曲綫。在 $x=0$ 外函数沒有定义。又例如函数

$$y=\frac{1}{x^2}$$

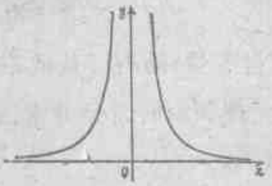


图 8

在 $x \neq 0$ 处也沒有定义。它的图形在上半个平面，而且对于y軸是对称的。

一般的有理函数在其分母不为0的地方总是有定义的，它的图形是一些連續的曲綫，只有使分母为0的那些x值对应的y值不存在。

思考题 2．函数 $y=x+1$ 和

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}$$

有什么不同？为什么？它們的图形怎样？

思考题 3．考虑函数

$$y=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)(x-3)^2}$$

在 $x=1,2,3$ 附近的图形，且說明有为什么不同特点。为什么？

3. 幂函数

$$y=x^{\alpha} \tag{3}$$

其中α是任意一个实数。

若α为正整数，我們可以把它看成特殊的多項式函数；若α为負整数，我們可以把它看成特殊的有理函数，定义域为$x\neq 0$。若$\alpha=\frac{1}{q}$（q为正整数），則当q为奇数时函数定义于整个实数軸上而当q为偶数时定义域为$x\geqslant 0$. 若$\alpha=\frac{P}{q}$（P和q为不可約的正整数），情形是相似的。

至于α为无理数的情形我們在以后再討論。

每一幂函数在它的定义域內的图形都是連續的曲綫，当$x=1$时$y=1$，所以都通过平面上坐标算为（1，1）这一点。

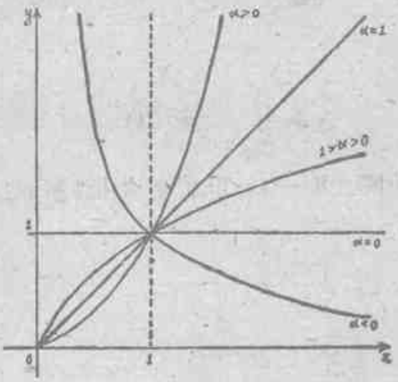


图 9

§7· 反函数

1. 反函数的定义 为了研究更多的初等函数，我們引进反函数的概念。

在函数$y=x^2$中，x是自变量，y是因变量。$(y\geqslant 0)$但是如果我們解成$x=\pm\sqrt{y}$，我們就可以看作y是自变量而x是因变量了，不过这时对于每一个$y>0$都有两个"函数值"，因而得到一个"二值函数"。

由此可見，研究变量x和y的函数关系时，自变量可以根据我們的需要来选定，只不过所得的变量关系有时是"多値函数"罢了。

定义：設有函数$y=f(x)$，其中x是自变量。若得y考慮作为自变量，把x看作因变量，則由$y=f(x)$確定一个（单値或多値）函数$x=\varphi(y)$。我們称这函数为已知函数$f(x)$的反函数，而相对地称$f(x)$为順函数。

这里重要的是函数关系的性質；变量的記号并不是主要的。所以我們常常用

x 表示自变量用y表示函数，把上述函数$y=x^2$的反函数写成$y=\pm\sqrt{x}$。

例1. 綫性数函

$$y=ax+b \quad (a\neq 0)$$

的反函数是

$$y=\frac{x-b}{a}。$$

因为我們可以先把x解出成为y的函数得：

$$x=\frac{y-b}{a};$$

然后再用x代替y，用y代替x，即得

$$y=\frac{x-b}{a}$$

例2.反比函数

$$y=\frac{1}{x} \quad (x\neq 0)$$

的反函数是它自己。因为同上面一样，我們若先把x解成y，再用x代替y，用y代替x即得

$$y=\frac{1}{x},$$

思考題 4. 函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (c,d不全为0)$$

的反函数是什么？什么时候它是自己的反函数？

2. 順反函数的定义域和值域。由定义我們直接知道順函数的定义域就是反函数的函数值的取値范圍，也就是値域。反之，順函数的値域就是反函数的定义域。

我們求反函数时，应看順函数的值域而不应直接由反函数的关系式去决定反函数的定义域。例如函数$y=\sqrt{x}$的定义域是$x\geqslant 0$，値域是$y\geqslant 0$，我們求它的反函数得$y=x^2$，它的定义域是$x\geqslant 0$而不是整个的实数軸，因此函数$y=\sqrt{x}$的反函数是$y=x^2\,(x\geqslant 0)$。

思考題 5. $y=x^2$是誰的反函数？

3. 反函数的图形。設已有函数$y=f(x)$的图形。那末它也是反函数$x=\varphi(y)$的图形。但經过变量符号替換以后的反函数$y=\varphi(x)$在在原坐标系里的图形一般来說并不是順函数的$y=f(x)$图形。我們先x軸改称为y軸，把y軸改称x軸，就得到$x=f(y)$，$y=\varphi(x)$的情形。然后繞第一象限的平分角綫把平面旋轉180^0，使x軸

还是横軸，y軸还是縱軸，这样就得到$y=\varphi(x)$在原来坐标系里的图形了。

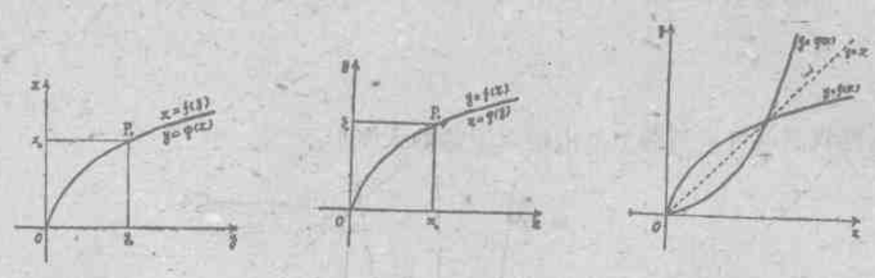


图10，11，12，

順函数$y=f(x)$和它的反函数$y=\varphi(x)$的图形对第一象限的平分角綫$y=x$是称的。

§8. 初等函数（二）

1．指数函数和对数函数。函数

$$y=a^x$$

称为指数函数，其中a是一个正数，$a\neq1$。

当x为正整数时a^x就是a^n，即n个a的乘积。当x为負整数$-n$时，

$$a^x=a^{-n}=\frac{1}{a^n}。$$

当x为正分数$\frac{p}{q}$时，

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}。$$

当x为負分数$-\frac{p}{q}$时，

$$a^x=a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^q}}。$$

当x为无理数时，我們暫用近似的分数代替这些无理数，以后再詳細討論。

現在我們用表来討論a取不同值时的情形。

$a>1$时

自变量x	$x>0$	$x=0$	$x<0$
函　数y	$y>1$	$y=1$	$0<y<1$

$1>a>0$ 时

自变量 x	$x>0$	$x=0$	$x<0$
函　数 y	$1>y>0$	$y=1$	$y>1$

$a=1$时，$y\equiv1$。

这样我們就可以粗略地画出指数函数的大概形状

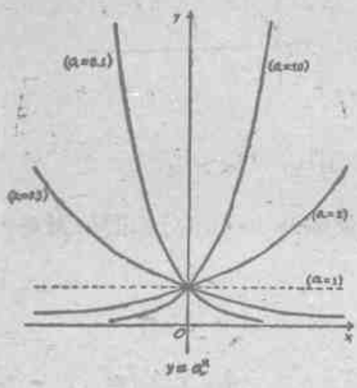


图　13

指数函数的反函数称为对数函数:

$$y=\log_a x\,(x>0)\text{ 其中 }x=a^y\text{ 或 }x=a^{\log_a x}\text{。}$$

根据上节的討論和指数函数的性質我們立刻可以得到对数函数的图形。

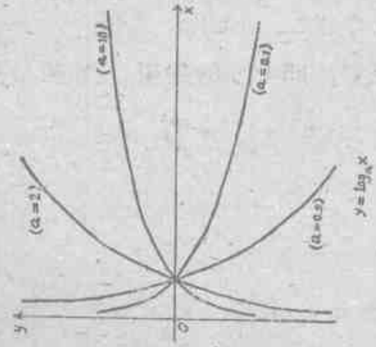


图　14

思考题 7.　用描点法画出 $y=3^x$，$y=3^{-x}$，$y=\log_3 x$，$y=\log_{\frac{1}{3}} x$的图形。

2 三角函数，在中学里，我們已經学过三角函数，现在再簡单地討論其中四个基本的三角函数:

正弦函数　$y=\sin x$

余弦函数　$y=\cos x$

正切函数　$y=\operatorname{tg} x$

余切函数　$y=\operatorname{ctg} x$。

这里自变量 x 要以弧度作单位来表示，圓周上长度等于半徑的弧所对的中心角的角度是一个弧度。

因为$\sin(2\pi+x)=\sin x$，所以它以2π为周期，我們称为周期函数。

用描点法，←(只需 $[0,2\pi]$ 一段）我們首先可以得到正弦函数$y=\sin x$的簡图如下：

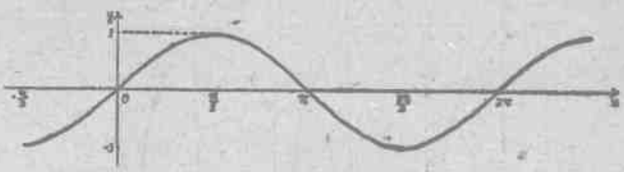


图 15

利用公式$\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 不难看出把函数$y=\sin x$的图形順着x軸向左移动一段长$\frac{\pi}{2}$的距离，就得到余弦函数$y=\cos x$的图形，它也是以2π为周期的周期函数。

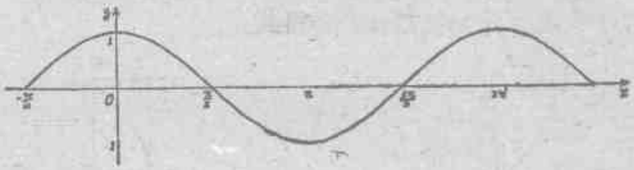


图 16

思考題8．画出三角函数$y=\sin 2x$和$y=\cos\frac{x}{2}$的图形来。

思考題9．討論三角函数 $y=\sin(ax+b)$ 的周期及其图形。

正切函数$y=\mathrm{tg}x$的定义域是$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$因为$\mathrm{tg}(\pi+x)=\mathrm{tg}x$，所以它是以$\pi$为周期的周期函数。用描点法（只需 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 一段）可以得到$y=\mathrm{tg}x$的簡图，它是由一串全同的互相分离的无穷支綫所組成的，每个支綫的寬度为π。

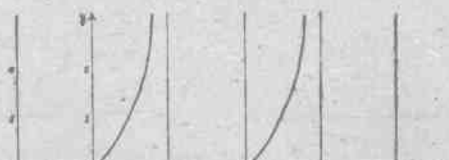


图 17

根据 $\mathrm{ctg}\, x=\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2}+x)$ 我們同时也得到余切函数的簡图。

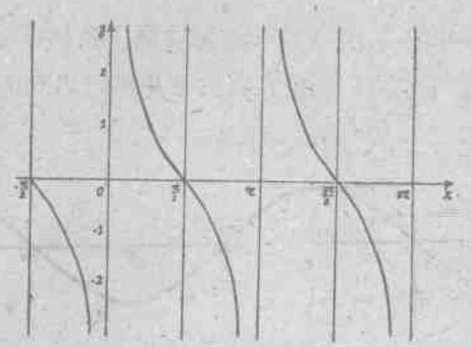


图 18

3. 反三角函数，由三角函数导出的反函数称为反三角函数，我們只講述其中四个基本的反三角函数:

$y=\arcsin x$； $y=\arccos x$； $y=\mathrm{arctg}\ x$； $y=\mathrm{arcctg}\ x$.

这些函数的图形可以按照前节所說的方法由$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\mathrm{tg}\ x$、$y=\mathrm{ctg} y$，对第一象限的分角綫轉180^0而得到。

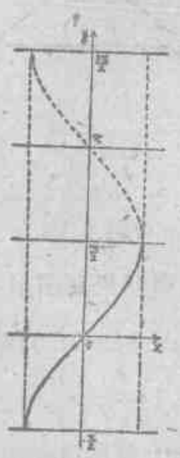


图 19

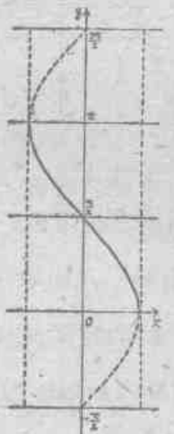


图 20

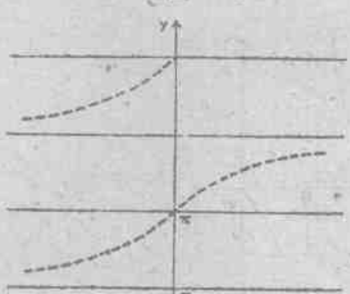


图 21

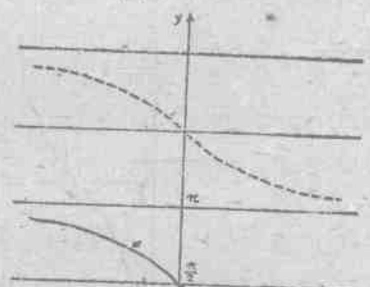


图 22