湖北省高师院校大学生
数学竞赛试题与解答

（1989——1991）

一九九二年元月

一九八九年湖北省师范专业

大学生数学竞赛试题

（1989年5月21日）

第 一 部 分

一、填空

1 （3分） $\int_e^{e^2}\frac{dx}{xLnx}=$______

2 （5分） $\underset{x\to 0}{Lim}(\cos)^{\frac{1}{x^2}}=$______

3 （5分） 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $ad-bc=1$

则 $A^{-1}=$______

4 （5分） $\lambda-$矩阵 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{vmatrix}$

的标准形为______．

5 （5分） 二平面 $x-\sqrt{3}y-5=0$ 和 $-\sqrt{3}x+y-\sqrt{2}z+1=0$ 所成的锐角 $\theta=$______．

6 （5分） 已知空间的点 $P(1,\ -2,\ 3)$ 和直线 L：

$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$，在直线$L$上求一点$Q$，使线段$PQ$最短，则$Q$点的坐标为________.

二）（4分） 设多项式$g_1(x)=1, g_{i+1}(x)=1-xg_i(x)$，求$F(x)=1+g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_{1989}(x)$的系数和。

三、（5分） 设$F(x)=x^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{7}$，$n$是自然数，在区间$(n, n+1)$内，求使函数值取整数值的$x$的个数。

四 （5分） 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是一组正整数，令$N=max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，设$b_k$为$a_i(i=1, 2, \cdots, n)$中不超过$k$的个数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{k=1}^{N} b_k=n(N+1).$$

五 （5分） 设二次方程$x^2-ax+b=0$与$x^2-bx+a=0$都有不相等的正整数根，求a和b。

六 （5分） 设S是一些n阶方阵组成的集合，对任意A，$B\in S$，有$AB\in S$，$(AB)^3=BA$，求证，S满足交换律.

七 （8分） 设函数$F(x)$在$[0, \infty)$上有定义且可导，又对一切$x\geqslant 0$下列不等式成立：

$$|F(x)|\leq 10,\ F(x)F'(x)\geqslant sinx.$$

证明：极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$不存在.

第二部分

一 （6分）计算：$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(tgx)^{\sqrt{3}}}$.

二（10分）设$F(x)$是区间I上的二次可微函数记

$M_0=\sup\limits_{x\in I}|F(x)|$，$M_1=\sup\limits_{x\in I}|F'(x)|$，$M_2=\sup\limits_{x\in I}|F''(x)|$。

（1）证明，如果$I=[-a,\ a]$，则$|F'(x)|\leq \frac{M_0}{a}+\frac{x^2+a^2}{2a}M_2$

（2）证明，如果$I=(-\infty,\ +\infty)$，则$M_1\leq\sqrt{2M_0M_2}$

三（7分）设$A=(a_{ij})$为n阶分块实对称阵，对角块A_{ii}是n_i阶方阵，$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，$B=(b_{ij})$是k阶方阵，$b_{ij}=A_{ij}$的所有元素之和，证明：B是正定的。

四（7分）数域F上$2n$个次数不大于$n-1$的多项式

$f_i(x)=a_{i1}+a_{i2}x+\cdots+a_{in}x^{n-1}$

$g_j(x)=b_{j1}+b_{j2}x+\cdots+b_{jn}x^{n-1}$

$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$ $\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$

证明：存在多项式组$\{f_i\}$到$\{g_i\}$的一个满射σ，使任意F上的一个$n-1$次多项式，都可以写成$\sigma(f_1(x))$，$\sigma(f_2(x))$，$\cdots$，$\sigma(f_r(x))$，$f_{r+1}(x)$，$\cdots f_n(x)$　$(r=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的线性组合。

五（10分）圆上任意n点$(n\geq 6)$，每两点连一线段，其中任意三条在圆内都不共点，求这些线段相交成（顶点在圆内或圆上）的三角形的个数。

六 (10分)在$\triangle ABC$中，$\angle C = AC$，三边上的高分别为h_a，h_b，h_c，P为形内一点，且到三边的距离分别为d_a，d_b，d_c，如果$d_a + d_b + d_c = \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)$，求点$P$的集合。

七 (10分)若n盏电灯各被一个开关单独控制，开关按自然顺序从1到n编号，现对开关作如下m次操作；T_1，T_2，…，T_m，第j次操作记为T_i，它表示对第i号开关$(1 \leq i \leq n)$，若操作号j与开关号i互素，即$(j, i) = 1$，就把第i号开关拉一下，如操作T_1有$(1, i) = 1$，$i = 1, 2, \cdots n$就将全部开关都拉一下，若

$n = 1989 (= 3^2 \times 13 \times 17)$且$n$个灯泡的初始状态都是亮开

试问：

(1) 当$m = 1989$时，编号为100及1989的灯泡是亮开还是熄灭？

(2) 是否存在一个自然数m_1 $(m_1 > 0)$，经过m_1次操作后，全部灯泡都亮着？证明你的结论。

(3) 是否存在一个自然数m_2 $(m_2 > 1)$，经过m_2次操作，全部灯泡都熄灭？证明你的结论。

一九八九年湖北省师范专业大学生数学竞赛试题解答

（1989年5月21日）

第一部分

一 填空：

1 $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{xLnx}=\underline{Ln2}$。

2 $\lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{x^2}}=\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$

3 设 $A=\begin{pmatrix} d & b \\ c & d\end{pmatrix}$，$ad-bc=1$则

$A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a\end{pmatrix}}$.

4 λ-矩阵 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{vmatrix}$ 的标准形

为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$

5　二平面$x-\sqrt{3}y-5=0$和$-\sqrt{3}x+y-\sqrt{2}z+1=0$所成的锐角$\theta=\frac{\pi}{4}$。

6　已知空间的点$P(1,\ -2,\ 3)$和直线L：

$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$，在直线$L$上求一点$Q$，使线段$PQ$最短，则$Q$点的坐标为$\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.

二　设多项式$g_1(x)=1$，$g_{i+1}(x)=1-xg_i(x)$，求$F(x)=1+g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_{1989}(x)$的系数的和。

解：$F(x)$的系数之和$=F(1)$

$\because g_1(1)=1\qquad g_2(1)=0\cdots g_{2n-1}(1)=1\qquad g_{2n}(1)=0$

$\therefore F(1)=1+g_1(1)+g_2(1)+\cdots+g_{1989}(1)=996$

三　设$F(x)=x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{7}$，$n$是自然数，在区间$(n,\ n+1)$内，求使函数值取整数值的$x$的个数。

解：函数$y=F(x)$的图象为开口向上的抛物线，在$x=\frac{\sqrt{3}}{4}$时，函数取得极小值，故函数$F(x)$在$(\frac{\sqrt{3}}{4},\ +\infty)$内单调上升，因此，在$(\frac{\sqrt{3}}{4},\ +\infty)$内函数取某一整数的$x$只有一个。

这样，在$(n,\ n+1)$内使函数值取整数值的x的个数为

$[F(n+1)-F(n)]=[(n+1)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}(n+1)+\sqrt{7}-n^2+\frac{\sqrt{3}}{2}n-\sqrt{7}]=[2n+1-\frac{\sqrt{3}}{2}]=2n$,

四　设a_1，a_2，…，a_k是一组正整数，令$N=max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，设$b_k$为$a_i(i=1, 2, \cdots n)$中不超过$k$的个数，

证明：$\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{k=1}^{N} b_k=n(N+1)$.

四　证明：不妨设$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n=N$

我们有
$$b_k=\begin{cases} 0 & (k<a_1) \\ 1 & (a_1\leq k\leq a_2) \\ 2 & (a_2\leq k\leq a_3) \\ \vdots & \vdots \\ n-1 & (a_{n-1}\leq k<a_n) \\ n & (k=a_n) \end{cases}$$

于是 $\sum_{k=1}^{N} b_k=\sum_{k=1}^{a_n} b_k=0(a_1-1)+1\cdot(a_2-a_1)+$

$2\cdot(a_3-a_2)+\cdots+(n-1)(a_n-a_{n-1})+n$

$=(n-1)a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-\cdots-a_2-a_1+n$

$=n+na_n-\sum_{i=1}^{n} a_i$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{k=1}^{N} b_k=n+na_n=n(a_n+1)$

$=n(N+1)$.

五　设二次方程$x^2-ax+b=0$与$x^2-bx+a=0$都有不相等的正整数根，求a和b。

解：设$x^2-ax+b=0$的两根为α，β且$\alpha>\beta$；

$x^2-bx+a=0$的两根为γ，δ，且$\gamma>\delta$，则

$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$，$\gamma+\delta=b$，$\gamma\delta=a$

于是

$$a-b=1-(\alpha-1)(\beta-1)=(\quad-1)(\delta-1)-1$$

(1)当$a>b$时，则$(\alpha-1)(\beta-1)<1$，于是$\beta=1$，从而$a-b=1$，这样可得$(\gamma-1)(\delta-1)=2$，从而$\gamma=3$，$\delta=2$，因此，$a=6$，$b=5$

(2)当$a<b$时，用同法可得$a=5$，$b=6$.

(3)当$a=b$时，方程没有不相等的正整数解.

六　设S是一些n阶方阵组成的集合，对任意A，$B\in S$，有$AB\in S$，$(AB)^3=BA$

求证：S满足交换律

证明：$\forall\ A$，$B\in S$，$(AB)^3\in S$

$$((AB)^3)^3=(BA)^3=AB$$

另一方面

$$((AB)^3)^3=((AB)(AB)^2)^3=(AB)^2(AB)=(AB)^3=BA$$

$\therefore AB=BA$.

七　设函数$F(x)$在$[0,+\infty)$上有定义且可导，又对一切$x\geqslant 0$下列不等式成立：

$$|F(x)|\leq 10,\quad F(x)F'(x)\geq \sin x$$

证明：极限$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$不存在

证：假设$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$存在.

令$f(x)=\dfrac{(F(x))^2}{2}+\cos x$，则

$$f'(x)=F(x)F'(x)-\sin x\geq 0\text{又}$$

$$|f(x)|\leq\left|\frac{(F(x))^2}{2}\right|+|\cos x|<\frac{100}{2}+1=51$$

故函数$f(x)$递增且有上界，因此，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在

那时$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{(F(x))^2}{2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x))^2$

也应该存在，但是，我们知道，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})=0$。因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$不存在，这

样就导出了矛盾，故$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$不存在。

第 二 部 分

一 计算：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{1+(ctgx)^{\sqrt{3}}}$

解：令$x=\dfrac{\pi}{2}-u$，则$dx=-du$，于是

$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\dfrac{du}{1+(tgu)^{\sqrt{3}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(ctgu)^{\sqrt{3}}}{1+(ctgu)^{\sqrt{3}}}du$ 这样一来

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(ctgx)^{\sqrt{3}}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(ctgx)^{\sqrt{3}}}{1+(ctgx)^{\sqrt{3}}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+(ctgx)^{\sqrt{3}}}{1+(ctgx)^{\sqrt{3}}}dx$$

$\therefore I=\frac{\pi}{4}$

二、设$F(x)$是区间I上的二次可微函数，记$M_0=\sup\limits_{x\in I}|F(x)|$，$M_1=\sup\limits_{x\in I}|F'(x)|$，$M_2=\sup\limits_{x\in I}|F''(x)|$。

（1）证明，如果$I=[-a,a]$，则$|F'(x)|\leq\frac{M_0}{a}+\frac{x^2+a^2}{2a}M_2$。

（2）证明，如果$I=(-\infty,+\infty)$，则$M_1\leq\sqrt{2M_0M_2}$。

证明：(1)利用泰勒公式，得

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-x)^2\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$f(-a)=f(x)+f'(x)(-a-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(-a-x)^2\cdots\cdots ②$$

其中x是区间I中，任一固定的数，且$x<\xi_1<a$，$-a<\xi_2<x$。

①－②，得

$$f(a)-f(-a)=2af'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(a+x)^2$$

$$\therefore f'(x)=\frac{f(a)-f(-a)}{2a}+\frac{f''(\xi_2)}{4a}(a+x)^2-\frac{f''(\xi_1)}{4a}(a-x)^2$$

由此，得

$$|f'(x)|\leq\frac{2M_0}{2a}+\frac{M_2}{4a}\left[(a+x)^2+(a-x)^2\right]$$

$$=\frac{M_0}{a}+\frac{M_2}{4a}(2a^2+2x^2)=\frac{M_0}{a}+\frac{x^2+a^2}{2a}M_2。$$

（2）$\forall h\in(-\infty,+\infty)$，利用泰勒公式得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)h^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)h^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

其中ξ_1在x与$x+h$之间，ξ_2在x与$x-h$之间

③－④，得

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}\left[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right]$$

$$\therefore 2f'(x)h\leq 2M_0+M_2h^2 \qquad (\forall h\in(-\infty,\ +\infty))$$

关于h的二次不等式

$$M_2h^2-2f'(x)h+2M_0\geq 0$$

由于$M_2>0$，所以判别式$\triangle\leq 0$由此得

$$[-2f'(x)]^2-4\cdot 2M_0\cdot M_2\leq 0$$

$$(f'(x))^2\leq 2M_0M_2$$

$$\therefore |f'(x)|\leq\sqrt{2M_0M_2}$$

由此推得：

$$M_1=\sup_{x\in I}|f'(x)|\leq\sqrt{2M_0M_2}$$

三、设$A=(a_{ij})$为n阶分块实对称阵，对角块A_{ii}是n_i阶方阵，$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，$B=(b_{ij})$是k阶方阵，$b_{ij}=A_{ij}$的所有元素之和，证明：B是正定的。

证明：首先证明；若C是$n\times m$阵，$m<n$。且秩 $A=m$，则当A正定时，$C'AC$也是正定的。

$$\forall y\neq 0\in R^{(m)},\ Y'(C'AC)Y=(CY)'A(CY)$$

由于秩$A=m$，方程$CY=0$仅有唯一的零解。故$Y\neq 0$

$\Longrightarrow CY\neq 0$

由A的正定性知$(CY)'A(CY)>0\Longrightarrow Y'(C'AC)Y>0$

$\Longrightarrow C'AC$正定.

令

$$S=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right\}n_1 & \\ 0 & 0\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

是$n\times k$阶阵，$A=(A_{ii})$

如题要求

则

$$S'AS=\begin{bmatrix}1\cdots 1 0\cdots 0\\ 0\end{bmatrix}A\begin{pmatrix}1 & \\ \vdots & \\ 1 & 0\\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} 0\cdots 0\\ 0\end{bmatrix}$$

令$C'=\begin{pmatrix}\overbrace{1\cdots 1}^{n_1}0\cdots 0 0\cdots 0\\ 0\cdots 0 1\cdots 1 0\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots\cdots\cdots 0\underbrace{1\cdots 1}_{n_k}\end{pmatrix}$ 则秩$C'=$秩$C=K$

$\therefore C'AC$正定

但知$C'AC=B$.故命题获证。

四：数域F上$2n$个次数不大于$n-1$的多项式：

$$f_i(x)=a_{i1}+a_{i2}x+\cdots+a_{in}x^{n-1}$$
$$g_j(x)=b_{j1}+b_{j2}x+\cdots+b_{jn}x^{n-1}\quad i,j=1,2,\cdots,n。$$

如果$\begin{vmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \vdots \quad \vdots\\ an1\cdots ann\end{vmatrix}\neq 0$，$\begin{vmatrix}b_{11}\cdots b_{1n}\\ \vdots \quad \vdots\\ bn1\cdots bnn\end{vmatrix}\neq 0$。

证明：存在多项式组$\{f_i\}$到$\{g_j\}$的一个满射σ，使任意F上的一个$n-1$次多项式，都可写成

$\sigma(f_1(x))$，$\sigma(f_2(x))$，$\cdots$，$\sigma(f_r(x))$，f_{r+1}

(x), …, $f_n(x)$

（$r=1, 2, \cdots, n$）的线性组合。

证明：令$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，这时A，B都是满秩矩阵，故存在满秩矩阵$T=(t_{ij})$，使$B=TA$。

对T进行行变换，使其顺序主子式都不为零。令这个变换的矩阵为R，则有：$RB=(RT)A$

这时有

$$\begin{pmatrix} bu_{1}1 & bu_1 2\cdots bu_1 n \\ bu_2 1 & bu_2 2\cdots bu_2 n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ bu_n 1 & bu_n 2\cdots bu_n n \end{pmatrix}=(RT)A$$

其中u_1，u_2，…，u_n为1，2，…，n的一个排列，而RT为满秩矩阵，且其顺序主子式都不为零。

令RT的n个行记为Q_1，Q_2，…，Q_n，则

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_r \\ (OI_{n-r}) \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} bu_1 1 & bu_1 2\cdots bu_1 n \\ bu_2 1 & bu_2 2\cdots bu_2 n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ bu_r 1 & bu_r 2\cdots bu_r n \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2}\cdots a_{r+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \quad (r=1,2,\cdots,n)$$

这时$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_r \\ (OI_{n-r}) \end{pmatrix}A$为满秩矩阵，（$r=1, 2, \cdots, n$）

令

$$\sigma:\begin{cases} f_1(x)\longrightarrow g_{u_1}(x) \\ f_2(x)\longrightarrow g_{u_2}(x) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x)\longrightarrow g_{u_n}(x) \end{cases}$$

显然σ为一满射，并且

$\sigma(f_1(x))$, $\sigma(f_2(x))$, …, $\sigma(f_r(x))$, $f_{r+1}(x)$, …, $f_n(x)$对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} bu_1 1 & bu_1 2 \cdots bu_1 n \\ bu_2 1 & bu_2 2 \cdots bu_2 n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ bu_r 1 & bu_r 2 \cdots bu_r n \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} \cdots a_{r+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

是满秩矩阵。

由于F上次数不大于$n-1$的多项式连同零多项式，作成F上的一个n维空间，从而

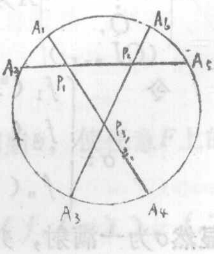
$\sigma(f_1(x))$, …, $\sigma(f_r(x))$, $f_{r+1}(x)$ …, $f_n(x)$

$$(r=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

为该空间的一个基，故任意一个$n-1$次多项式都可表为它的线性组合。

五：圆上任意n点（$n\geqslant 6$），每两点连一线段，其中任意三条在圆内都不共点，求这些线段相交成（顶点在圆内或圆上）的三角形的个数。

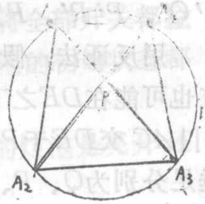
解：由已知任意三条线段在圆内都不共点，为了求出这些线段相交成（顶点在圆内或圆上）的三角形的个数，我们分以下四种情况讨论：



（1）三个顶点都在圆上的三角形的个数为C_n^3个；

（2）三个顶点都在圆内的三角形的个数为C_n^6个，如图①；

（3）两个顶点在圆上，一个顶点在圆内的三角形的个数为 $4C_n^4$ 个，如图②；



（4）一个顶点在圆上，两个顶点在圆内的三角形的个数为 $5C_n^5$ 个，如图③。

因此，所求三角形的总个数为：

$$C_n^3 + C_n^6 + 4C_n^4 + 5C_n^5。$$

六：在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，三边上的高分别为h_a，h_b，h_c。P为形内一点，且到三边的距离分别为d_a，d_b，d_c。如果$d_a + d_b + d_c = \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)$。求点$P$的集合。

解：过等腰$\triangle ABC$的重心G作DE平行于底BC，交两腰于D、E，则线段DE即为所求P点的集合（轨迹）。

证明，（纯粹性）在DE上任取一点P作$PQ \perp BC$，$PR \perp AC$，$PS \perp AB$，垂足分别为Q、R、S、显然$PQ = \frac{1}{3}h_a$，又显然$\triangle ADE$是等腰△　由等腰三角形的性质知$PQ + PS = DT$，其中DT是AE上的高，显然$DT = \frac{2}{3}h_b = \frac{1}{3}h_b + \frac{1}{3}h_c$。

因此，$d_a + d_b + d_c = \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)$

即轨迹上的点符合条件，（如图①）

（完备性）假设$\triangle ABC$内有一点P'到三边的距离

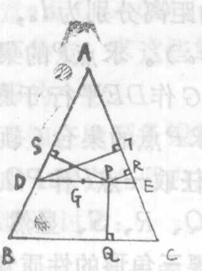
$P'Q'$，$P'R'$，$P'S'$符合条件，我们 要证明P'在DE上。

用反证法，假设P'不在DE上，那时P'可能在DE的上方也可能在DE之下方。我们不妨假定P'在DE的上方。作$P'P \parallel AC$交DE于P，过P作$PQ \perp BC$，$PR \perp AC$，$PS \perp AB$，垂足分别为Q、R、S、作$P'V \perp PS$，垂足为V，设$P'Q'$交DE于V^1。由于$P'Q'+P'R'+P'S'=\frac{1}{3}(h_a+h_b+h_c)$，$PQ+PR+PS=\frac{1}{3}(h_a+h_b+h_c)$。利用矩形对边相等容易推得$P'V'=PV$，这样一来，$R_t\triangle P'V'P \cong Rt\triangle PVP'$。从而$\angle PP'V=\angle P'PV'$，但$\angle PP'V=\angle A$，$\angle P'PV'=\angle C$，由此$\angle A=\angle B=\angle C$，$\triangle ABC$是等边三角形，这与已知条件$\triangle ABC$仅是等腰三角形相矛盾。故$P'$在$DE$之上方不可能！

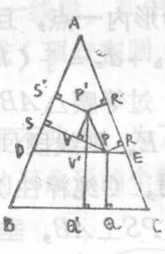
同理可证，p'在DE之下方亦不可能。

因此，P'在DE上，即符合条件之点在轨迹上。（如图②）

①



②



七：若n盏电灯各被一个开关单独控制，开关按自然顺序从1到n编号，现对开关作如下m次操作：T_1，T_2，…，T_m。第j次操作记为T_j，它表示对i号开关（$1 \leq i \leq n$），若操作号j与开关号i互素，即（i，j）=1，就把第i号开关拉一下。