中央广播电视大学经济类

微积分学习指导

黄国钧等 编

河南广播电视大学郑州分校

编 者 的 话

《中央广播电视大学经济类"微积分"学习指导》是根据中央电大经济类微积分课程教学大纲以及今年六月中央电大召开经济类专业教学准备工作会议上担任"微积分"主讲的刘书田同志对开设这门课 程的总 体设想、教材 处理、重点、具体要求的讲话精神来编写的。

本书共分三部分，(一)需要说明的问题、具体要求，收录了刘书田同志讲话的详细内容；(二)教材体系与结构分析以及作为本书主体(三)各节重点难点分析。在第三部分中，我们在各章教材体系与结构分析的基础上，进一步对每节教材的重点与难点进行了详细地分析，提出突破难点的关键，掌握重点的方法。为保持本书系统性，对易于为学生接受的内容仅简略提及。安排了为数不多的例题，先是列出主要题型配以典型解法以阐明解题规律，旨在介绍基本的解题方法。

在编写中为了紧扣大纲，力求全面准确地贯彻主讲老师意图，曾与中央电大"微积分"课程责任老师郭星英同志以及刘书田同志广泛而又深入地交换了意见，并请他们对本书部分章节进行审阅。本书能与读者见面是与他们对我们的大力支持，肯定与热情帮助分不开的，借此机会谨向他们表示衷心的感谢！

本书由黄国钧同志主编。参加编写的还有徐艳鹏、阎道轩两同志。由于成书仓促、限于编者水平，本书难免有不妥之处，恳请读者指正。

编者一九八三、九于郑州

目　　录

第一章 函数

（一）需要说明的问题 具体要求

（Ⅰ） 需要说明的问题

（1）集 合

第一章的第一部分内容是集合，之所以介绍集合，有两个目的：

1° 这本教材定义函数是从集合来定义的，从教材本身，要求先讲集合。

2° 在后继课程中，要用到集合的概念。

2、函数定义

这本教材是讲了集合以后，定义笛卡尔乘积，然后定义关系，把函数关系作为关系的一个特例给出的。它的意图是让学生能够深刻地理解函数概念的实质。但考虑到如果按照书中的程序讲，我们的学生可能不易接受，在讲课时，就把第三节关系这部分内容删去，直接定义了函数。这样，在后边讲反函数定义、复合函数定义时，与书中说法不一致。在阅读教材时，第三节可以不看，第四节可以参阅。

（Ⅱ）具体要求

第一章的重点是函数概念，根据这个重点，具体要求如下：

（1）集合

掌握集合、子集、空集、全集、并集、交集、差集、补集的概念及符号，并能正确运用有关术语。关于集合的运算律及集合的恒等式的证明，只要求学生理解就可以了。

（2）掌握实数绝对值的定义及其性质，能运用绝对值不等式和用区间表示实数集及其子集。绝对值这部分要求必须掌握。

（3）深刻理解函数概念，要求学生：

1° 理解函数的三个要素：对应规律、定义域、值域、正确运用函数符号$y=f(x)$，理解符号的意义及用法。

2° 理解反函数的定义，以及掌握由已知函数确定其反函数的方法。

3° 理解复合函数的定义，熟练掌握把一个函数拆成由几个简单函数复合而成的形式。

4° 深刻理解分段函数的定义。（这点要特别强调，因在经济现象中，给出的函数关系经常是分段函数）。

5° 由简单的实际问题，会建立函数的解析式。（书中第一章的第五节专门举了三个例题，都是经济方面的，特别是第二个例题，是重点例题）。

（4）理解函数的简单性质。（此处讲了函数的奇偶性、周期性、单调增减性和有界性，不要求学生会证明，只要求理解即可）。

（5）熟记基本初等函数的解析式及其图形，理解初等函数的结构。

（6）由基本初等函数的图形，做出某些函数的图形。（这一部分内容，在讲课的过程中，补讲了平移、对称等，因为很多

经济书籍，往往用图形来表达量和量之间的关系。通过这一章的学习，让学生能够把图形和函数的概念紧密结合起来。

（二）教材体系与结构分析

本章先讲一些关于集合的知识，它们包括由两个集间种种关系而导出的集合（子集、交集、并集、差集、补集等）概念；从及从一个集合中元素到另一个集合中元素“单值对应”关系，用这些引入了函数概念；规定了函数“定义域”，“值域”和“对应规律”的含义而给出函数的精确定义，定义突出了函数三要素，也就是说，函数概念涉及两个集合，即定义域（集合）与值域（集合），而对应关系则是从定义域（集合）到值域（集合）的“单值对应”，接着对“单值对应”再加以限制，就规定出一个集合到另一个集合的“一一对应”，由此导出一个函数的反函数概念，并可以看出函数和它的反函数，实际上是定义域与值域互换，对应关系逆转的两个不同函数。本章结构用框图表示是

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{函数定义}} \arrow[r] & \boxed{\text{反函数定义}} \\
\boxed{\text{集合，单值对应}} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{\text{一一对应}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

（三）各节重点难点分析

§1·1 集合

本章介绍了集合的一些最基本知识，重点是由两个集合间种种关系而导入的集合（子、交、并、补、余）的概念，难点是集合结构式表示法。

集合在原教材中作用是重要的，因为作者试图以集合为基础，导入抽象的“关系”，再将“对应”作为“关系”特例提出，然后又对“对应”加上更多限制，建立起“一一对应”概念，最终地完成函数，反函数定义现代化的，精确定义。但是主讲教师对教材作出新的处理后，“集合”的重要性将大为削弱，所以在本章中，“集合”不是重点。

（Ⅰ）集合的概念

（1）集合的描述性定义。“集合是具有某种属性事物的全体，或是按某一法则进行研究的对象的全体。构成集合的事物或对象，称为集合的元素。”（见教材 P 1 第 7 行—第 9 行）

1^{0} 集合定义是描述性的。严格说集合是不加定义的原始概念。课中仅给予以描述性说明。因为在描述性定义中，用到了“全体”这个概念，而就“全体”而言，我们并没有给出任何定义。对于集合，我们只可能对它进行描述或说明，借以阐明集合的某些要素，特性，从而加深对集合的理解。

2^{0} 集合三要素。从集合描述性的说明看出，一个集合应当有“事物”或“对象”这是一个“个体”概念，随之而来的“全体”概念，而且“事物”（个体）应当具有某种属性。个体、具有某种属性的个体，全体构成了集合三要素。集合中的元素“应当具有某种属性”虽然在教材中没有进一步阐述，但是对每一个具体的集合，元素应当具有某种属性是容易理解的，例如两头牛与三张桌子的全体将不认为是一

个集合。因为“牛”“桌子”是完全不相同的两个概念，很难说它们具有某些共同的属性。

（2）集合的特性

1° 确定性。虽然集合是一个不加定义的原始概念，但它具有确定性，即对于任何一个给定的集合，集合中的元素应当是完全确定的。或者说，对任何一个事物或对象，这只能是或者不是某一个集合中的元素。这种性质叫做集合的确定性。这就表明，给出了一个集合就相当于给出了一个明确的判断准则，由它可以判别任何一个对象是不是在这个集合内。例如，分子是偶数的分数全体，就不是一个集合，因为它没有给出一个准则判定分数$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$是不是属于“分子是偶数分数全体”里。

2°互异性。它表明集合中任何两个元素应当是互不相同的。例如$\frac{1}{2}$，1，1，就组不成一个集合。

3° 无序性。即改变集合中元素排列的次序，将不会产生新的集合。例如$\{a,b,c,d\}$与$\{d,c,b,a\}$表示同一集合。

（Ⅱ）**集合表示法，集合表示法见教材P2（二）**

（1）列举法。见教材$P2$（二）（1）。列举法比较简单。只要按不重，不漏原则列出集合所有元素即可。列举法多适用于有限集。若是无限集，要列出集合中全部元素显然是不可能的。因此对无限集表示要寻求其它的方法。

（2）构造式法，构造式法见教材 $P2$，11行—13行。

1° 不是每一个集合都可以用构造式法表示。用构造式法表示集合是有一定条件的。即集合中元素α一定得找到与

α有关的条件$P(\alpha)$。在教材中的记号“$P(\alpha)$”在具体集合中往往是借助方程、不等式等分析表达式表达出来。例如集合$A=\{x|x^2-5x+6=0\}$中与x相联系的条件是用x的方程$x^2-5x+6=0$的根来表示$P(x)$的。而集合$A=\{x|x=2n, n\in N\}$中的$P(x)$则是用等式$x=2n$，$n\in N$表示的。

但是，并不是在每一个无限集合中，其元素都能找到与之相关的条件或法则的。在这种情况下此集合则不能够用构造式表示。例如，素数是无限的，因此素数全体是一个无限集。但讫今为止，我们还没有能够找到一个表示素数的统一公式。因此，用构造式法表示素数全体这一集合至少在目前是不可能的。

2° 用构造式法表示集合的关键是寻找描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素规律的$P(\alpha)$。

例 1 试用构造式法表示圆心在坐标原点半径分别为$r<R$两个同心圆所构成圆环内部点的集合。

这个集合中元素用$M(x,y)$表示。此处x,y分别表示点M的横坐标与纵坐标。其次应当找出点(x,y)的公共属性或规律。

$$r<\overline{OM}<R$$

由于$\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$，从而$r<\sqrt{x^2+y^2}<R$

或者 $r^2<x^2+y^2<R^2$

于是 $A=\{M(x,y)|r^2<x^2+y^2<R^2;\ x,y\in \mathbf{R}\}$。

（Ⅲ）两个集合间种种关系

（1）今后将把一个集合当作崭新的也是抽象的对象加以研究，至于集合中元素具体特性是什么暂时不加考虑。我们关心的是集合作为新的研究对象，它们之间有什么关系，

给出两个集合是否按照某种法则导出第三个集合等。应当指出这种处理数学对象的方法并不是什么新的东西，以小孩子学习算术为例。小朋友在父母指导下学数数1，2，3，…这里开始接触到自然数（数学对象）后，立即研究自然数之间的关系(顺序关系)，1后面是2，2后面是3…这意味着$1<2<3<\cdots$，小孩子生活是十分丰富的，生活经验告诉他们，一个苹果与二个苹果是不一样的。于是潜移默化地建立起自然数相等与不等的关系。接着小孩又会在父母诱导下领悟1个苹果与2个苹果放在一起是3个苹果的事实，从而得出$1+2=3$的结论来。这实质是对两个自然数1，2经某种结合（通常叫加法）而产生出第三个自然数3。

两个集合间的关系大体分两种

包含关系：$A\subset B\Longleftrightarrow \forall x\in A\Rightarrow x\in B$。（“$\forall$”表示对任意的）此时$A$叫$B$的子集（见教材$P$1、17—20行）

运算关系（又叫结合关系）：在一般情况下两个集合经结合后可导出第三个集合。（见教材）**P 3 定义**1，3、1,4、1,5、1,6，其中$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$

$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$

$A-B=\{x\mid x\in A但x\overline{\in}B\}$　$A'=U-A$。

（2）本章中出现较多记号：$\in$、$\overline{\in}$、$\subset$、$\cup$、$\cap$、—、$'$，应当区别它们不同含义，$\in$、$\overline{\in}$是表示对象与整体的关系；$\subset$是表示两个集合间包含关系，由此引出子集概念。而$\cup$、$\cap$、—、$'$是表示两个集合中的结合关系，通过不同形式的结合，分别得出称之为并、交、差、补集的第三个集合来。

定义两个集合间种种运算关系后，很自然要研究这些运算所满足的算律。（见教材P6(六)），由于本课程对此并

不强调，故不赘述。

（Ⅳ）特殊集合空集φ与全集

（1）在讲到集合三个要素时，曾讲到个体与整体问题，一个集合（全体）中总得有属于它的元素（个体），但是，这是指通常情况而言。一个集合应有元素这个条件是重要的，但并不是不可缺少的，当一个集合不包含任何一个元素时，我们仍然将它看作一个集合，并起了一个名子叫空集记为φ，从集合描述性定义来看似乎空集不是集合，而研究空集也没有多少价值，但是事实并非如此。首先空集概念并非人们主观臆造的，而是客观存在的某些事物在人们头脑中的反映。例如研究方程解的集合时，常常会碰到无解情况，或者说解集合不含任何元素，由此引出解集是空集概念来。其次引入空集并以φ表示，今后某些命题、定理、若干数学结论叙述变得简洁，更具有普遍意义。例如方程$f(x)=o$的解集合来说，引入空集后，便可以说它的解集合总是存在的。在有解情况下这是一个很显然的事实，在无解情况下，其解集也是存在的，不过是空集φ罢了。

在学习空集这个概念时，常常误以为$\{\varphi\}=\varphi$。其实$\{\varphi\}$内包含一个元素φ，虽然φ内不含任何元素，但是φ总是集合，它并不因为φ内没有元素而不是集合，从而$\{\varphi\}$不是空集即$\{\varphi\}\neq\varphi$。

（2）与空集相对立的是全集。与空集相反，它是包含所研究事物中任何一个的集合。全集具体会有什么样的元素与所研究的事物有关。例如，若在复数范围内研究方程的根，则U是复数集。

（Ⅴ）**例题分析**

本节对集合所提出的要求确定应掌握的题型如下：

（1）应当清楚符号$\in$、$\overline{\in}$、$\subset$、$\cup$、$\cap$，—所表示的含义；理解两个特殊集合ϕ、U的意义。这方面例题见教材P34习题一题5，12。

（2）由给定两个集合A，B求出$A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$。这方面例题见教材P34习题—习题6，7，8，9，10。

现在补充几个例子。

例1 指出0与$\{0\}$，ϕ的联系与区别。

解0表示数0，$\{0\}$表示仅有一个元素0的集合，而ϕ是空集；

$$0\in\{0\} \qquad \phi\subset\{0\}.$$

例2 已知$A=\{(x,y)\mid x+2y=5\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x-y=3\}$.求$A\cap B$并说明其几何意义。

解 $$A\cap B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x+2y=5\\2x-y=3\end{cases}\right\}=\left\{\left(\frac{11}{5},\ \frac{7}{5}\right)\right\}$$

$A\cap B$表示直线$x+2y=5$与直线$2x-y=3$的交点。

§1.2**实数集**

（Ⅰ）**实数连续性**。在有了一些集合初步知识后，实数集作为集合中的一种而引入。实数理论之所以成为微积分学的基础是因为它具备《连续性》，即教材中所说的“实数充满了数轴而没空隙”，或者说“每一个实数必是数轴上某一个点的坐标，反之数轴上每一个点的坐标必是一个实数”，这就是讲，全体实数与数轴上点的集合形成一一对应关系。由于这个原故，教材上对实数与它代表的点不加区别，视需

要方便有时把实数x叫做点x，有时则又称为数x。

本节的重点是绝对值的定义及其性质，难点是运用绝对值不等式和用区间来表示实数集及其子集。

（Ⅱ）绝对值与区间

（1）绝对值定义及其性质见教材$P10$定义1.7以及$P10$—11性质(1)～(10)。这里特别应强调一下的是绝对值的几何解释："$|x|$表示数轴上的点x(不论x在原点左边还是右边）与原点之间的距离。"理解绝对值的几何意义可以帮助我们理解与掌握绝对值的性质(1)～(6)。至于性质(9)(10)由定义1.7即得，剩下的性质(7)、(8)可由性质(4)、(5)推出。以(6)为例：若$b>0$，则

$\{x\mid|x|>b\}=\{x\mid x<-b\}\cup\{x\mid x>b\}$

从几何上看，$|x|>b(b>0)$表示所有与原点的距离大于b的点x的集合，因此这些点x落在数轴上点b的右边$\{x|x<b\}$或者落在数轴上点$-b$的左边($\{x|x<-b\}$)（图1），所以有

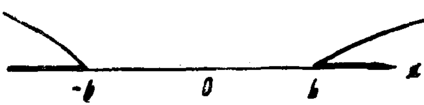

图 1

$\{x\mid|x|>b\}=\{x\mid x<-b\}\cup\{x\mid x>b\}$。

应用绝对值的几何解释还能够迅速地帮助我们求解某些绝对值不等式。

例如　解不等式　　$1<|x-2|<3$

从几何上看，点$x-2$与原点距离大于1而小于3因此点

图　2

$x-2$应落在数轴上点1右边和点3左边（$1<x-2<3$）或者落在点-3右边与点-1左边（$-3<x-2<-1$），分别解不等式

$1<x-2<3$　和$-3<x-2<-1$

得　$3<x<5$　或者　$-1<x<1$，即

$\{x\,|1<|x-2|<3\}=(3,5)\cup(-1,1)$

（2）运用绝对值不等式与区间表示实数集及其子集时，首先应熟记几个最基本的用绝对值表示实数集及其子集的公式：

$\{x|\,|x|<a\}=\{x\,|-a<x<a\}$

$\{x|\,|x|>b\}=\{x|\,x>b\}\cup\{x\,|x<-b\}$　　$(b>0)$

以及用区间表示实数集及其子集的基本类型（见教材$P12\sim13$（1）～（6））。而微积分中常见实数集的子集则是上述几种类型的集合经相应运算得出的。

例1　解不等式　　$0<(x-2)^2<4$。

分析：不等式$0<(x-2)^2<4$的解集是实数集R的子集：

$$\{x|\,0<(x-2)^2<4\}\subset R\ .$$

现在问题是这个子集是否能用区间表示出来，如能用区间表示出来，应该如何来表示。

将原不等式改写为

$0<|x-2|^2<4$ （$\because (x-2)^2=|x-2|^2$）

$\therefore$ $0<|x-2|<2$ （若$a^2<b^2$，且$a>0,b>0$，则$a<b$）

$-2<x-2<2$ （性质(5)）

且$x-2\neq 0$ （$\because 0<|x-2|$）

于是 $0<x<4$，且$x\neq 2$ （若$a<b$则$a+c<b+c$）

从而 $\{x|0<(x-2)^2<4\}=(0,2)\cup(2,4)$.

例 2 用区间表示满足不等式$|x-a|<\varepsilon$（a为常数，$\varepsilon>0$）的所有x的集合。

解 $\because$ $|x-a|<\varepsilon$

$\therefore$ $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$ （性质(5)）

于是 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$

从而 $\{x||x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

（3）在本教材中，解不等式常常用到以下几种不等式的性质与公式：

1^0 $a>b$, $\Longrightarrow a+c>b+c$, $\forall c$;

2^0 $a>b$, $c>o\Longrightarrow ac>bc$; $a>b$, $c<o$ $\Longrightarrow ac<bc$;

3^0 $a>b$，且$a>o$，$b>o\Longrightarrow a^2>b^2$;

4^0 $a>b$且$a>o$，$b>o\Longrightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$;

5^0 $|x|<a\Longleftrightarrow -a<x<a$;

6^0 $|x|>b$（$b>o$）则$x>b$或$x<-b$.

（Ⅲ）邻域

（1） $\{x||x-x_0|<\delta,\delta>o\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$\{x|o<|x-x_0|<\delta,\delta>o\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$