管 理 数 学

上 册

（干部专修科教材）

中央农业管理干部学院华中农学院分院

一九八五年二月

目 录

第一编 线性代数 ---------- 1

第一章 行列式 ---------- 1

第一节 二阶行列式的计算及应用 ---------- 1

第二节 三阶行列式的计算及应用 ---------- 6

第三节 行列式的性质 ---------- 12

第四节 行列式的降阶计算公式 ---------- 16

第五节 高阶行列式的计算及应用 ---------- 22

第二章 矩阵 ---------- 26

第一节 矩阵的概念 ---------- 26

第二节 矩阵的运算 ---------- 31

第三节 逆矩阵 ---------- 37

第四节 矩阵的秩 ---------- 45

第五节 矩阵的初等变换 ---------- 48

第三章 解线性方程组 ---------- 52

第一节 消元法 ---------- 52

第二节 有解判定定理 ---------- 57

第三节 消元法的表格形式 ---------- 61

第四节 迭代法 ---------- 66

第二编 线性规划 ---------- 71

第一章 线性规划问题的数学模型 ---------- 71

第一节 物资调运问题的实例及数学模型 ---------- 71

第二节 作物布局问题的实例及数学模型 ---------- 76

第三节 配料问题的实例及数学模型 ---------- 79

第四节 分派问题的实例及数学模型 ---------- 81

第五节 生产组织与管理问题的实例及数学模型 ---------- 83

第六节 数学模型的标准形式 ---------- 86

第二章 解线性规划问题的主要方法 ---------- 92

第一节 基本概念 ---------- 92

第二节 消元法 ---------- 93

第三节 图解法 ---------- 98

第四节　对应于基B的单纯形表……104
第五节　换基迭代……112
第六节　单纯形法……124
第七节　对偶线性规划……127
第八节　另一种形式的单纯形表……139
第三章　解线性规划问题的其他方法……151
第一节　表上作业法……151
第二节　图上作业法……163
第三节　场库设置选优法……177
第四节　匈牙利法……185
第五节　解乘数法……194

第一编 线性代数

线性代数这一古老的数学分支起源于解线性方程组。现在，它已经有了十分丰富的内容和十分广泛的应用。在这一章，我们将学习线性代数中解线性方程组这一内容。对于一个已知的n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

要能够回答下列三个问题：(1)它有没有解？(2)如果有解的话，会有多少解？(3)怎样求解？

为此，先学习线性代数中的另外两个内容：行列式及矩阵，并利用行列式及矩阵来解n元线性方程组。学习的顺序是：(1)行列式，(2)矩阵；(3)解线性方程组。在后续课及农村经济管理工作中，还要用行列式及矩阵来解决一些别的问题。也就是说，行列式及矩阵不只是用来解线性方程组。

第一章 行列式

第一节 二阶行列式的计算及应用

1 二阶行列式的定义

四个数排成两行两列并写在两竖线之间所成的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

叫做二阶行列式，a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}这四个数叫做二阶行列式的元素。其中，a_{11}在第一行第一列，a_{12}在第一行第二列，a_{21}在第二行第

一列，a_{22}在第二行第二列.

计算时，既要考虑从左上角a_{11}至右下角a_{22}的连线，又要考虑从右上角a_{12}至左下角a_{21}的连线，分别叫做主对角线与副对角线.

为解二元线性方程组，我们定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

并且称$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$为二阶行列式的值.

求二阶行列式的值，又叫做计算二阶行列式.通过计算二阶行列式，可以求出二元线性方程组的解，使二元线性方程组求解的手续得到简化.为此，先证明解二元线性方程组的克莱姆公式.

2　解二元线性方程组的克莱姆公式

若已知二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases}$$

其中，x_1、x_2为两个未知数，a_{11}、a_{12}、b_1分别为第一个方程中x_1、x_2的系数及方程右边的常数项，a_{21}、a_{22}、b_2分别为第二个方程中x_1、x_2的系数及方程右边的常数项.

先用加减消元法解此二元线性方程组.

①$\times a_{21}$得　　$a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}$,

②$\times a_{11}$得　　$a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11}$,

两式相减得

$$(a_{12}a_{21}-a_{22}a_{11})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11},$$

或 $$(a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21},$$

当 $a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 時，

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}.$$

又① $\times a_{22}$ 得 $\quad a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22},$

② $\times a_{12}$ 得 $\quad a_{21}a_{12}x_1+a_{22}a_{12}x_2=b_2a_{12},$

两式相减得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ 時，

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}.$$

上述 x_1、x_2 即为二元线性方程组的解．它们都是用分式来表示的，有相同的分母，并且各个分子的构成也有一定的规律．

若记 x_1 与 x_2 的分母

$$a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=D,$$

x_1 的分子

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=D_1,$$

x_2 的分子

$$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=D_2,$$

则当 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$ 時，可以按公式

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

来求二元线性方程组的解，此公式被称为克莱姆公式．

式中的三个行列式可按下述规律构成：

(1) 行列式D中四个元素的排列与二元线性方程组中未知数x_1、x_2的系数所成的排列相同，D叫做二元线性方程组的系数行列式；

(2) 行列式D_1是将系数行列式D中x_1的系数a_{11}、a_{21}用方程右边的常数项b_1、b_2代替后所得到的行列式；

(3) 行列式D_2是将系数行列式D中x_2的系数a_{12}、a_{22}用方程右边的常数项b_1、b_2代替后所得到的行列式．

下面，举例说明此克莱姆公式的应用．

例1、解二元线性方程组 $\begin{cases}3x_1+5x_2=13\\2x_1+7x_2=16.\end{cases}$

解：$D=\begin{vmatrix}3&5\\2&7\end{vmatrix}=3\times7-5\times2=11$，

$D_1=\begin{vmatrix}13&5\\16&7\end{vmatrix}=13\times7-5\times16=11$，

$D_2=\begin{vmatrix}3&13\\2&16\end{vmatrix}=3\times16-13\times2=22$，

$\therefore x_1=\frac{11}{11}=1$，$x_2=\frac{22}{11}=2$．

例2、解二元线性方程组 $\begin{cases}5x_1+2x_2=11\\10x_1+7x_2=16.\end{cases}$

解：$D=\begin{vmatrix}5&2\\10&7\end{vmatrix}=5\times7-2\times10=15$，

$D_1=\begin{vmatrix}11&2\\16&7\end{vmatrix}=11\times7-2\times16=45$，

$D_2=\begin{vmatrix}5&11\\10&16\end{vmatrix}=5\times16-11\times10=-30$，

$\therefore x_1=\frac{45}{15}=3$，$x_2=\frac{-30}{15}=-2$．

例3、解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2=7 \\ x_1-3x_2=-2 \end{cases}$.

解：$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times1=-7$,

$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=7\times(-3)-1\times(-2)=-19$,

$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-7\times1=-11$,

$\therefore x_1=\dfrac{-19}{-7}=\dfrac{19}{7}$，$x_2=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}$.

例4、解二元线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2=2 \\ a^2x_1+b^2x_2=a+b \end{cases}$.

解：$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}=ab^2-ba^2=ab(b-a)$,

$D_1=\begin{vmatrix} 2 & b \\ a+b & b^2 \end{vmatrix}=2b^2-b(a+b)=b(b-a)$,

$D_2=\begin{vmatrix} a & 2 \\ a^2 & a+b \end{vmatrix}=a(a+b)-2a^2=a(b-a)$.

$\therefore$ 当 $a\neq0$、$b\neq0$ 且 $a\neq b$ 時，

$x_1=\dfrac{b(b-a)}{ab(b-a)}=\dfrac{1}{a}$，$x_2=\dfrac{a(b-a)}{ab(b-a)}=\dfrac{1}{b}$.

习 题 1－1

1、计算二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} -3 & 21 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 10 & -9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$；

2、解二元线性方程组：

(1) $\begin{cases} 11x-2y=5 \\ 3x+7y=24 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} 5x+2y=12 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2=2 \\ 2x_1-x_2=5 \end{cases}$；　　(4) $\begin{cases} x_1+5x_2=6 \\ 3x_1-6x_2=4 \end{cases}$.

3、一只船的载重量是520吨，容积是2000立方米.现有甲、乙两种货物，甲种货物每吨的体积是2立方米，乙种货物每吨的体积是8立方米.问两种货物应该各装多少吨，才能最大限度地利用船的载重量和容积？

提示：所谓最大限度地利用船的载重量和容积，就是使两种货物重量的总和等于520吨，体积的总和等于2000立方米.

4、甲、乙两工厂实行经济体制改革以后，平均月产量值由以前的36万元增至40万元.如果甲厂月产值的平均数为以前的112%乙厂月产值的平均数为以前的110%，求甲、乙两厂月产值的平均数比以前分别增加多少万元？

第二节　三阶行列式的计算及应用

1　三阶行列式的定义

九个数排成三行三列并写在两竖线之间所成的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做三阶行列式，a_{11}、a_{12}、a_{13}、$\cdots$ 这九个数叫做三阶行列式的元素．其中，任一元素 a_{ij} 右下角的第一个标号 i 表示这一元素在第 i

行(i=1、2、3)，第二个标号j表示这一元素在第j列(j=1、2、3)，即a_{ij}这一元素在第i行第j列．例如a_{23}在第二行第三列，a_{32}在第三行第二列．

与计算二阶行列式相似，计算三阶行列式的时候，也要考虑从左上角a_{11}至右下角a_{33}的连线，也要考虑从右上角a_{13}至左下角a_{31}的连线，也分别叫做主对角线与副对角线．

为解三元线性方程组，我们定义三阶行列式

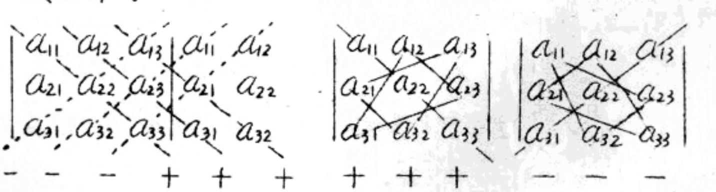
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

并且称右边的代数和为三阶行列式的值．

求三阶行列式的值，又叫做计算三阶行列式．计算时，可采用下面两种化难为易的方法．

(1) 补写两列法：第一步，如图所示，在第三列的右边将第一列与第二列再写一遍；第二步，画出主对角线、副对角线以及与主对角线平行或者与副对角线平行的连线；第三步，将上述六条连线上各自的三元素相乘；第四步，将各乘积带上相应的符号后，求出它们的代数和．



(2) 画三角形法：第一步，如图所示，画出主对角线以及有一条边平行于主对角线的三角形 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 和 $a_{13}a_{21}a_{32}$；第二步，画出副对角线以及有一条边平行于副对角线的三角形 $a_{11}a_{23}a_{32}$、和 $a_{12}a_{21}a_{33}$；第三步，将两对角线上各自的三元素相乘，将各个三角形顶点上各自的三元素相乘；第四步、将各乘积带上相应的符号后，求出它们的代数和．

对于初次接触三阶行列式的同志，建议在计算三阶行列式時，采用补写两列法．

2 解三元线性方程组的克莱姆公式

与二阶行列式的计算及应用相似，通过计算三阶行列式，可以求出三元线性方程组的解，使三元线性方程组求解的手续得到简化．

下面，先介绍解三元线性方程组的克莱姆公式．

若已知三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & ③ \end{cases}$$

其中，x_1、x_2、x_3 为三个未知数．a_{11}、a_{12}、a_{13}、b_1 分别为第一个方程中 x_1、x_2、x_3 的系数及方程右边的常数项，a_{21}、a_{22}、a_{23}、b_2 分别为第二个方程中 x_1、x_2、x_3 的系数及方程右边的常数项，a_{31}、a_{32}、a_{33}、b_3 分别为第三个方程中 x_1、x_2、x_3 的系数及方程右边的常数项．

当上述三元线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,$$

并且

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

時，用加减消元法可以解出上述三元线性方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

以后，将此结果称为解三元线性方程组的克莱姆公式．其中，行列式D、D_1、D_2、D_3的构成规律，与解二元线性方程组的克莱姆公式中行列式D、D_1、D_2的构成规律相似．

即：(1)系数行列式D中九个元素的排列与三元线性方程组中未知数x_1、x_2、x_3的系数所成的排列相同；

(2)行列式D_1是将系数行列式D中x_1的系数a_{11}、a_{21}、a_{31}用方程右边的常数项b_1、b_2、b_3代替后所得到的行列式；

(3)行列式D_2是将系数行列式D中x_2的系数a_{12}、a_{22}、a_{32}用方程右边的常数项b_1、b_2、b_3代替后所得到的行列式；

(4)行列式D_3是将系数行列式D中x_3的系数a_{13}、a_{23}、a_{33}用方程右边的常数项b_1、b_2、b_3代替后所得到的行列式；

下面举例说明此克莱姆公式的应用．

例1、解三元线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\ 2x_1+4x_2+x_3=7\\ 3x_1+2x_2+9x_3=14.\end{cases}$

解： $$D=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&1&2\\2&4&1&2&4\\3&2&9&3&2\end{array}\right.=36+6+12-36-2-36=-20,$$

$$D_1=\left|\begin{array}{ccc|cc}6&2&3&6&2\\7&4&1&7&4\\14&2&9&14&2\end{array}\right.=216+28+42-168-12-126=-20,$$

$$D_2=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&6&3&1&6\\2&7&1&2&7\\3&14&9&3&14\end{array}\right.=63+18+84-63-14-108=-20,$$

$$D_3=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&6&1&2\\2&4&7&2&4\\3&2&14&3&2\end{array}\right.=56+42+24-72-14-56=-20,$$

$$\therefore\ x_1=\frac{-20}{-20}=1,\quad x_2=\frac{-20}{-20}=1,\quad x_3=\frac{-20}{-20}=1.$$

例2、解三元线性方程组 $\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1\\ x_1-5x_2+3x_3=2\\ x_1-x_2+x_3=-1.\end{cases}$

解： $$D=\left|\begin{array}{ccc|cc}2&-4&1&2&-4\\1&-5&3&1&-5\\1&-1&1&1&-1\end{array}\right.=-10-12-1-(-5)-(-6)-(-4)=-8,$$

$$D_1=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&-4&1&1&-4\\2&-5&3&2&-5\\-1&-1&1&-1&-1\end{array}\right.=-5+12-2-5-(-3)-(-8)=11,$$

$$D_2=\left|\begin{array}{ccc|cc}2&1&1&2&1\\1&2&3&1&2\\1&-1&1&1&-1\end{array}\right.=4+3-1-2-(-6)-1=9,$$

$$D_3=\left|\begin{array}{ccc|cc}2&-4&1&2&-4\\1&-5&2&1&-5\\1&-1&-1&1&-1\end{array}\right.=10-8-1-(-5)-(-4)-4=6,$$

$$\therefore\ x_1=\frac{11}{-8}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{9}{-8}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}.$$

习 题 1－2

1．计算三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 10 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$；

2、解三元线性方程组：

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+4y+z=7 \\ 3x+2y+9z=14 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3y=10 \\ 5y-z=10 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+7x_3=-9 \\ 2x_2+3x_3=-8 \end{cases}$；

(4) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=3 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2+3x_3=7 \end{cases}$；

3、有三种化学肥料：甲种每公斤含N 53克、P 8克、K 2克；乙种每公斤含N 64克、P 10克、K 0.6克；丙种每公斤含N 70克、P 5克、K 1.4克．问三种化学肥料应各取多少公斤，混合后才能得到总重23公斤而含P总数为149克、含K总数为30克的混合肥料？

4、某工厂每天能生产甲种机器部件300台，或者生产乙种机器部件500台，或者生产丙种机器部件600台．如果甲、乙、丙这三种机器部件按1:1:1配套才能组装成一台机器，问这个工厂在一个月（按28天计算）

内生産甲、乙、丙三种机器部件的时间各为多少天，才能使三种机器部件全部配套组装成机器出厂？

第三节 行列式的性质

解四元及多于四元的线性方程组，须用四阶及四阶以上的行列式。但是，四阶及四阶以上的行列式按定义进行计算的过程是比较复杂的。

例如，四阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

按定义进行计算的结果是

$$\begin{aligned}
&a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}\\
&+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}\\
&+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}\\
&+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\\
&-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}\\
&-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}\\
&-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}\\
&-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.
\end{aligned}$$

此结果中共有24项，每一项都是取自不同行不同列的四个元素相乘。要求出此结果，必须做 24×3 即72次乘法和23次加减法。

由此而想到，行列式的阶数愈高，按定义进行计算時，所必须

做的乘法和加减法的次数也就越多，计算的过程也就更加复杂.

为简化行列式的计算，我们先研究行列式的性质. 研究時，以三阶行列式为例.

性质1. 行列式的某一行(或列)中所有的元素都乘以同一数K，等于用数K乘行列式的值.

或者说，行列式中某一行（或列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

例如:
$$\begin{array}{|ccc|cc} 2\times2 & -3 & 1 & 2\times2 & -3 \\ 2\times1 & 1 & 1 & 2\times1 & 1 \\ 2\times3 & 1 & -2 & 2\times3 & 1 \end{array}$$

$$=2\times(-4)+2\times(-9)+2\times1-2\times3-2\times2-2\times6=-46.$$

而
$$\begin{array}{|ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}=-4-9+1-3-2-6=-23,$$

故
$$\begin{vmatrix} 2\times2 & -3 & 1 \\ 2\times1 & 1 & 1 \\ 2\times3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

性质2、互换行列式的两行(或两列)后，行列式的值改变符号.

例如:
$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 2 \end{array}=36+6+12-36-2-36=-20.$$

将第一行与第三行互换后,
$$\begin{array}{|ccc|cc} 3 & 2 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}=36+2+36-36-6-12=20;$$

将第一行与第二行互换后.
$$\begin{array}{|ccc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 2 \end{array}=36+36+2-6-12-36=20;$$

将第二行与第三行互换后，

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&1&2\\3&2&9&3&2\\2&4&1&2&4\end{array}\right. = 2+36+36-12-36-6=20;$$

将第一列与第三列互换后，

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}3&2&1&3&2\\1&4&2&1&4\\9&2&3&9&2\end{array}\right. = 36+36+2-36-12-6=20;$$

将第一列与第二列互换后，

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}2&1&3&2&1\\4&2&1&4&2\\2&3&9&2&3\end{array}\right. = 36+2+36-12-6-36=20;$$

将第二列与第三列互换后，

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1&3&2&1&3\\2&1&4&2&1\\3&9&2&3&9\end{array}\right. = 2+36+36-6-36-12=20;$$

性质3．行列式中某一行(或列)的全部元素乘以数k后，加到另一行(或列)的对应元素上去，行列式的值不变．

例如：$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1&5&2&1&5\\2&4&3&2&4\\4&2&3&4&2\end{array}\right. = 12+60+8-32-6-30=12,$$

将第一行的全部元素乘以-2后加到第二行的对应元素上去，得到

$$\begin{vmatrix}1&5&2\\2-2&4-10&3-4\\4&2&3\end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc}1&5&2&1&5\\0&-6&-1&0&-6\\4&2&3&4&2\end{array}\right. = -18-20+0-(-48)-(-2)-0=12;$$

将第一行的全部元素乘以-4后加到第三行的对应元素上去，得到

$$\begin{vmatrix}1&5&2\\2&4&3\\4-4&2-20&3-8\end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc}1&5&2&1&5\\2&4&3&2&4\\0&-18&-5&0&-18\end{array}\right. = -20+0-72-0-(-54)-(-50)=12;$$