第十一讲　线性代数

线性代数是高等数学的一个重要分支，它主要以矩阵为工具研究有限维向量空间（线性空间）和线性变换的数学理论．这些理论产生的源泉很多来自数学分析和解析几何；反之，应用线性代数中讨论的抽象理论可以大大简化数学分析和解析几何中一些问题的讨论．

线性代数的理论和方法在数学的许多分支以及物理、天文、技术科学中有着越来越广泛的应用，因而，它不仅在数学而且在科学技术的许多领域里都占有极其重要的地位，随着电子计算机的广泛使用，这一点更为明显．

§11.1　内　容　要　点

一、行列式

行列式是线性代数的一个基本工具，它在数学的其他领域中也有广泛的用途．熟练地掌握行列式的计算方法是非常重要的．

1.　定义

有许多种方法可以定义 n 阶行列式，一个构造性的定义是：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

$(j_1\ j_2\cdots j_n)$是$1,2,\cdots,n$的任一排列，$\tau[j_1\ j_2\cdots j_n]$是该排列的逆序数.

2. 行列式的性质

性质(1) 行列式与它的转置行列式相等，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质(1) 说明行列式中行、列地位的对称性，因而行列式中有关行的性质对列也同样成立. 下面关于行列式的性质都是对行来叙述的，对于列也有相应的性质，就不再重复了.

性质(2) 交换行列式的任意两行，行列式仅改变符号，即

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}.$$

性质(3) 行列式的某一行乘以数k，等于用k乘这个行

列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质(4)　若行列式中有两行成比例，则行列式等于零，即

$$\begin{array}{r} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

特别地，若行列式中有两行相等，或行列式中有某一行的元素全为零，则行列式等于零.

性质(5)　若行列式的某行的各元素是二项之和，则此行列式可表为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质(6)　把行列式的某一行的倍加到另一行上，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 行列式按某一行(列)展开

定义 在 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，剩下的元素按原来的排法，构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称此行列式为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

定理 1 n 阶行列式等于它任意一行（列）的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和.

定理 2 n 阶行列式中某一行（列）的每个元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则定理 1 与定理 2 可以用下述公式表示：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

$$=\begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}$$

$$=\begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j。 \end{cases}$$

其中 i、$j=1$，2，$\cdots$，n.

4. 拉普拉斯定理、行列式的乘法

(1) 拉普拉斯定理

定义 位于 n 阶行列式 D 的第 $i_1,\cdots,i_k$ 行及第 $j_1,\cdots,j_k$ 列（$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$）交叉位置上的元素，按原来位置所构成的 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式；不在这 k 行 k 列上的元素，按原来位置所构成的 $n-k$ 阶子式 N，称为 M 的余子式，而称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$$

为 M 的代数余子式.

定理（拉普拉斯定理） 任意取定 n 阶行列式的某 k 行（列），位于这 k 行（列）中的 k 阶子式共有 C_n^k 个，则这 C_n^k 个子式与其相应的代数余子式乘积的和等于 D，即

设这 C_n^k 个 k 阶子式分别为 $M_1, M_2, \cdots, M_t (t=C_n^k)$，它们的代数余子式对应为 $A_1, A_2, \cdots, At$，则

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t.$$

（2）行列式的乘法

设两个 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$A\cdot B=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1} a_{ik} b_{kj}$

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},$$

$$i、j=1,2,\cdots,n.$$

5. 关于行列式的计算方法

四阶以上的行列式的计算并不简单，它有相当强的技巧性，下面仅举出行列式计算中常用的几个简单方法：

（1）利用行列式的定义计算.

如果一个行列式，元素中零的个数较多时，常常用行列式的定义来计算.

(2) 利用行列式的性质计算.

(3) 利用递推公式计算.

(4) 利用拉普拉斯定理计算.

如果一个行列式的某 n 行(列)含零元素较多时，常常用拉普拉斯定理来计算.

(5) 利用数学归纳法计算.

(6) 化为范德蒙(Vandermonde)行列式计算.

(7) 利用加边法计算.

把所要计算的行列式添加一行一列，得到加边行列式，使它与原来的行列式相等，且这个加边行列式较容易计算.

(8) 利用余子式定理计算.

6. 克莱姆(Cramer)法则

(1) 非齐次线性方程组

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1}$$

若其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组(1)有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 D_j 是将 D 中第 j 列的元素换为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得

到的 n 阶行列式($j=1,2,\cdots,n$).

(2) 齐次线性方程组

若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$，则该方程组只有零解.

7. 消元法

克莱姆法则在理论上是一个极其完善的结果，但在具体应用克莱姆法则求解时，要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，计算量很大，所以在解线性方程组时，一般采用消元法.

消元法就是把线性方程组进行变换，化成一个与之同解的便于求解的方程组，从而求出原方程组的解.

定义 下述三种变换称为线性方程组的初等变换：

(1) 用一个非零的数乘一个方程；

(2) 用一个数乘一个方程后加到另一个方程上；

(3) 互换两个方程的位置.

定理 1 初等变换把线性方程组变成与它同解的方程组.

定理 2 若方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$，则此方程组可用初等变换化成形如

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad c_{22}x_2+c_{23}x_3+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3+\cdots+c_{3n}x_n=d_3, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n=d_n \end{cases}$$

的阶梯形同解方程组，其中 $c_{11},c_{22},\cdots,c_{nn}$ 全不为零.

若把上述方程组中的第 i 个方程($i=1,2,\cdots,n$)同时除以 c_{ii}，则上述阶梯形方程组又可化成

$$\begin{cases} x_1+c'_{12}x_2+c'_{13}x_3+\cdots+c'_{1n}x_n=d'_1, \\ \qquad x_2+c'_{23}x_3+\cdots+c'_{2n}x_n=d'_2, \\ \qquad\qquad x_3+\cdots+c'_{3n}x_n=d'_3, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n=d'_n, \end{cases}$$

其中 $c'_{ij}=\dfrac{c_{ij}}{c_{ii}}(j>i,i=1,2,\cdots,n-1,\ j=i+1,i+2,\cdots,n)$，

$$d'_i=\frac{d_i}{c_{ii}}.$$

对这个方程组继续进行第二种初等变换：第 i 个方程减去第n个方程的 c'_{in} 倍就消去了含 x_n 的项($i=1,2,\cdots,n-1$)；第 i 个方程减去第 $n-1$ 个方程的 $c'_{i,n-1}$ 倍又消去了含 x_{n-1} 的项($i=1,2,\cdots,n-2$)；…；最后从第一个方程减去第二个方程的 c'_{12} 倍，便得方程组的解

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad =e_1, \\ \quad x_2 \qquad\quad =e_2, \\ \qquad x_3 \qquad =e_3, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_n=e_n=d'_n. \end{cases}$$

事实上，在作初等变换简化方程组时，仅仅是对这些方程的系数进行变换．为了简单起见可将未知量省略不写，而将系数列成矩阵形式进行行变换．

二、线性方程组

1. 线性方程组

当方程的个数与未知量的个数不相等时，克莱姆法则不再适用，为此，需要引入向量和矩阵的概念．

（1）矩阵

定义 1 由 mn 个数排成的 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵．

矩阵中的数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵的元素，i 称为行标，j 称为列标。矩阵常用 A、B、…，或者 (a_{ij})、(b_{ij})、…，或者 A_{mn}、B_{mn}、…或者 $(a_{ij})_{m\times n}$、$(b_{ij})_{m\times n}$…表示．

若矩阵 A 的行数与列数皆为 n 时，就称 A 为 n 阶方阵．

两个矩阵的行、列数分别相等，并且对应元素都相等，就称这两个矩阵相等．

定义 2 下列三种变换称为矩阵的初等行变换：

1° 用一个非零数乘矩阵的某一行；

2° 把矩阵的某一行乘 k 后加到另一行上；

3° 互换矩阵中两行的位置．

任意一个矩阵都可以经过一系列的初等行变换变成阶梯形矩阵．所谓阶梯形矩阵系指形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的矩阵.

(2) 线性方程组

给出一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

称

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为方程组(1)的系数矩阵。若把常数项也添成一列，则得到一个 $m\times(n+1)$矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称 $\overline{A}$ 为方程组(1)的增广矩阵.

因为线性方程组可经初等变换化成同解方程组，而对线

性方程组作初等变换相当于对$\overline{A}$作初等行变换，但$\overline{A}$通过初等行变换可化成阶梯形矩阵，所以方程组(1) 可通过初等变换化成同解的阶梯形方程组.

设方程组(1)化为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$，那么

1° 若 $d_{r+1}\neq 0$，则方程组(1)无解；

2° 若 $d_{r+1}=0$，$r=n$，则方程组(1)有唯一解，并可由方程组(2)求出此解；

3° 若 $d_{r+1}=0$，$r<n$，则方程组 (1) 有无穷多解，此时，可将方程组(2)改写成

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n, \end{cases}$$

可解出

$$\begin{cases} x_1=k_1+k_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+k_{1n}x_n, \\ x_2=k_2+k_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+k_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=k_r+k_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+k_{rn}x_n \end{cases}$$

这样一组表达式称为方程组(1)的一般解，而 x_{r+1}，$\cdots$，x_n 称为一组自由未知量. 任给 x_{r+1}，$\cdots$，x_n 的一组值，就可唯一

地定出 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的值，从而得到方程组(1)的一个解.

（3）齐次线性方程组

定理 1 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

中方程的个数少于未知量的个数，即 $m<n$，则它有非零解.

定理 2 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是：它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

2. n 维向量空间

（1）基本概念

定义 1 n 个数组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为一个 n 维向量，其中第 i 个数 a_i 称为这个向量的第 i 个分量.

定义 2 若 n 维向量 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 中 $a_i=b_i (i=1, 2, \cdots, n)$，则称这两个向量是相等的，记为 $\alpha=\beta$.

定义 3 设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，$k$

为一个数，则

α 与 β 的和定义为：

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots,\ a_n+b_n);$$

α 与 β 的差定义为：

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdots,\ a_n-b_n);$$

k 与 α 的数乘定义为：

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

向量的加减法与数乘统称为向量的线性运算。

定义 4 分量全为零的向量$(0,0,\cdots,0)$称为零向量，记为 0；向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$称为 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的负向量，记为$-\alpha$.

（2）向量运算的基本规律

设 α、β、γ 是 n 维向量，k、l 是数，则

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

2° $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$；

3° $k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

4° $1\cdot\alpha=\alpha$；

5° $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

6° $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

7° $\alpha+0=\alpha$；

8° $\alpha+(-\alpha)=0$.

（3）**定义** n 维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的线性运算，称为 n 维向量空间.

3． 线性相关性

定义 1 设 α、β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 都是 n 维向量，若存在常数 k_1、k_2、$\cdots k_s$，使得

$$\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s,$$

则称 α 是 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 的线性组合，也称 α 可以由 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 线性表出。

定义 2 若向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 都可由向量组 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 线性表出，则称向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 可由向量组 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 线性表出，若两个向量组可以互相线性表出，则称它们是等价的。

向量组之间的等价关系有如下三个性质：

(1) 反身性　每一个向量组都与它自身等价；

(2) 对称性　若向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 与向量组 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 等价，则向量组 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 也与向量组 α_1，α_2、$\cdots\alpha_r$ 等价；

(3) 传递性　若向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 与向量组 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 等价，向量组 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 与向量组 γ_1、γ_2、$\cdots\gamma_p$ 等价，则向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 与向量组 γ_1、γ_2、$\cdots\gamma_p$ 等价.

定义 3 设有 n 维向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$，若有不全为零的数 k_1、k_2、$\cdots k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0, \qquad (*)$$

则称向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 线性相关。若向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 不是线性相关的，则称为线性无关的，即只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时(*)式才成立，便称 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 线性无关.

定理 1 设

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,a_{1n}),\\
\alpha_2&=(a_{21},\ a_{22},\ \cdots,a_{2n}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_s&=(a_{s1},\ a_{s2},\ \cdots,\ a_{sn}),\\
\beta&=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n),
\end{aligned}$$

则

1° β 可由 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 线性表出的充要条件是：线性方

程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=b_1, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{s2}x_s=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=b_n \end{cases}$$

有解；

2° 向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 线性相关的充要条件是：齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=0, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{s2}x_s=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=0 \end{cases}$$

有非零解.

特别，当 $s=n$ 时，α_1、α_2、$\cdots\alpha_n$ 线性相关的充要条件是：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

定理 2 设 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 与 β_1、$\beta_2\cdots\beta_s$ 是两个向量组，若

1° 向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 可由 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 线性表出；

2° $r>S$，

则向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 必定线性相关.

推论 1 若向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 可由向量组 β_1、β_2、$\cdots\beta_s$ 线性表出，且 α_1、α_2、$\cdots\alpha_r$ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

推论 2 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

推论 3 两个线性无关的等价的向量组一定包含相同个

数的向量.

定理 3 向量组 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ $(s\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是：α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 中有一个向量可以由其余的向量线性表出.

定义 4 设 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 是一个向量组中的 s 个向量，若

1° α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 线性无关；

2° 向量组中任一向量可由 α_1、α_2、$\cdots\alpha_s$ 线性表出；

则称 α_1、$\alpha_2\cdots\alpha_s$ 是向量组的极大线性无关组.

任何一个向量组的极大线性无关组不是唯一的. 它的任一个线性无关的部分组都可以扩充成一个极大线性无关组.

定理 4 1° 向量组的任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价；

2° 向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的，它们所含向量的个数是相等的.

定义 5 向量组的任何一个极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩.

只含零向量的向量组的秩为零.

等价的向量组有相同的秩，但秩相同的两个向量组不一定等价.

4. 线性方程组解的结构

(1) 矩阵的秩

定义 1 矩阵 A 的秩就是矩阵 A 的行向量组的秩，记为秩(A).

零矩阵的秩是零.

定义 2 在矩阵 A 中，任意取定 k 行和 k 列 $(k<A)$，由位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成一个 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

当 A 是一个 n 阶方阵时，用 $|A|$ 表示 A 的行列式（即为