控江中学新教材二次开发丛书

新课标
数学解析

（第2版）

主编　高长山

XINKEBIAO
SHUXUE
JIEXI

供高一学生下学期使用

丛书主编　张　群

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

控江中学新教材二次开发丛书

新课标

数学解析

第二版

供高一学生下学期使用

主编　高长山

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

《新课标数学解析》一书由控江中学特、高级教师编写而成，它与上海市最新审定的"二期课改"教材相匹配。全书与教材同步，依照教材的章节顺序编排，教材中每一节课的内容为一个训练单元，每一单元分为导学篇和训练篇两大部分。本书为高一学生提供了最新颖、最有效、最权威、最适用的教辅资料，同时为教师的教学提供了很好的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

新课标数学解析 / 高长山主编. --2 版. -- 上海：同济大学出版社，2013.12

(控江中学新教材二次开发丛书/张群主编)

供高一学生下学期使用

ISBN 978-7-5608-4820-4

Ⅰ.①新… Ⅱ.①高… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 163639 号

控江中学新教材二次开发丛书

新课标数学解析(第二版)

主编　高长山

责任编辑 赵　黎　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号　邮编:200092　电话:021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787 mm×1092 mm　1/16

印　　张　9.5

字　　数　237 000

印　　数　3 101—8 200

版　　次　2013 年 12 月第 2 版　　2014 年 12 月第 2 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-4820-4

定　　价　29.00 元

编委会成员名单

总 序

上海市控江中学雄居沪上东北一隅，枕滔滔黄浦江水，扼“知识杨浦”之关隘，早在20世纪50年代，便跻身上海市14所市重点中学之列，而今又是上海市首批命名的市实验性、示范性高中，雄风依旧。

朝迎旭日，夕送晚霞，六十寒暑谱写校园春秋；自主发展，自我砥砺，数万学子铸就控江丰碑。在控江中学的办学历程里，素以大批量、高素质向著名高校输送人才的骄人业绩而享誉社会；在控江中学的菁菁校园里，曾镌刻下不少高考状元风华正茂的身影。抚往昔，20世纪80年代，控江中学曾因高考“双夺冠”而声誉鹊起；看今朝，时代车轮滚滚挺进21世纪，控江中学又是状元迭出，令人称奇。2004年，上海高考理科总分的“状元”、“榜眼”、第四名和语文单科第一名，均出自控江中学；2005年，仅考取复旦大学的学生就有78名之多；2007年，喜报又传，上海市文科状元又出自控江中学；2008年以来，控江中学的高考成绩一直居全市前列。

俗话说，凡事皆有其本原。长期以来，上海市控江中学之所以能有其稳定的教学质量，不仅得益于一支与时俱进、富有钻研精神的教师队伍，而且得益于其“严、实、新、活”的教学风格。自“二期课改”实施以来，控江中学的同仁为使新教材更加贴近学生的学习实际，使新教材更具有实践性和操作性，切磋琢磨，集思广益，对“新教材”进行了卓有成效的“二次开发”，同时也将系统总结学校历年来高三复习的经验，汇编成册，一起奉献给各位读者，与大家分享我们的教学成果，共同提高学习成效。我权以此为序。

张 群

2012年2月1日

前　　言

本书在第1版使用的基础上，由一线教师根据教学要求和实际需要编写而成的。本书从编写的框架设计到内容的选择都有独到之处，其知识编排与新教材章节顺序相匹配，为高一学生学习数学的最佳选择之一。

本书有3个显著特点：

特点一：结构新颖。

本书中，每一节课分为两部分：导学篇和训练篇。

导学篇的主要内容是【问题驱动】。以问题为主线，展现本节知识的获得过程。通过解决问题，获得本节所包含的新的数学知识，通过问题解决的过程体验新知识所蕴含的数学方法，体会其中的数学思想，学生可以通过它学习和回顾本节课的主要知识，教师可以此为参考组织课堂教学。

训练篇的内容有【基础题例析】、【基础训练题】、【能力题例析】、【能力训练题】、【拓展题】五部分。每单元设有测试题1套，全书最后还有期中、期末测试题各1套。

【基础题例析】部分，针对会考的要求而设计。精选2道基础例题，侧重题型及方法，使每个例题都有其明确的目的性，便于学生把握通性通法；例题的分析简明扼要，例题的解答方法择优，解题过程十分完整，通过点评，总结出题目所反映的方法、技巧及值得注意的问题。

【基础训练题】部分，编排了适量的具有针对性和有效性的基础训练题。学生独立完成后，去对照解答，可达到自测、自查、自我订正的效果。既巩固了知识和方法，又能反馈学生对基础知识的掌握程度。

【能力题例析】部分，针对高考的要求精选1道有点灵活度并稍有些综合性的例题，突出题型与解题方法的重要性。例题的分析简明、透彻，解题过程完整、解题方法最佳。

【能力训练题】部分，编排了3道具有针对性和有效性的能力训练题。

【拓展题】部分，精选1道更能开阔视野的题目，供具有较高能力的学生使用。

特点二：层次清晰，层层递进。

【基础题例析】和【基础训练题】为学生达到学业水平考试的要求而设计。

【能力题例析】和【能力训练题】为高考所设计。学生如能高质量完成，必能在高考中获得好的成绩。

【拓展题】是为学有潜力、志向高远想进名牌大学的学生所设计，学生经常性地通过此类问题的思考与训练，必将塑造学生的思维品质，提高学生的数学能力，最终定能实现目标。

特点三：内容精简，功能齐全。

（1）每一个方案只设计13道题，紧扣课堂所学的知识与方法，问题不重复，很有梯度；总用时大约30分钟左右。

（2）例题精选，难度适中，解题方法通俗，分析点拨及点评到位。

（3）无论从知识内容，还是解题方法、数学思想方面，阶段、期中、期末测试卷编制都比较完整，学生自我测评可信度强。

本书凝聚了控江中学全体数学教师多年来教学研究的成果，充分体现了以培养创新能力为核心的素质教育精神。愿我们这套书：给你打开一扇窗，让你领略数学的博大精深；开启你好奇的心灵，点燃你胸中的求知欲望；激发你睿智的头脑，帮助你培养理性的思维。限于水平，书中难免会有一些缺点和错误，恳切希望广大师生批评指正。

控江中学数学组

2013年10月

目　　录

第四章

幂函数、指数函数与对数函数(下)

4.4 对数的概念及其运算(1)

(一) 导 学 篇

问题驱动

我们知道：若 $2^x=8$，则 $x=3$；那么，若 $2^x=7$，由指数函数的单调性可知，x 存在且唯一，那么如何表示 x 呢？我们将引进一个新的符号来表示 x.

1. 对数的定义是什么？定义中各个量的取值范围是什么？

一般地，如果 $a(a>0, a\neq 1)$ 的 b 次幂等于 N，即 $a^b=N$，那么，数 b 叫做以 a 为底的 N 的对数，记作 $\log_a N=b$，其中，a 叫做对数的底数，N 叫做真数.

以 10 为底的对数叫做常用对数，简记作 $\lg N$. 以无理数 e 为底的对数叫做自然对数，简记作 $\ln N$.

根据定义，我们只是在 $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 的前提下，把式 $a^b=N$ 改写为 $\log_a N=b$. 所以 a 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，根据指数函数的性质，b 的取值范围为 $\mathbf{R}$，N 的取值范围为 $\mathbf{R}^+$.

2. 为什么引进对数概念？

对数的出现主要是因为对大数运算的需要. 历史上随着天文学的发展，需要运算一些很大的数，用常规的计算方式难以完成，所以，引进对数，使大数运算得以进行和简化.

3. 对数有哪些性质？

根据定义，我们可以得到：

(1) $\log_a 1=0$；(2) $\log_a a=1$；(3) $\log_a a^N=N$；(4) $a^{\log_a N}=N$.

(二) 训 练 篇

基础题例析

例 1 将下列指数式写成对数式：

(1) $7^2=49$；(2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}=49$；(3) $a^{x+y}=M+N$；(4) $(a+b)^x=2N$.

分析：定义一个新的概念后，利用定义本身是解决问题的主要方式.

解：(1) $\log_7 49=2$；(2) $\log_{\frac{1}{7}} 49=-2$；(3) $\log_a(M+N)=x+y$；(4) $\log_{(a+b)}(2N)=x$.

点评：当写下一个数学式子时，需要考虑写下的式子是否有歧义，式(3)中若不加括号则得到另外一个等式. 式(4)中不加括号虽不会导致歧义，但加了括号可以使别人阅读方便. 多加括号是表达数学的好习惯.

例 2 求下列各式的值：

(1) $\log_5 \frac{1}{25}$；(2) $\log_4 2$；(3) $\log_{100} 1000$；(4) $a^{\log_a N}$.

分析：利用定义.

解：(1) -2；(2) $\frac{1}{2}$；(3) $\frac{3}{2}$；(4) N.

点评：当看到对数 $\log_a N$ 时，需要问自己：a 的多少次方等于 N 呢？这个“多少”就是 $\log_a N$. 所以 $a^{\log_a N}=N$.

基础训练题

1. 对数表达式$\log_{(x-2)}(6-x)$中 x 的取值范围为__________.

2. 若$\log_{16}x=\dfrac{3}{4}$,则 $x=$ __________.

3. 若$\log_x 2=2$,则 $x=$ __________.

4. 用计算器计算:$\lg 7.1\approx$ __________; $\ln 7.1\approx$ __________.(精确到 0.01)

5. 下列各式中,有意义的是(　　).

(A) $\log_{(-3)}(-3)$　　(B) $\log_2 0$　　(C) $\log_{10}1$　　(D) $\log_1 2$

6. 解方程:$\log_2(\log_2(\log_2(x)))=0$.

能力题例析

求证:当 $0<N<1$ 时,$\lg N<0$;当 $N>1$ 时,$\lg N>0$.

分析:利用定义将问题转换为指数的问题.

解:设 $\lg N=x$,则$10^x=N$.

当 $0<N<1$ 时,假若 $x\geqslant 0$,则 $N=10^x\geqslant 1$,矛盾. 所以 $x<0$,即 $\lg N<0$.

当 $N>1$ 时,假若 $x\leqslant 0$,则 $N=10^x\leqslant 1$,矛盾. 所以 $x>0$,即 $\lg N>0$.

点评:论证中,不能由"当 $x<0$ 时,$N=10^x\in(0,1)$"而得到"当 $0<N<1$ 时,$x<0$". 因为逆命题和原命题未必等价.

能力训练题

1. 计算:$\log_{(2-\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})=$ __________; $3^{1+\log_3 5}=$ __________.

2. 若 $a^{bc}=N(a,b,c>0,a\neq 1)$,下列各式中错误的是(　　).

(A) $b=\log_{a^c}N$　　(B) $bc=\log_a N$　　(C) $b=\log_a N^{\frac{1}{c}}$　　(D) $c=\log_a N^b$

3. 已知集合$\{x,xy,\lg(xy)\}=\{0,|x|,y\}$,求实数 x,y 的值.

拓展题

求证:$\log_2 3$ 不是有理数.

4.4　对数的概念及其运算(2)

(一) 导　学　篇

问题驱动

1. 对数有哪些运算性质?

对数有以下运算性质:

如果 $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么：

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M$，其中 $n\in\mathbf{R}$.

2. 如何证明对数的运算性质？

这 3 条运算性质的证明都是回到对数的定义，由指数的运算性质得到，下面以证明(1)作为范例. 读者可尝试证明(2)和(3).

设 $m=\log_a M$，$n=\log_a N$，$x=\log_a(MN)$，则 $a^m=M$，$a^n=N$，$a^x=MN$.

所以 $a^x=MN=a^m a^n=a^{m+n}$. 由 $a>0$，$a\neq 1$ 以及指数函数的性质知，$x=m+n$.

即$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

（二）训　练　篇

基础题例析

例 1　用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示$\log_a\dfrac{x^2\sqrt[4]{z}}{y^3}$.

分析：套用对数运算性质即可.

解：$\log_a\dfrac{x^2\sqrt[4]{z}}{y^3}=\log_a(x^2\sqrt[4]{z})-\log_a(y^3)=\log_a(x^2)+\log_a(\sqrt[4]{z})-\log_a(y^3)=2\log_a x-3\log_a y+\dfrac{1}{4}\log_a z$.

点评：熟练之后可以减少解题中等号的数量.

例 2　下列由左边求右边的运算中，正确的有(　　).

(A) $\lg(n^2)=2\lg n$　　　　(B) $\ln a\cdot\ln b=\ln(a+b)$

(C) $\lg a-\lg b=\lg\dfrac{a}{b}$　　　　(D) $\lg(ab)=\lg a+\lg b$

分析：注意各等式左边和右边字母的范围的差异.

解：只有(C)选项正确. (A)选项反例为 $n=-1$，(B)选项反例为 $a=b=1$，(D)选项反例为 $a=b=-1$.

点评：使用公式时，要注意使得公式成立的未知数的范围. 例如，A选项只有在$n>0$的前提下，才能用公式 $\lg(n\cdot n)=\lg n+\lg n$，实际上，$\lg n^2=\lg|n|^2=2\lg|n|$.

基础训练题

1. 计算：$2\log_a 2+\log_a 3-\log_a 12=$ ________.

2. 计算：$\log_2 4+2\log_{12}2+\dfrac{1}{2}\log_{12}9=$ ________.

3. 计算：$(\log_6 2)^2+\log_6 2\cdot\log_6 3+\log_6 18=$ ________.

4. 如果关于 x 的方程$\lg^2 x+(\lg 2+\lg 3)\lg x+\lg 2\cdot\lg 3=0$ 的两个根为 x_1，x_2，则 x_1x_2 的值为(　　).

(A) $\lg 2\cdot\lg 3$　　(B) $-\lg 5$　　(C) $\dfrac{1}{6}$　　(D) 6

5. 已知$\log_a x+\log_a y=2$ ($a>0$，$a\neq 1$)，求$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值.

6. 已知 $2\lg\dfrac{x-y}{2}=\lg x+\lg y$，求 $\dfrac{x}{y}$ 的值.

能力题例析

计算：$\lg^2 2 \cdot \lg 250 + \lg^2 5 \cdot \lg 40$.

分析：将真数质因数分解，利用$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ 将原式转化为只含 lg2 与 lg5 的式子.

解：原式 $= \lg^2 2 \cdot \lg(5^3 \times 2) + \lg^2 5 \cdot \lg(5 \times 2^3) = \lg^2 2 \cdot (3\lg 5 + \lg 2) + \lg^2 5(\lg 5 + 3\lg 2)$

$= \lg^3 2 + 3\lg^2 2\lg 5 + 3\lg^2 5\lg 2 + \lg^3 5 = (\lg 2 + \lg 5)^3 = \lg^3(2 \times 5) = 1$

点评：解题过程中用到了 $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ 以及 $\lg 2 + \lg 5 = 1$，只有熟悉基础的等式才能从容地算更为复杂的式子.

能力训练题

1. 设 $a, b > 0$，化简：$a^{\lg b} \cdot b^{-\lg a} =$ __________.

2. 已知$\log_a(x^2+1) + \log_a(y^2+4) = \log_a 8 + \log_a x + \log_a y$，求$\log_8(xy)$的值.

3. 不相等的两个正数 a, b 满足 $a^{\lg(ax)} = b^{\lg(bx)}$，求$(ab)^{\lg(abx)}$ 的值.

拓展题

借助计算器以及常用对数，求 2^{100} 在十进制下共多少位.

4.4 对数的概念及其运算(3)

(一) 导 学 篇

问题驱动

对数的运算性质都是对同一底数 a 而言的，那么遇到一个式子中出现了不同底数的对数，该如何处理呢，这就需要用换底公式将它们换成同底的.

1. 什么是对数的换底公式？

换底公式是指：$\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$（其中 $a > 0$，$a \neq 1$；$b > 0$，$b \neq 1$；$N > 0$）.

2. 如何证明换底公式？

设$\log_b N = x$，则 $b^x = N$. 两边取以 a 为底的对数，得 $x\log_a b = \log_a N$.

因 $b > 0$，$b \neq 1$，$\log_a b \neq 0$，故两边可除以$\log_a b$，得 $x = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

也即，$\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

3. 由对数换底公式可以得到哪些有用的结论？

(1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ （其中 $a > 0$，$a \neq 1$；$b > 0$，$b \neq 1$）；

（2）$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$（其中 $a>0$，$a\neq 1$；$b>0$；$m\neq 0$）.

（二）训　练　篇

基础题例析

例 1　设 $a, b, c\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，求证：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$.

分析：等式左端有三个不同的底，利用换底公式换成同一个底.

解：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\dfrac{\lg b}{\lg a}\cdot\dfrac{\lg c}{\lg b}\cdot\dfrac{\lg a}{\lg c}=1$.

点评：也可以尝试换成其他的底，比如 a：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\log_a b\cdot\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\dfrac{\log_a a}{\log_a c}=1$.

例 2　已知 $3^x=12^y=8$，求 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ 的值.

分析：先用对数表示 x，y，利用对数运算性质求解.

解：$x=\log_3 8$，$y=\log_{12} 8$.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_3 8}-\frac{1}{\log_{12} 8}=\log_8 3-\log_8 12=\log_8\frac{1}{4}=\log_{2^3} 2^{-2}=-\frac{2}{3}.$$

点评：这道题本身不含对数，如果不通过对数求解需要一些技巧．我们利用对数进行求解，过程比较机械，表明对数是一种较好的计算工具.

基础训练题

1. 用计算器计算：$\log_2 3\approx$ ________.（精确到 0.001）.

2. 不用计算器计算下列各式：

（1）$\log_{\sqrt{2}}8-\log_{\sqrt{3}}9+2^{\log_{\sqrt{2}}3}$；

（2）$\log_4 3\cdot\log_9 32$；

（3）$2^{3\log_2 4}+3^{\log_2 1}-\log_2(8\log_2 16)$；

（4）$5^{\log_{\sqrt{5}}4+2\log_5 3}$；

（5）$5^{\log_{25}(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}-7^{\log_{49}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}$.

3. 化简：$(\log_2 3+\log_4 9+\cdots+\log_{2^n}3^n)\times\log_9\sqrt[n]{8}=$ __________.

4. 化简：$a^{\frac{\log_m a-\log_m b}{\log_m a}}=$ __________.

5. 已知 $\log_a x=2$，$\log_b x=3$，$\log_c x=4$，则 $\log_{(abc)}x=$ __________.

6. 设 x，y，z 都是正数，且 $3^x=4^y=6^z$，求证：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{z}$.

能力题例析

已知 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，试用 a、b 表示 $\log_{12}56$.

分析：选择一个底进行求解.

解：因为 $\log_2 3=a$，所以，$\log_3 2=\dfrac{1}{a}$.

$$\log_{42}56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{\log_3 7+1+\log_3 2}=\frac{\frac{3}{a}+b}{b+1+\frac{1}{a}}=\frac{3+ab}{ab+a+1}.$$

点评：参考解答中以 3 为底进行求解，实际上换成任何一个底都是可行的.

能力训练题

1. 已知 $\log_6 27=a$，用 a 表示$\log_{18}16$.

2. 已知$\log_{15}2=a$，$3^b=5$，试用 a，b 表示$\log_{125}18$.

3. 已知 a，b，c 顺次是直角三角形的两条直角边和斜边的长且 $b+c$，$c-b\neq 1$. 求证：
$\log_{(b+c)}a+\log_{(c-b)}a=2\log_{(b+c)}a\cdot\log_{(c-b)}a$.

拓展题

一个正数的常用对数，都可以写成一个整数加上一个正的纯小数（或者零）的形式，其中整数部分叫做常用对数的首数，小数（或者零）部分叫做常用对数的尾数. 那么，lg 2010 的首数是多少？尾数是多少？

4.5 反函数的概念(1)

（一）导 学 篇

问题驱动

1. 什么是反函数？

一般地，对于函数 $y=f(x)$，设它的定义域为 D，值域为 A. 如果对于 A 中任意一个值 y，在 D 中总有唯一确定的 x 值与它对应，使 $y=f(x)$，这样得到的 x 关于 y 的函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 在习惯上，自变量常用 x 表示，而函数用 y 表示，所以把它改写成 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in A)$.

由上面的定义可以得到以下性质：

(1) 反函数的定义域是原来函数的值域，反函数的值域是原来函数的定义域.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 A，若 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，则 $f^{-1}(f(x))=x$，

$x \in D$；$f(f^{-1}(x)) = x$，$x \in A$.

(3) 如果函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$，那么函数 $y = f^{-1}(x)$ 的反函数为 $y = f(x)$，即它们互为反函数.

2. 哪些函数有反函数？

由定义"如果对 A 中任意一个值 y，在 D 中总有唯一确定的 x 值与它对应"中可以知道，只有当一个函数的自变量和因变量是一一对应的时候，此函数才有反函数.

3. 如何求反函数？

根据反函数的定义，求一个函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的反函数，有以下几个步骤：

首先，求出该函数的值域 A；其次，由 $y = f(x)$ 解出 x，即用 y 表示 x，如写成 $x = g(y)$；最后，按习惯写法将 x，y 互换，则 $y = g(x)$ $(x \in A)$ 是函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的反函数.

（二）训　练　篇

基础题例析

例 1　求下列函数的反函数：(1) $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$；(2) $y = \frac{2x-1}{x+1}$；(3) $y = x^2 + 1$ $(x < 0)$.

分析：求反函数的步骤：求原函数值域→求出 x 关于 y 的关系式→将 x 与 y 互换，得到反函数.

解：(1) 原函数值域为 $\mathbf{R}$. 由 $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$，得 $x = \sqrt[3]{2(y+1)}$，将 x 与 y 互换，得反函数是 $y = \sqrt[3]{2(x+1)}$，$x \in \mathbf{R}$；

(2) 由 $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$，得原函数值域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$，$x = \frac{1+y}{2-y}$，将 x 与 y 互换，得反函数是 $y = \frac{1+x}{2-x}$，$x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$；

(3) 原函数值域为 $(1, +\infty)$，由 $y = x^2 + 1$ $(x < 0)$，得 $x = -\sqrt{y-1}$，将 x 与 y 互换，得反函数是 $y = -\sqrt{x-1}$，$x \in (1, +\infty)$.

点评：求反函数时不能忘记求反函数的定义域.

例 2　$y = \frac{x}{2}$ $(x \in \mathbf{Z})$，$y = 2x$ $(x \in \mathbf{Z})$ 是否互为反函数？

分析：判断两个函数是否互为反函数，不但要看解析式，还要看定义域与值域.

解：不是. 因为 $y = \frac{x}{2}(x \in \mathbf{Z})$ 的值域与 $y = 2x$ $(x \in \mathbf{Z})$ 的定义域不相同.

点评：理解函数不能单单从解析式的角度考虑.

基础训练题

1. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ $(x \in (-\infty, 1])$ 的反函数的定义域为________.

2. 函数 $y = \frac{1+x}{1-x}$ 的反函数为________.

3. 函数 $y = x^2 + 2x$ $(x \in \mathbf{R}^+)$ 的反函数为________.

4. 若幂函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f^{-1}(1) \cdot f^{-1}(-1) =$________.

5. 已知函数 $y = \frac{1}{3}x + m$ 与 $y = nx - 6$ 互为反函数，则 $m + n =$________.

6. 求函数 $y = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbf{R}^+, \\ x-1, & x \in \mathbf{R}^- \end{cases}$ 的反函数.

能力题例析

若定义域为 $(-\infty, 0]$ 的函数 $y = f(x)$ 满足关系式 $f(x-1) = x^2 - 2x$，求 $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值.