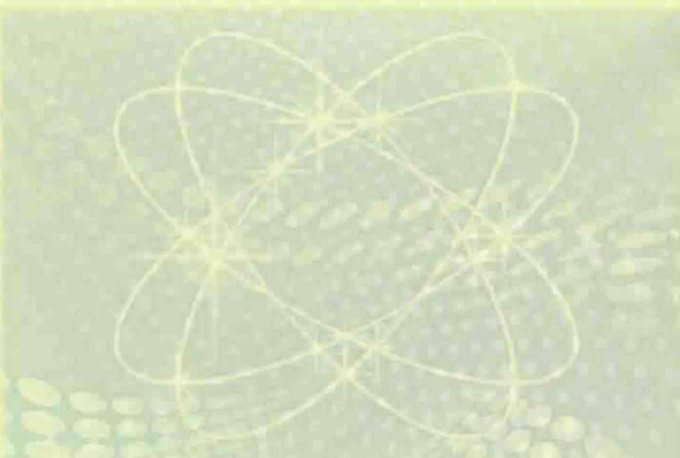
考研数学
10 年真题分析与演练
数学（一）

主编　杨　超　姜晓千　方　浩



北京理工大学出版社

考研数学

10 年真题分析与演练

数学(一)

主编　杨　超　姜晓千　方　浩

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学10年真题分析与演练．数学一 / 杨超，姜晓千，方浩主编．—北京：北京理工大学出版社，2016.7

ISBN 978-7-5682-2527-4

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①杨…　②姜…　③方…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第145876号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京盛彩捷印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 21.25
字　　数 / 464千字
版　　次 / 2016年7月第1版　2016年7月第1次印刷
定　　价 / 38.80元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　　言

本书是我们团队的又一力作，感谢各位老师的辛勤付出！作为本书的前言，在这里主要谈三个问题：真题的重要性，如何使用，何时用。

真题的重要性毋庸置疑。真题是复习的方向，脱离了真题，犹如深处陌生的地带失去了指南针。毫不夸张地说，把真题研究透，可以毫无压力地应对来年的考试。

理由之一在于考题的重复性，重复有两种情况：

一是直接拷贝。例如，1999 年和 2005 年的一道选择题就重复考查了奇函数的一切原函数都是偶函数这个命题。代数考题中关于矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，联系到三个知识点：一是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 秩的信息，二是 $\boldsymbol{B}$ 的每一列都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，三是 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

二是核心考点相同，只是改了问法，变了数字。例如，2007 年和 2011 年对全微分概念的考查，考题表面不一样，其实本质完全一样。罗尔定理的考题，证明某个中值点的二阶导数等于零，需要找到原函数有三个相同的函数值点，这一考点到目前为止重复考过五次。

理由之二在于真题中的典型题是模板，犹如同学背的作文一样，句型不变，主语、宾语是可以随意改动的。说得更明白点，课外书上很多题都是根据过去的考题改变的。1998 年数学一考了一道数列的极限题，先用夹逼准则，后用定积分定义，这在考研中是第一次考，后面这种题出现在各种习题集中，也包括我们编写的《考研数学必做 986 题》。类似这样的题还有很多，读者在做练习时能感受到。

真题一般是在听完强化班，或者自己完整复习完后再做，否则就是刺激自己。因为你会有很多内容不懂，做真题也就没意义了。历年学生做真题有两种方式：一是按年份，二是按章节。两种方式都可以，都有必要，前者起模拟作用，分配客观题和主观题的时间；后者主要为了查漏补缺。

2017 年的考生，有没有必要把 1987—2016 年的真题全做一遍？如果你是学霸，相信你可以做到，问题是绝大部分不是，那怎么办？这就是本书的特色，我们按年份把最近十年真题中的典型题全罗列出来，供各位练习，一些送分题和基本计算题不在本书中引举，希望可以节省时间，提高效率。

千言万语汇成一句话，希望本书可以在考研中助你一臂之力！祝莘莘学子金榜题名！

杨　超

目　　录

真题中的典型题

§1. 函数、极限、连续

1.(1995 年,数学二)

设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求$\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

2.(1988 年,数学四)

求$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

3.(1991 年,数学三)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 n 为给定的自然数.

4.(1991 年,数学四)

求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

5.(1994 年,数学四)

求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

6.(1997 年,数学四)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq0)$.

7.(1998 年,数学四)

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$,$n$ 为自然数.

8.(2000 年,数学一)

求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

9.(1999 年,数学二)

求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

10.(2002 年,数学二)

已知函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上可导,$f(x)>0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,且满足$\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,求 $f(x)$.

11.(1998 年,数学一)

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

12.（1999 年，数学二）

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

13.（1998 年，数学二）

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

14.（2005 年，数学二）

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

15.（2004 年，数学二）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

16.（1994 年，数学四）

设函数 $f(x)$ 有导数，且 $f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$.

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}=\dfrac{1}{2n}f'(0)$.

§2. 导数与微分

17.（2004 年，数学二）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上 $f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

（Ⅱ）问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

18.（1995 年，数学二）

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

19.（1989 年，数学二）

已知 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

20.（1996 年，数学二）

设 $\begin{cases}x=\int_0^t f(u^2)\mathrm{d}u,\\ y=[f(t^2)]^2,\end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f(u)\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

21.（2003 年，数学一，数学二）

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

（Ⅰ）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（Ⅱ）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

22.（2000 年，数学二）

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

23.（1996 年，数学二）

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）$g(x)$ 是否有间断点、不可导点？若有，指出这些点.

24.（2000 年，数学二）

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

§3. 中值定理及其应用

25.（1990 年，数学三）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少，$f(0)=0$，试用拉格朗日中值定理证明不等式

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b),$$

其中 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

26.（1990 年，数学四）

证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}, -\infty<x<+\infty$.

27.（1991 年，数学三）

试证明函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

28.（1992 年，数学四）

求证方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p,q 为常数，且 $0<q<1$.

29.（1993 年，数学三）

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$.

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

30.（1995 年，数学四）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

31.(1999 年,数学三)

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=f(1)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

试证:

(Ⅰ)存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使 $f(\eta)=\eta$;

(Ⅱ)对任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

32.(2000 年,数学三,数学四)

求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值,并求该函数图形的渐近线.

33.(2001 年,数学三,数学四)

已知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+C}{x-C}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 C 的值.

34.(2003 年,数学三)

设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,f(3)=1$,试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

35.(1987 年,数学四)

设总成本 c 关于产量 x 的函数 $c(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$,需求量 x 关于价格 p 的函数 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$,求

(Ⅰ)边际成本;

(Ⅱ)边际收益;

(Ⅲ)边际利润;

(Ⅳ)收益对价格的弹性.

36.(1993 年,数学三)

设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$,需求函数为 $q=\frac{1}{e}(d-p)$,其中 c 为成本,q 为需求量(即产量),p 为价格,a,b,c,d,e 都是正的常数,且 $d>b$,求:

(Ⅰ)利润最大时的产量及最大利润;

(Ⅱ)需求对价格的弹性;

(Ⅲ)需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

37.(1995 年,数学三,数学四)

设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$,收益函数为 $R=PQ$,其中 P 为产品价格,Q 为需求量(产品的产量).$Q(P)$ 为单调减函数,如果当价格 P_0 对应产量为 Q_0 时,边际收益 $\left.\frac{dR}{dQ}\right|_{Q=Q_0}=$

$a > 0$,收益对价格的边际效益$\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0} = C < 0$,需求对价格的弹性 $E_p = b > 1$.

求 P_0,Q_0.

38.(1997 年,数学三)

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p = 7 - 0.2x$(万元 / 吨),x 为销售量(单位:吨),商品的成本函数是 $c = 3x + 1$(万元).

(Ⅰ)若每销售一吨商品,政府要征税 t(万元),求该商家获得最大利润时的销售量;

(Ⅱ)t 为何值时,政府税收总额最大?

39.(1998 年,数学三,数学四)

设某酒厂有一批新酿的好酒,如果现在(假定 $t = 0$)就售出,总收入为 R_0(元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售,t 年末总收入为 $R = R_0 \mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$.

假定银行的年利率为 r,并以连续复利计算,试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大?并求 $r = 0.006$ 时的 t 值.

40.(2004 年,数学三,数学四)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$,其中价格 $P \in (0,20)$,Q 为需求量.

(Ⅰ)求需求量对价格的弹性 Ed($Ed > 0$);

(Ⅱ)推导$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q(1 - Ed)$(其中 R 为收益),并用弹性 Ed 说明价格在何范围内变化时,降低价格反而使收益增加.

41.(1996 年,数学二)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定,试求 $y = y(x)$ 的驻点,并判别它是否为极值点.

42.(1993 年,数学二)

设 $x > 0$,常数 $a > \mathrm{e}$,证明:$(a + x)^a < a^{a+x}$.

43.(1998 年,数学二)

设 $x \in (0,1)$,证明:

(Ⅰ)$(1 + x)\ln^2(1 + x) < x^2$;

(Ⅱ)$\dfrac{1}{\ln 2} - 1 < \dfrac{1}{\ln(1 + x)} - \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$.

44.(1999 年,数学一)

试证:当 $x > 0$ 时,$(x^2 - 1)\ln x \geqslant (x - 1)^2$.

45.(1993 年,数学一)

设在$[0, +\infty)$上函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $f'(x) \geqslant k > 0$,$f(0) < 0$,证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.

46.(1997 年,数学二)

就 k 的不同取值情况,确定方程 $x - \dfrac{\pi}{2}\sin x = k$ 在开区间$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$内根的个数,并证明你的结论.

47.(1995 年,数学一)

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$上存在二阶导数,并且 $g''(x)\neq 0$,

$$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0.$$

试证:

(Ⅰ)在开区间(a,b)内 $g(x)\neq 0$;

(Ⅱ)在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

48.(1998 年,数学一,数学二)

设 $y=f(x)$ 是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

(Ⅰ)试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于在区间$[x_0,1]$上以 $y=f(x)$ 为曲边梯形的面积;

(Ⅱ)又设 $f(x)$ 在区间$(0,1)$内可导,且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$,证明(Ⅰ)中的 x_0 是唯一的.

49.(2000 年,数学一,数学二)

设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.

试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1 和 ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

50.(2001 年,数学一)

设 $y=f(x)$ 在$(-1,1)$内具有二阶连续函数,且 $f''(x)\neq 0$.

试证:

(Ⅰ)对于$(-1,1)$内的任一 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(Ⅱ)$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

51.(1999 年,数学二)

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数,且

$$f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0.$$

证明:在开区间$(-1,1)$内至少存在一点 ξ,使 $f'''(\xi)=3$.

52.(2001 年,数学二)

设 $f(x)$ 在区间$[-a,a]$$(a>0)$上具有二阶连续导数,$f(0)=0$.

(Ⅰ)写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(Ⅱ)证明在$[-a,a]$上至少存在一点 η,使 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

§4. 积分学及其应用

53.(1987 年,数学四)

求$\displaystyle\int\frac{x}{x^4+2x^2+5}\mathrm{d}x$.

54.(1990 年,数学四)

求不定积分$\int \frac{x\cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

55.(1993 年,数学三,数学四)

已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$,求常数 a 的值.

56.(1994 年,数学四)

已知$\frac{\sin x}{x}$是函数 $f(x)$ 的一个原函数,求$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

57.(1987 年,数学二,长沙铁道学院 1979 年)

求$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$($a$,$b$ 是不全为 0 的非负常数).

58.(1996 年,数学二)

计算不定积分$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

59.(1997 年,数学二)

计算$\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x + 1)^2\mathrm{d}x$.

60.(2003 年,数学二,同济大学 1983 年)

计算不定积分$\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

61.(1999 年,数学四)

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,且当 $x \geqslant 0$ 时,

$$f(x)F(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}.$$

已知 $F(0) = 1$,$F(x) > 0$,试求 $f(x)$.

62.(2000 年,数学四)

计算 $I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x} + \mathrm{e}^{3-x}}$.

63.(1994 年,数学三)

设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0) = 0$,$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)\mathrm{d}t$.

求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.

64.(2001 年,数学四)

设函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内连续,$f(1) = \frac{5}{2}$,且对所有 x,$t \in (0,+\infty)$,满足条件:

$$\int_1^{xt} f(u)\mathrm{d}u = t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u + x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u.$$

求 $f(x)$.

65.(2005 年,数学一,数学二)

如图 1 所示,曲线 c 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 c 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x.$$

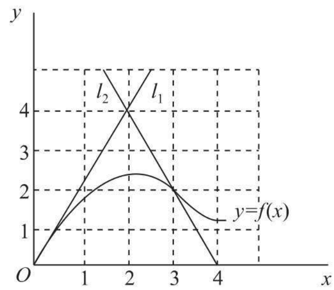


图 1

66.(1995 年,数学三)

设 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续,$g(x)$ 为偶函数,且 $f(x)$ 满足条件

$$f(x)+f(-x)=A(A\text{ 为常数}).$$

(Ⅰ)证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

67.(2001 年,数学三)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x(k>1).$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

68.(2002 年,数学三,数学四)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)>0$,利用闭区间上连续函数性质,证明存在一点 $\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

69.(2004 年,数学二)

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\mathrm{d}t$.

(Ⅰ)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的值域.

70.(2004 年,数学三)

设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b),$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

证明:$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

71.(2005 年,数学三,数学四)

设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续,且 $f(0)=0$,$f'(x)\geqslant 0$,$g'(x)\geqslant 0$.

证明:对任何 $a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1).$$

72.(1992 年,数学三)

设曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$.

(Ⅰ)把曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$,x 轴,y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周,得一旋转体,求此旋转体体积 $V(\xi)$;求满足 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)$ 的 a.

(Ⅱ)求在此曲线上找一点,使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大,并求出该面积.

73.(1992 年,数学四)

设生产某产品的固定成本为 10,而当产量为 x 时的边际成本函数为 $MC=-40-20x+3x^2$,边际收入函数为 $MR=32+10x$.

试求:

(Ⅰ)总利润函数;

(Ⅱ)使总利润最大的产量.

74.(1998 年,数学三)

设有两条抛物线 $y=nx^2+\dfrac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$,记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(Ⅰ)求两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n;

(Ⅱ)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{a_n}$ 的和.

75.(2002 年,数学三)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$,$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域;D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$,$x=a$ 所围成的平面区域,其中 $0<a<2$.

(Ⅰ)试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1;D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(Ⅱ)问当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值?试求此最大值.

76.(2005 年,数学二)

如图 2 所示,C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像,过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图像,过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y,记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$;C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$,如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$,求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

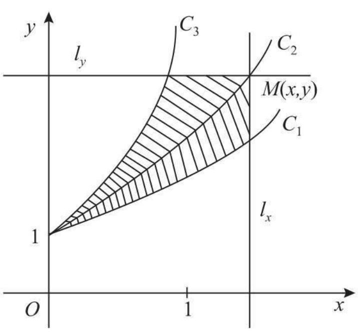


图 2

77.(2003 年,数学二)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2, \\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u \end{cases}$ $(t>1)$ 所确定,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$.

78.（2002 年，数学二）

设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

79.（同济大学等八院校 1985 年）

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

80.（2001 年，数学二）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$ 且其反函数为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2e^x$，求 $f(x)$.

81.（2002 年，数学一）

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

82.（1998 年，数学二）

计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

83.（1993 年，数学二）

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

84.（1996 年，数学一）

求心形线 $\gamma=a(1+\cos\theta)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

85.（2001 年，数学二）

设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$S=S(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算：

$3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.（在直角坐标系下曲率公式为 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$）

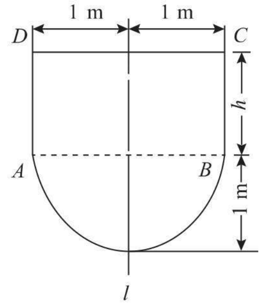


图 3

86.（2002 年，数学二）

某闸门的形状与大小如图 3 所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承

受的水压力之比为 5∶4，闸门矩形部分的高 h 应为多少米？

§5. 微分方程

87.（1999 年，数学三）

设有微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$，其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ 试求在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数 $y = y(x)$，使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $y(0) = 0$.

88.（2003 年，数学三）

设 $F(x) = f(x)g(x)$，其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件：

$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x)$ 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$.

（Ⅰ）求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

（Ⅱ）求出 $F(x)$ 的表达式.

89.（2005 年，数学二）

用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$，并求其满足 $y\Big|_{x=0} = 1, y'\Big|_{x=0} = 2$ 的特解.

90.（1997 年，数学三）

设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy.$$

求 $f(t)$.

91.（1994 年，数学三）

设函数 $y = y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -4. \end{cases}$ 求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$.

92.（1988 年，数学三）

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数：

$$D = D(p) = \frac{a}{p^2}, S = S(p) = bp,$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$ 为常数，价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)] (k \text{ 为正的常数}).$$

假设当 $t = 0$ 时价格为 1，试求：

（Ⅰ）需求量等于供给量时的均衡价格 p_e；

（Ⅱ）价格函数 $p(t)$；

（Ⅲ）极限 $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$.

93.（2001 年，数学三）

已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$，求函数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和.

94.(2002 年,数学三)

(Ⅰ)验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$;

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

95.(1993 年,数学二)

求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1$ 的特解.

96.(1995 年,数学二)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y\Big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

97.(1997 年,数学二)

求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 的通解.

98.(1996 年,数学二)

(Ⅰ)求初值问题 $\begin{cases} y'+ay=f(x), \\ y\Big|_{x=0}=0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$,其中 a 为正的常数;

(Ⅱ)若 $|f(x)|\leqslant k$(k 为常数),证明:当 $x\geqslant 0$ 时,有 $|y(x)|\leqslant\frac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

99.(1997 年,数学二)

已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$,$y_2=xe^x+e^{-x}$,$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解,求此微分方程.

100.(2001 年,数学二)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$,$g'(x)=2e^x-f(x)$,且 $f(0)=0$,$g(0)=2$. 求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$.

101.(1987 年,数学一)

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解(一般解),其中常数 $a>0$.

102.(2000 年,数学二,大连理工大学 1980 年,武汉水利电力学院 1985 年)

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=1$,且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0.$$

(Ⅰ)求导数 $f'(x)$;

(Ⅱ)证明:当 $x\geqslant 0$ 时,不等式 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立.

103.(1999 年,数学二)

设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导,且 $y'(x)>0$,$y(0)=1$,过曲线 $y=y(x)$ 上任一点