自主招生数学教程

主　编　张天德　贾广素　王　玮
主　审　吴　臻

山东科学技术出版社

全国重点大学

自主招生数学教程

主　编　张天德　贾广素　王　玮
主　审　吴　臻

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国重点大学自主招生数学教程/张天德，贾广素，王玮主编. —济南 ：山东科学技术出版社，2013
ISBN 978－7－5331－6808－7

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①张… ②贾… ③王… Ⅲ. ①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 129618 号

全国重点大学自主招生数学教程

主　编　张天德　贾广素　王　玮

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)82098071

印刷者：山东新华印务有限公司
地址：济南市世纪大道 2366 号
邮编：250104　电话：(0531)82079112

开本：787mm×1092mm　1/16
印张：26.5
版次：2013 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978－7－5331－6808－7
定价：49.80 元

主　编　张天德　贾广素　王　玮
主　审　吴　臻
副主编　王子峰　张永存
编　委　张天德　贾广素　王　玮　王子峰　张永存
孔爱中　张　锋　郭延文　宗秀银　周志国
刘开元　王　颜

前　言

高考,对我国的孩子来说是一件大事! 作为高考改革的一项重要成果,自 2003 年开始,越来越多的高等院校拥有自主招生权。随着自主招生制度的不断完善,大部分高校的自主招生名额在逐年上升,这表明自主招生已经成为广大考生步入理想高等学府的重要途径之一。由于种种原因,自主招生考试形成了自己的特殊性: 没有考试大纲可以参照,各高校的考试模式也不尽相同,也没有固定的考试题型,这都加大了广大考生备考的难度。如何准备自主招生考试,成为广大学子和家长较为困惑的一个话题。

一、对自主招生的认识

自主招生是扩大高校自主招生权、深化高校招生录取制度的重要举措,也是对选拔优秀创新人才、促进素质教育全面开展的有益探索。自主招生从本质上来讲是一种基础教育选拔的新模式,更加注重素质的培养和能力的发展。如果说日常教学已经从"一纲一本"的封闭中走了出来,开始踏上"新课程"改革的大道,那么自主招生所体现出来的教育,实质上早就达到了这种境界,为学有余力的学生提供了自由发展和充分表现的机会。中学数学教材所提供的,基本上是历史的数学或数学的历史,而大多数自主招生试题均可以渗透到今天的数学或数学的今天。许多体现现代思想或高等数学背景的"活数学"正是通过自主招生试题的桥梁传播到中学校园的。许多学生的数学功底是在第一课堂准备的,而思维潜能却往往在课外数学活动中才爆发出来。

课外数学活动在启发数学学习兴趣和提高数学学习能力方面所发挥的作用,就我国的基础教育来说,不是可有可无的,而是不可或缺的。我国的课外数学活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生学习数学的兴趣,有利于培养学生的创造性思维,提高学习效率。这项活动,将健康的素质教育模式引进数学教学过程中,有利于选拔优秀人才。从这种意义上讲,数学课外活动的开展,可以成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施。

现在市场上,关于自主招生备考的图书种类繁多,但绝大多数集中在试卷汇编、试题解析等方面,有的甚至就是数学竞赛的基础教材,真正有针对性备考自主招生的教材还很少见到。鉴于此,我们组织常年从事自主招生研究的大学教授和部分一线中学教师共同编写了《全国重点大学自主招生数学教程》一书,希望它能为广大考生提供帮助。

二、本书的特点

我们在研究了各大高校自主招生试题的基础上,将内容划分为十一个模块,并有针对性地对每个模块进行详细的讲解,分析知识的来龙去脉。这十一个模块既相对独立又前后互映,构成了一个有机的整体。

1. 同步安排 系统跟踪

我们把整个高中数学知识进行整合，而不是按照课本顺序进行编写。这主要是为了与学生备考高考第一轮复习同步，避免过多占用学生的课外时间，尽量做到让学生“一次备考，两次受益”。本书的内容着重对学生素质、能力的发展进行培养。对于高中课堂上所用到的常见方法，有针对性地提出。习题的配置也尽可能地提供详尽的答案，以便于学生在课下研读。

2. 立体设计 螺旋提升

在本书的编写过程中，把各种因素、各种关系、各种要求尽可能地考虑进去，并从整体上进行协调，使学生便于学习，既起到综合教育功能又能进行适当推广。

在每一模块的写作中，既注意到知识点的数量、典型性和训练价值，又注意直接从中学课本、中学课堂寻找生长点。例题的编排，通常都有较低的起点、较高的落点、较宽的跨度，在编写过程中不求齐求全，而求突出核心。习题的配备，既注意到类型又注意到数量，为学生准备较多的练习机会。自主招生知识的各大支柱都明显地在各模块中循环，有的甚至是从初中到高中的循环，但都不是简单的重复，而是巩固深化、拾级而上的螺旋上升。

3. 真题再现 解决疑难

我们通过多方面的努力收集具有代表性大学的自主招生试题与保送生试题，以例题讲解和习题演练的方式将不同层次的大学自主招生命题思想、命题难度和考查方式呈现出来，以使学生见到“真经”，分清差距、明确方向。并按各自所需，找到相应档次大学的自主招生试题进行训练。新课标改革实施以来，新教材在大多数省市已正式使用，我们正是按照新教材体系安排的，但在例题和习题的配备上考虑新教材不同版本并存的实际情况而进行配备。

本书在正式出版之前，在山东、江苏、广西、四川、上海等省市的很多中学试用多年，成效显著，反响很好。在本书的编写过程中，得到了各重点高校、中学有关老师的帮助和支持，特别是李岩校长、强淑国副校长的支持，在此，特别向诸位表示衷心的感谢!

目　录

第一章　集合与简易逻辑 …… 1

1.1　集合及其运算 …… 2

习题 1.1 …… 11

1.2　数学逻辑与反证法 …… 13

习题 1.2 …… 22

1.3　代数式与方程 …… 24

习题 1.3 …… 33

第二章　函数 …… 35

2.1　函数的基本概念 …… 36

习题 2.1 …… 43

2.2　基本初等函数 …… 45

习题 2.2 …… 50

2.3　函数方程 …… 52

习题 2.3 …… 62

2.4　微积分初步及其应用 …… 64

习题 2.4 …… 74

2.5　函数观点 …… 75

习题 2.5 …… 82

第三章　三角函数及三角变换 …… 84

3.1　三角函数的求值与化简 …… 85

习题 3.1 …… 95

3.2　三角函数的图象与性质 …… 96

习题 3.2 …… 102

3.3　三角形内的三角函数问题 …… 103

习题 3.3 …… 111

第四章　不等式 …… 113
4.1　不等式的求解与证明 …… 114
习题4.1 …… 122
4.2　重要不等式 …… 124
习题4.2 …… 134
第五章　数列与极限 …… 136
5.1　数列与数列的通项及前 n 项和 …… 137
习题5.1 …… 143
5.2　递推数列 …… 145
习题5.2 …… 153
5.3　数列求和与数学归纳法 …… 155
习题5.3 …… 161
5.4　极限 …… 162
习题5.4 …… 168
第六章　平面几何与立体几何 …… 170
6.1　平面几何问题 …… 170
习题6.1 …… 177
6.2　空间几何体 …… 179
习题6.2 …… 186
6.3　空间角和距离 …… 187
习题6.3 …… 196
第七章　解析几何 …… 198
7.1　直线与圆 …… 199
习题7.1 …… 205
7.2　圆锥曲线 …… 207
习题7.2 …… 212
7.3　圆锥曲线综合问题探究 …… 214
习题7.3 …… 226
7.4　极坐标与参数方程 …… 228
习题7.4 …… 239
第八章　排列、组合与二项式定理 …… 241
8.1　计数原理与计数公式 …… 241
习题8.1 …… 248
8.2　二项式定理与组合恒等式 …… 250
习题8.2 …… 256

第九章　概率与统计 …… 257
9.1　概率 …… 258
习题 9.1 …… 263
9.2　离散型随机变量的期望与方差 …… 265
习题 9.2 …… 274
第十章　平面向量与复数 …… 276
10.1　平面向量 …… 276
习题 10.1 …… 282
10.2　复数与复数方法 …… 284
习题 10.2 …… 290
10.3　矩阵与行列式 …… 291
习题 10.3 …… 302
第十一章　其他知识拓展* …… 304
11.1　自主招生试题中的初等数论问题选讲 …… 304
11.2　自主招生试题中的组合数学问题选讲 …… 315

参考答案 …… 323

第一章　集合与简易逻辑

☆学习导言☆

章节知识概述

集合论是现代数学大厦的基石，以集合为载体可以承载丰富的知识、方法和数学思想，可以有效考查数学阅读能力、即时学习能力、创新意识等素质和能力. 逻辑作为一门研究思维的科学，与我们的学习生活有着千丝万缕的联系，在科学中尤其是数学中的运用非常重要. 因此集合与逻辑是自主招生考试、保送生考试、高考甚至竞赛等各级各类考试命题的理想素材.

理念感悟

集合是组合数学的基础，也是高中数学及高等数学的重要组成部分. 在自主招生考试中，部分高校对集合论的有关知识是重点考查的，而且越来越注重其与其他数学知识的综合考查. 一般来说，对集合部分的考查主要体现在两个方面的内容：

一是考查对集合知识的理解与掌握程度，二是考查集合与数学其他知识的综合应用的水平.

在考查集合知识的同时，突出考查学生准确使用数学语言的能力，以及使用各种数学思想方法解决问题的能力.

对于集合的学习应该认清两点：

(1) 集合是一种语言、一种基本的数学工具. 它不仅是高中数学的第一课，而且是整个数学大厦的基础.

(2) 对集合的理解与掌握不能仅仅停留在高中起始课的水平上，而是要随着数学学习的不断深入而深化. 我们应学会自觉使用集合语言来表示各种数学名词，主动使用集合工具来表示各种数量关系. 如用集合表示空间的线面关系，表示平面轨迹及其关系，表示方程(组)或不等式的解，表示充要条件，描述排列组合，用集合的性质进行组合运算等.

另外，正确使用逻辑用语是现代公民应该具备的基本素质，无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维. 逻辑用语在数学中也具有十分重要的作用，比如说学习数学需要全面理解概念，正确表述、判断和推理，这些都离不开对逻辑知识的掌握和运用. 逻辑是我们认识问题、研究问题不可缺少的工具，是数学语言的重要组成部分. 因此，在历年的自主招生考试中，对逻辑的考查均在试题中有所渗透.

总体来说，自主招生考试要求学生具备对具体问题具体分析的能力，最终能够自主地解决问题.

1.1 集合及其运算

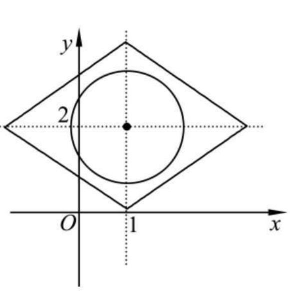
集合论是德国数学家康托尔在19世纪末创立的，集合是近代数学中不加定义的原始概念之一.虽然到了高中才开始提出这一概念，但对集合的渗透却是从小学开始的，有的概念在初中就曾作为专用名词来使用，它是现代数学思想向中学数学浸透的一种重要表现.

一、元素

在刚开始接触集合时，出现了几十个新名词，如集合、元素、有限集、无限集、交集、并集、补集等，20几个新符号，并且都较为抽象.在这千头万绪中，应该抓住一个关键，这个关键就是“元素”.集合是由元素确定的，“子、交、并、补”等集合的运算也是通过元素来定义的，集合的性质也就是元素的性质，至于集合的分类与表示方法也全部都是通过元素来进行刻画的.所以，当遇到集合问题时，首先应该弄清楚一条：集合中的元素是什么？

【例1】已知集合$A=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$，集合$B=\{(x,y)\mid |x-1|+2|y-2|\leqslant a\}$，且$A\subseteq B$，求实数$a$的取值范围. （2008年浙江大学）

【解法一】集合$A=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\dfrac{5}{4}\right\}$中的代表元素是点$(x,y)$，因此集合$A$是点集，意思就是到定点$(1,2)$的距离小于或等于$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$的点构成的图形.显然我们知道集合$A$表示的图形是以$(1,2)$为圆心，以$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆及其内部的点构成的圆面.



集合$B=\{(x,y)\mid |x-1|+2|y-2|\leqslant a\}$中的代表元素也是点$(x,y)$，因此集合$B$也是点集，不难发现图形关于点$(1,2)$对称，因此只需研究$x\geqslant1$，且$y\geqslant2$的区域即可.

当$x\geqslant1$且$y\geqslant2$时，$|x-1|+2|y-2|\leqslant a$可化为$(x-1)+2(y-2)\leqslant a$，即$x+2y-5-a\leqslant0$，表示直线$x+2y-5-a=0$的左下部分区域.

从而可知$|x-1|+2|y-2|\leqslant a\leqslant0$表示以$(1,2)$为中心的菱形的内部.

$A\subseteq B$即为圆在$x+2y-5-a\leqslant0$所表示的以$(1,2)$为中心的菱形的内部.从而，只需圆心到直线$x+2y-5-a=0$的距离不小于半径即可.所以$d=\dfrac{|1+2\times2-5-a|}{\sqrt{1^2+2^2}}\geqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，从而$|a|\geqslant\dfrac{5}{2}$.又因为$a\geqslant0$，所以实数$a$的取值范围是$\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

本题所给出的两个集合都是点集,其图形均以点(1,2)为对称中心,如果我们先对其进行平移,将其平移到以坐标原点为中心的图形,则更加方便研究. 其平移方法如下:

令 $m=x-1, n=y-1$,则问题等价转化为:$A_1=\left\{(m,n) \mid m^2+n^2 \leqslant \frac{5}{4}\right\}$,$B_1=\{(m,n) \mid |m|+2|n| \leqslant a\}$,$A_1 \subseteq B_1$,求实数 a 的取值范围.

这里 A_1、B_1 均为封闭的点集,不但关于 x 轴、y 轴对称,而且关于坐标原点 O 对称,于是只需研究这两个点集在第一象限的关系即可. 当画出两个点所表示的图形,利用数形结合的方法不难发现,a 的值越大,则越容易满足要求,最小的正数 a 恰好对应两者相切的情形,此时 $O(0,0)$ 到直线 $m+2n=a$ 的距离等于半径,于是 $d=\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+2^2}} \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$,从而可以得到实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

【解法二】 由于 $(x-1)^2+(y-2)^2 \leqslant \frac{5}{4} \Leftrightarrow |y-2| \leqslant \sqrt{\frac{5}{4}-(x-1)^2}$,从而原命题等价于 $|x-1|+2\sqrt{\frac{5}{4}-(x-1)^2} \leqslant a$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

设 $|x-1|=t$,则 $t \geqslant 0$,题设即求函数 $z=t+\sqrt{5-4t}\,(t \geqslant 0)$ 的最大值 $z_{\max}$,并使 $z_{\max} \leqslant a$ 即可. 下面给出两种方法来求 $z_{\max}$.

(方法一) 由 $z=t+\sqrt{5-4t}\,(t \geqslant 0)$,得 $(z-t)^2=5-4t^2$,即 $5t^2-2zt+(z^2-5)=0$. $\Delta=4z^2-20(z^2-5) \geqslant 0$,解得 $-\frac{5}{2} \leqslant z \leqslant \frac{5}{2}$. 当且仅当 $t=\frac{1}{2}$ 时,即 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$ 时,$z=\frac{5}{2}$,即 $z_{\max}=\frac{5}{2}$.

(方法二) 由 $5-4t^2 \geqslant 0$,解得 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$. 可设 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\theta\left(\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,得 $z=t+\sqrt{5-4t^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)=\frac{5}{2}\sin(\theta+\varphi)\left(\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,其中 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. 由此可得当且仅当 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$,即 $t=\frac{1}{2}$,即 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$ 时,$z_{\max}=\frac{5}{2}$. 所以,所求实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

二、集合间的基本关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A、B,如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素,我们就说这两个集合有包含关系,称集合 A 为集合 B 的子集(subset),记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$),读作"A 含于 B"(或"B 包含 A"). 其数学语言表示形式为:

若对任意的 $x \in A$ 有 $x \in B$,则 $A \subseteq B$.

若非空有限集 A 中有 n 个元素，则有如下结论：

(1)A 的子集个数是 2^n；A 的非空子集的个数是 2^n-1；A 的非空真子集的个数是 2^n-2.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 A 中的所有子集中的元素之总和为：

$$S=2^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

【例 2】 称 $\{1,2,3,\cdots,9\}$ 的某些非空子集为奇子集，如果其中所有数的和为奇数；则共有多少个奇子集？（2013 年北京大学保送生）

【解析】 记 $S=\{1,2,3,\cdots,9\}$ 对于 S 的每个奇子集 A，当 $1\in A$ 时，取 $B=A\backslash\{1\}$，当 $1\notin A$ 时，取 $B=A\cup\{1\}$，则 B 为 S 的偶子集. 反之，若 B 为 S 的偶子集，当 $1\in B$ 时，取 $A=B\backslash\{1\}$；当 $1\notin B$ 时，取 $A=B\cup\{1\}$，于是在 S 的奇子集与偶子集之间建立了一个一一对应关系，故 S 的奇子集与偶子集的个数相等，均为该集合子集个数的一半. 从而共有 $2^8=256$ 个奇子集.

有关奇子集与偶子集的问题，在 1992 年的高中数学联赛中有过更深层次的考查：

设集合 $S_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇(偶) 数，则称 X 为 S_n 的奇(偶) 子集.

(1) 求证 S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(2) 求证：当 $n\geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和.

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

证明：(1) 对于 S_n 的每个奇子集 A，当 $1\in A$ 时，取 $B=A\backslash\{1\}$；当 $1\notin A$ 时，取 $B=A\cup\{1\}$，则 B 为 S_n 的偶子集. 反之，若 B 为 S_n 的偶子集，当 $1\in B$ 时，取 $A=B\backslash\{1\}$；当 $1\notin B$ 时，取 $A=B\cup\{1\}$，于是在 S_n 的奇子集与偶子集之间建立了一个一一对应关系，故 S_n 的奇子集与偶子集的个数相等.

(2) 对于任一 $i\in S_n$，$i>1$，含 i 的 S_n 的子集共有 2^{n-1} 个，其中必有一半是奇子集，一半是偶子集，从而每个数 i，在奇子集的和与偶子集的和中，i 所占的个数是一样的.

而对于元素 1，只要把 S_n 的所有子集按是否含有 3 配对(即在上证中把 1 换成 3 来证)，于是也可知 1 的奇子集与偶子集中占的个数一样，于是可知每个元素都是在奇子集中与偶子集中占的个数一样. 所以 S_n 的所有奇子集的容量的和，与所有偶子集的容量的和相等.

(3) 由于每个元素在奇子集中都出现 2^{n-2} 次，故奇子集的容量和为

$$(1+2+3+\cdots+n)\times 2^{n-2}=n(n+1)\times 2^{n-3}.$$

【例 3】 已知 A、B、C 三个集合满足 $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，则三元有序对 (A,B,C) 的个数为____________________. （2007 年南京大学）

【解析】 本题若从集合角度进行思考非常麻烦，我们从元素角度进行思考，将求集合问题看作元素选集合的问题.

将 $1\sim 9$ 这 9 个数字向 A、B、C 三个集合中投放，我们先讨论数字 1：

(1) 若 1 在 A、B、C 三个集合中只出现了一次，则共有 3 种不同的放置方式；

(2) 若 1 在 A、B、C 三个集合中出现了两次，则共有 3 种不同的放置方式；

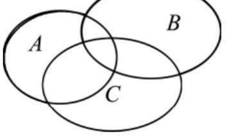
(3) 若 1 在 A、B、C 三个集合中出现了三次，则只有 1 种放置方式.

从而，数字 1 共有 $3+3+1=7$ 种不同的放置方式.

同理可知，其余的 8 个数字的放置方式也各有 7 种不同的放置方式.

故三元有序对 (A,B,C) 的个数为 7^9.

当然，本题的解决也可以借助于韦氏图来解决：如右图所示，可见集合 A、B、C 把 $A\cup B\cup C$ 分成了 7 个区域，从而每个数字都有 7 种不同的选择，故所求的三元有序对 (A,B,C) 的个数为 7^9.



2. 集合相等

判断一组对象能否构成集合，关键是看对象是否满足集合中元素的三个特征，特别看是否满足确定性. 只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的. 在此，我们应深刻理解两个集合相等的概念，并能解决相关问题. 一般的思路如下：

(1) 验证两个集合的元素相同，即两集合中各对应的元素相等；

(2) 利用定义，验证两个集合互为子集；

(3) 若利用描述法表示的集合，则两集合的属性能够相互推出(充要条件)，即等价；

(4) 对于两个有限集合，则元素个数相等，各元素之和相等、之积相等是两个集合相等的必要条件.

【例 4】设 $M=\{x\mid f(x)=x\}$，$N=\{x\mid f(f(x))=x\}$.

(1) 求证：$M\subseteq N$；

(2) 当 $f(x)$ 是一个 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数时，是否有 $M=N$? 如果有，请证明之.

(2010 年浙江大学)

【解析】(1) 证明：若 $M=\varnothing$，显然有 $M\subseteq N$ 成立；

若 $M\neq\varnothing$，任取 $x_0\in M$，即有 $f(x_0)=x_0$，从而 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，即 $x_0\in N$.

由以上两条可知 $M\subseteq N$.

(2) 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个单调增函数时，一定有 $M=N$. 证明如下：

若 $N=\varnothing$，显然有 $N\subseteq M$，结合(1) 可知 $M=N$.

若 $N\neq\varnothing$，任取 $x\in N$，即 $f(f(x))=x$ 下证 $f(x)=x$(用反证法证明之)：

当 $f(x)\neq x$ 时，若 $f(x)>x$，由于 $f(x)$ 是一个 $\mathbf{R}$ 上的增函数，从而一定有 $f(f(x))>f(x)>x$，与 $f(f(x))=x$ 矛盾. 同理，若 $f(x)<x$ 时，矛盾.

故必有 $f(x)=x$，即 $x\in M$，从而 $N\subseteq M$，结合(1) 可知 $M=N$.

综上可知，当 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个单调增函数时，一定有 $M=N$.

第(2) 问中的条件“$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个单调增函数”是十分重要的. 在此条件下，当 $N=\{x\mid f_n(x)=x\}$ 时，仍会有 $M=N$. 但如果“$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个单调减函数”时，则未必有 $M=N$，例如 $f(x)=-x$，易得 $M=\{x\mid f(x)=x\}=\{0\}$，而 $N=\{x\mid f(f(x))=x\}=\mathbf{R}$，显然 $M\neq N$.

【例 5】设 $\mathbf{Q}$ 是有理数集，集合 $X=\{x\mid a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Q},x\neq 0\}$，在下列集合中：

(1)$\{2x\mid x\in X\}$　(2)$\left\{\frac{x}{\sqrt{2}}\mid x\in X\right\}$　(3)$\left\{\frac{1}{x}\mid x\in X\right\}$　(4)$\{x^2\mid x\in X\}$

与 X 相同的集合有(　　)

A. 4 个　B. 3 个　C. 2 个　D. 1 个　(2009 年复旦大学)

【解析】对于(1)，由于 $2x=2(a+b\sqrt{2})=2a+2b\sqrt{2}$，$a、b\in\mathbf{Q}$，且可取遍所有的有理数，所以 $\{2x\mid x\in X\}=X=\{x\mid a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Q},x\neq 0\}$.

对于(2) 由于 $\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=b+\frac{a}{2}\sqrt{2}$，$a、b\in\mathbf{Q}$，因为 $b、\frac{a}{2}\in\mathbf{Q}$，且可取遍所有的有理数，所以 $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}x\mid x\in A\right\}=X=\{x\mid a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Q},x\neq 0\}$.

对于(3)，由于 $\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$，$a、b\in\mathbf{Q}$，设 $Q_1=\frac{a}{a^2-2b^2}$，$Q_2=\frac{-b}{a^2-2b^2}$，则 $a=\frac{Q_1}{Q_1^2-2Q_2^2}$，$b=\frac{-Q_2}{Q_1^2-2Q_2^2}$，因为对任意的 Q_1、Q_2，都能找到 a、b 与之对应，所以 Q_1、Q_2 可取遍所有的有理数. 所以 $\left\{\frac{1}{x}\mid x\in X\right\}=X=\{x\mid a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Q},x\neq 0\}$.

对于(4)，由于 $x^2=(a+b\sqrt{2})^2=(a^2+2b^2)+2ab\sqrt{2}$，$a、b\in\mathbf{Q}$，因为 $a^2+2b^2\geqslant 0$，所以 a^2+2b^2 不能取遍所有的有理数，从而 $\{x^2\mid x\in X\}\neq X=\{x\mid a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Q},x\neq 0\}$. 故本题的答案选 B.

三、容斥原理(有限集合元素个数)

我们首先约定：若 X 是一个有限集，则 X 内所含的全部元素的个数用 $Card(X)$ 表示.

定义 1　把一个集合 M 分成若干个非空子集：$A_1,A_2,\cdots,A_n$. 如果满足：

$$(1)A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n);\quad (2)\bigcup_{i=1}^{n}A_i=M.$$

那么称这些子集的全体为集合 M 的一个 $n-$分划，其中每一个子集叫做集合 M 的一个类.

由集合分划的定义，容易证明有限集的一个非常有用的性质：

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是有限集 M 的 $n-$分划，则 $Card(M)=\sum_{i=1}^{n}Card(A_i)$，这是一个基本的计数公式，被称为加法原理.

如果 $A、B、C$ 是任意的三个有限集，那么有以下公式：

(1)$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$；

(2)$Card(A\cup B\cup C)=Card(A)+Card(B)+Card(C)-Card(A\cap B)-Card(B\cap C)-Card(A\cap C)+Card(A\cap B\cap C)$；

(3)$Card(A\cap B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cup B)$；

(4) 若 $B\subseteq A$，则 $Crad(B)=Card(A)-Card(C_AB)$；

(5)$Card(A\cap B\cap C)=Card(A\cup B\cup C)-Card(A)-Card(B)-Card(C)+Card(A\cap B)+Card(B\cap C)+Card(A\cap C)$.

一般地,有关 n 个集合的并集或交集的补集的元素个数的类似公式成立,称该结论为容斥原理.

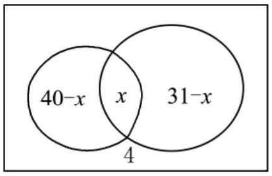
【例 6】有 50 名学生参加跳远和铅球两项测试,跳远和铅球测验成绩分别及格的有 40 人和 31 人,两项测试成绩均不及格的有 4 人,两项测验都及格的有多少人? (2008 年武汉大学)

【解析】记 $A=\{$跳远测验成绩及格的学生$\}$,$B=\{$铅球测验成绩及格的学生$\}$,依题意,$Card(A)=40$,$Card(B)=31$,两项测验都及格的即为 $A\cap B$. 又 $Card(A\cup B)=50-4=46$,由容斥原理,得

$$Card(A\cap B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cup B)=40+31-46=25$$

即两项测验都及格的学生有 25 人.

本题是一道涉及容斥原理的试题,除了用容斥原理解决,还可结合韦氏图进行求解:设两项测验都及格的人数有 x 人,则有方程 $x+(31-x)+(40-x)+4=50$,解得 $x=25$(如右图). 关于容斥原理的题目千变万化,但无论怎样变化都离不开基本公式和韦氏图,应该熟练掌握这两种方法,注重这两种方法的结合,并争取针对个性化的题目采用技巧解题.



【例 7】给出 5 个数字 1,2,3,4,5,排列这 5 个数字,要求第 1 个到第 $i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 个位置不能由 $1,2,\cdots,i$ 的数字组成,如 21534 不可以,因为第 1 位到第 2 位是由 1,2 组成的,同理 32145 也不可以. 求满足要求的所有可能的组合数. (2009 年浙江大学)

【解析】用容斥原理解决:令 $A_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为 1,2,3,4,5 的排列所组成的集合,它的任一个元素的前 i 个数是 $1,2,\cdots,i$ 的一个排列. 用 $Card(A)$ 表示集合 A 中元素的个数,则

$Card(A_1)=4!=24$,$Card(A_2)=2!\times3!=12$,$Card(A_3)=3!\times2!=12$,

$Card(A_4)=4!=24$,$Card(A_1\cap A_2)=3!=6$,$Card(A_1\cap A_3)=2!\times2!=4$,

$Card(A_1\cap A_4)=3!=6$,$Card(A_2\cap A_3)=2!\times2!=4$,$Card(A_2\cap A_4)=2!\times2!=4$,

$Card(A_3\cap A_4)=3!=6$,$Card(A_1\cap A_2\cap A_3)=2!=2$,$Card(A_1\cap A_2\cap A_4)=2!=2$,

$Card(A_1\cap A_3\cap A_4)=2!=2$,$Card(A_2\cap A_3\cap A_4)=2!=2$,$Card(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=1$.

所以,$Card(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=24+12+12+24-6-6-6-4-4-4+2+2+2+2-1=49$.

故满足要求的所有可能的组合数为 $120-49=71$ 个.

四、集合与映射、计数

定义 2 设 A 和 B 是两个集合(二者可以相同). 如果对于每个 $x\in A$,都有唯一确定的 $y\in B$ 与之对应,则称这个对应关系为 A 到 B 的映射,记作 $A\to B$(或 $x\in A\to y\in B$). 这时,$y=f(x)\in B$ 称为 $x\in A$ 的象,而 x 称为 y 的原象. 特别当 A 和 B 都是数集时,映射 f 称为函数.

定义 3　设 f 为 A 到 B 的一个映射，

(1) 如果对于任何 $x_1,x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为单射；

(2) 如果对于任何 $y \in B$，都有 $x \in A$，使得 $f(x) = y$，则称 f 为满射；

(3) 如果映射 f 既是单射又是满射，则称 f 为双射；

(4) 如果 f 为满射且对任何 $y \in B$，恰有 A 中的 m 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得 $f(x_i) = y$，$i = 1,2,\cdots,m$，则称 f 为倍数(倍数为 m 的)映射.

定理 1　设 A 和 B 都是有限集，f 为 A 到 B 的一个映射，

(1) 如果 f 为单射，则 $Card(A) \leqslant Card(B)$；

(2) 如果 f 为满射，则 $Card(A) \geqslant Card(B)$；

(3) 如果 f 为双射，则 $Card(A) = Card(B)$；

(4) 如果 f 为倍数为 m 的倍数映射，则 $Card(A) = mCard(B)$.

定理 2　设有限集 $A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$f$ 是 A 到 A 上的映射，记 $f_1(x) = f(x)$，$f_{r+1}(x) = f[f_r(x)](x \in A, r \in \mathbf{N}^*)$，则 f 是一一映射的充要条件是：对任意的 $a_i \in A$，存在 $m_i \in \mathbf{N}^*$，$1 \leqslant m_i \leqslant n$，使得 $f_{m_i}(a_i) = a_i$，而 $f_s(a_i) \neq a_i(s \in \mathbf{N}^*, 1 \leqslant m \leqslant m_i - 1)$.

【例 8】设 $S_n = \{1,2,\cdots,n\}$，$f(x)$ 是 S_n 到自身的一一映射.

(1) $f(x)$ 有多少种？

(2) 讨论 $n = 4,5$ 时，满足 $f(f(i)) = i(i \in S_n)$ 的个数；

(3) 将(2)的结果推广到 n.　　　　(2011 年中国科技大学保送生)

【解析】答案为(1) $n!$；(2) 10，26；(3) $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \dfrac{A_n^{2k}}{2^k k!}$.

这里我们重点解读(3)，即下述问题：

函数 $f(x)$ 定义域和值域都是 $\{1,2,\cdots,n\}(n \geqslant 2)$，满足 $f(f(x)) = x$，则这样的函数有多少个？

解析如下：设 $f(x)$ 的定义域为 $S_n = \{1,2,\cdots,n\}$，将 S_n 中的元素分成两类：

① $M = \{x \mid f(x) = x, x \in S_n\}$；② $N = \{x \mid f(x) \neq x, x \in S_n\}$.

当 $x \in M$ 时，显然满足条件 $f(f(x)) = x$；

当 $x \in N$ 时，设 $f(x) = y(y \neq x)$，则 $f(f(x)) = f(y)$.

又由题设知 $f(f(x)) = x$，所以 $f(y) = x(x \neq y)$，必有 $y \in N$，即 $f(x) \in N$.

所以集合 N 中元素的个数必为偶数个，且可按如下方式分组：

若 $f(x) = y, f(y) = x(y \neq x)$，则将 x,y 视为一组(可以称为一个“二元循环”：$x \to y \to x(y \neq x)$)，下面根据上述①②来建立函数：

设集合 N 中元素个数为 $2i(i \in \mathbf{N})$.

当 $i = 0$ 即 $N = \varnothing$ 时，满足条件的函数只有一个，即 $f(x) = x, x \in \{1,2,\cdots,n\}$；

当 $i \neq 0$ 时，从集合 A 的 n 个元素选出 $2i(\leqslant n)$ 个元素，构成集合 N，再将 N 中元素平均分成 i 组，对每一组的两个元素按照二元循环建立对应关系，所有方法数为 $\dfrac{C_n^2 C_{n-2}^2 \cdots C_{n-2(i-1)}^2}{i!}$.

对于集合 A 中余下的 $n-2i$ 个元素，使它们与自己对应即可，此时只有一种方法.