微机在设备故障数值诊断中的应用

（内部资料）

陕西省科技情报研究所

1985年

目　录

一、概　述

数值诊断方法是近年发展起来的设备自检工程的一个重要分支。它是利用微型电子计算机这个强有力的工具，结合数学的信息理论、数据处理技术，对有故障或即将发生故障的设备的外观征兆、检测信息进行数学加工分析，做出定量（计量或数值）诊断。

数值诊断方法与我国目前各行业中，大多数设备使用人员凭个人经验诊断不同。经验诊断是根据设备的外观征兆、已有的检测数据从个人的经验出发，做出最可能的判断。这样，诊断的准确性与个人的学识水平、经验和责任心等有直接的关系。而数值诊断则不同，它仅依赖于收集使用的大量经验诊断实例和这些资料处理的方式。诊断实例越多，资料越详细可靠，再加上分析得当，就可能得到比较正确的诊断结果。换言之，数值诊断是收集大量技术能手的经验，将其分析、加工，形成一定的科学理论体系，达到具有普遍使用价值的目的，由此排除了个人经验诊断过程中的主观因素，从而更加接近客观实际。

设备工作性能的直接表现是各状态变量的数值。由于大型设备（如飞机、航空发动机、火车、轮船、压气机等）的复杂性决定了体现设备工况的状态参数非常多，并难于全部检测，例如比较真实地反映压气机某一截面的瞬间压力场，就需要安置20～80个压力测头，这在实验室中尚可做到，但在使用的设备中，目前还很难实现，况且，由于各状态参数之间关系的复杂性又决定了想全部用机理分析方法建立它们之间相互关系的数学模型极为困难。由于这两方面的原因，一般来讲，全部根据状态变量，依靠机理分析直接对故障作出判断，目前还很难办到。

现在，大型设备在使用现场，对故障诊断的方法，大部分仍然是依据与各状态变量有统计相关性的各种外观征兆（例如：振动、声音以及故障发生时的工作环境等）间接地对设备是否处于故障状态进行综合分析判断。遗憾的是，这些外观征兆，大部分仅仅是设备发生故障时所表现的现象，而不是导致故障发生的真正原因。另外，故障往往是复杂的，一种故障可以导致多种征兆，同样的故障会出现不同的征兆，而不同的故障也会出现同样的征兆。例如航空喷气发动机，排气温度超过规定值，既可能是燃料调节系统发生故障或某一燃气部件出了问题，也可能是滑油系统发生故障，甚至可能是操纵使用不当。显然，依据一两种征兆下诊断结论，往往是偏离实际的。为了正确的判断故障，就需要一个征兆群。例如，对飞机某次空中停车的原因作出结论，就需要知道该飞机的飞行高度、速度、操纵情况、发动机转速、排气温度、座舱内各种信号灯指示情况等一群外观征兆。当然，通常情况下，不同的故障原因所表现出来的征兆有某些是相同的，也一定有某些是不相同的。目前的诊断就是依据征兆群的整体区别逐步缩小诊断范围并最终作出结论。就这一点来说，数值诊断过程与目前外场诊断过程相仿，也是依据大量外观征兆，经数值化后，综合分析而得出诊断结论。但这时综合分析的工具不是某一个人的头脑，而是微型电子计算机；综合分析的依据不是某一个人的经验，而是以往各家的大量经验和外场确诊的实例，无疑，这与人比较就大大提高了诊断的准确性与快速性。

综上所述，数值诊断不是从原因上去寻找征兆与故障之间的本质关系，而是利用以往的大量已确诊的实例，从这些已存在的征兆群与故障的现实资料出发，确定征兆群与故障之间的统计规律性。这可以弥补寻找理论模型的困难，而同时，它的诊断结果势必带有某种统计性质，它只能告诉我们某种故障以多大的可能性发生，以及做出这种判断所可能犯的错误。还需指出的是：征兆与故障之间的统计规律性，并非是一成不变的，往往是因时、因地而异。例如，就某航空燃气涡轮喷气发动机的起动温度高的故障来说，在南方潮湿地区可能是起动活门顶杆锈蚀的原因居多，而在北方寒冷地区则可能是薄膜老化居多；又如，引起发动机喘振熄火停车的原因，以往是放气带离心活门抱轴占多数，而现在由于工厂对该零件的结构采取了相应改进措施，使抱轴的故障已大大减少。这就是说，为了不断提高诊断的可靠性，微机也必需和人一样，能在实际诊断过程中，不断积累经验和学习新的经验，即需随时收集不同时刻，不同环境的实际诊断资料，并通过比较、评价和分析处理，保留那些对诊断有重要作用的经验资料，不断排除那些对诊断不太重要的或者已经过时的资料，从而不断地提高诊断的可靠性和有效性。而这正是发挥数值诊断优越性的地方，它能够不断接收新的诊断实例，不断修改诊断的模型，使它更加符合实际。

这样，以采用微型机为主要工具的数值诊断，由于采用了大量的以往实际诊断资料，及综合了各家技术能手的诊断经验，从而排除了个人经验诊断的局限性，提高了诊断故障的准确性；由于微型机有极快的计算速度从而提高了诊断效率；由于微型机体积小、重量轻、携带方便，是野外作业、交通运输最理想的技术咨询工具。显然，将微机应用于设备的故障诊断，可大大避免了因诊断错误而带来的大拆大卸，盲目更换零部件，盲目进行试车、甚至试飞、试航，从而有效地提高了排故效率与维修的经济效益。它将是由经验维修过渡到科学维修的重要途径之一。

微机数值诊断方法，主要依赖于微机记忆的资料，诊断的方法以及为实现这些方法的计算程序，这些都是人赋予它的功能，因此，它不能比这些做得更多。如果人们赋予它的计算程序没有诊断设备某种故障的功能，它就不可能诊断该种故障；另外，不正确的资料的输入也会带来不正确的诊断结果，不正确的诊断方法的选择也会大大降低诊断的可靠性。由此，要提高微机数值诊断的实际使用价值，一方面对各种实际诊断经验需要有一套完善、正确可靠的记录与统计方法，另一方面需要对各种诊断理论不断深入的研究和实践。前一个问题，由于本资料篇幅有限，另作介绍，本资料着重介绍：有关布尔代数、信息论、数理逻辑以及应用模糊数学等微机数值诊断方法。这些方法，我们已经应用到实际中去，但是尚需在今后的实践中不断充实与提高。

二、模糊数学的基本概念及其在故障诊断中的应用

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学，是一门崭新的学科。它自1965年由美国著名控制论专家查德（L·A·Zadeh）教授创始以来，发展十分迅速。它为复杂系统或未完善系统（特别是人文系统和涉及人的经验的系统）的分析与决策过程找到了一种新的简捷的数学处理方法。在我国应用模糊数学与计算机相结合，作医疗诊断（特别是中医诊断）、气象预报等方面已取得明显的效果。它是一种语言分析数学模式，通过人机直接对话来有效地吸取人的经验，使人脑部分地过渡到“电脑”。

由于现时故障诊断中所用的外观征兆、诊断语言，尤其是人脑思维特点和人的经验，大都具有强烈的模糊（Fuzzy）性，这就给模糊数学带来用武之地。对某些已积累有丰富的实际故障诊断经验资料的设备而言，使用模糊数学为计算机建立数值诊断数学模型具有一定的优越性，因为这种数学模型的输入与输出皆为现场设备故障诊断中常用的习惯语言，不需另行检测其它信息，并且输出可用中文显示，故方便使用，利于推广。

本节将介绍在数值诊断中用到的一些有关模糊数学的主要概念，及应用模糊数学为计算机建立数学模型的具体做法。

（一）隶属函数与模糊集合

计算机数值诊断方法，主要是利用随机事件发生的统计规律性。某个事件可能发生，也可能不发生，这是随机性，但这时，事件本身的含义是明确的。比如“主冷气系统压力小于130公斤/厘米^2”这件事，事件“小于130公斤/厘米^2”的含义是清晰的，尽管对某一主冷气系统来说这件事可能发生，也可能不发生。如果我们说“冷气压力较低”，那么“较低”本身的含义就不清晰。压力小于100公斤/厘米^{2}时当然算“较低”，那么压力在105公斤/厘米^{2}时算不算较低呢？因此“较低”这一事件即是一个模糊事件。在外场的诊断语言中，这种模糊事件是很多的。比如“排气温度低”、“振动大”等，“低”，低到什么程度，“大”，大到什么程度，都是模糊的。描述模糊事件的工具即是模糊集合。

对于随机事件来讲，我们可以用普通的集合来表示。用U=〔0,160〕表示所有冷气压力的全体，称为论域，“冷气压力小于130公斤/厘米^2”，这一随机事件可表示为$A=\{x|0\leqslant x<130\}$，A是U的一部分，称为子集，随机事件即是论域中的一个子集。对于论域中包含的元素来讲，要么属于随机事件，要么不属于随机事件。二者必居其一。如果属于随机事件，称它隶属于随机事件的程度为1；如果不属于随机事件，称它隶属于随机事件的程度为0。

这样，一个元素x和一个集合A的关系只能有 $x\in A$和$x\notin A$两种情况，这是经典集合论的要求。集合可以通过特征函数来刻划，每个集合A都有一个特征函数$C_A(x)$，其定义如下：

$$C_A(\chi)=\begin{cases}1, & (当\chi\in A)\\ 0, & (当\chi\notin A)\end{cases} \qquad (2\cdot1)$$

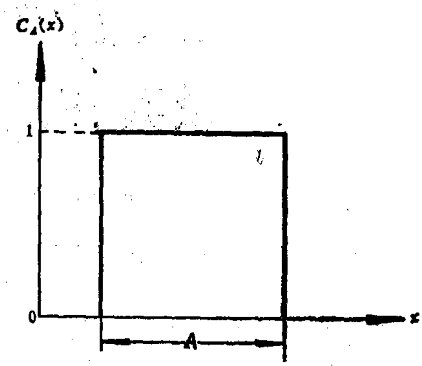

图2·1集合A的特征函数

特征函数的图形，如图2·1所示。

由特征函数的定义可看出：

1. $C_A(x)\equiv0$，当且仅当$A=\phi$；

2. $C_A(x)\equiv1$，当且仅当A等于论域U；

3. 若$A\leqslant B$，则对$\forall x\in U$ $C_A(x)\leqslant C_B(x)$，反之亦真；

4. 若$A=B$，则$\forall x\in U$ $C_A(x)=C_B(x)$，反之亦真。其中$\forall x$表示“对于所有的x”。

5. $C_{\neg A}(x)=1-C_A(x)$，其中$C_{\neg A}(x)$是A的补（余）集（$\neg A$）的特征函数。

6. $C_{A\cup B}(x)=\max(C_A(x),\ C_B(x))$，亦即，AUB的特征函数等于对A、B两集合特征函数取最大值。

7. $C_{A\cap B}(x)=\min(C_A(x),C_B(x))$，与上类似，$A\cap B$的特征函数等于对A、B两集合的特征函数取最小值。

由此，普通集合的运算，完全可以通过其特征函数来进行。

对模糊事件就不是这样，比如“冷气压力较低”，任何一个冷气压力值，就不能说它要么是“较低”，要么“不较低”，只能说它隶属于“较低”的程度。如果用$\underset{\sim}{A}$表示“冷气压力较低”集合，考察四个冷气压力值：$x_1=80$公斤/厘米^2，$x_2=100$公斤/厘米^2，$x_3=120$公斤/厘米^2，$x_4=150$公斤/厘米^2，以$\mu_A(x\ )$（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）表示某一压力值属于集合$\underset{\sim}{A}$的程度，并可直观地给出：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)=1$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)=0.5$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3)=0.3$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4)=0$，显然，用$\mu_A$就刻划了“冷气压力较低”这一事件。这样，把$\mu_{\underset{\sim}{A}}$称为隶属函数，$\underset{\sim}{A}$称为在论域U上的一个模糊子集。

定义：设给定论域U，U到〔0，1〕闭区间的任一映射$\mu_{\underset{\sim}{A}}$，

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U\rightarrow[0,1],\quad x\rightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \qquad (2\cdot2)$$

都确定U的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$叫$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$叫作x对$\underset{\sim}{A}$的隶属度。

模糊子集$\underset{\sim}{A}$完全由其隶属函数所刻划。特别当$\mu_{\underset{\sim}{A}}$的值域取〔0,1〕闭区间的两个端点，亦即{0,1}两个值时，$\underset{\sim}{A}$便退化为一个普通子集，隶属函数也就退化为特征函数，由此可见普通集合是模糊集合的特殊情形，而模糊集合是普通集合概念的推广，亦即，将特征函数$C_A(x)$的取值{0,1}，推广至可取〔0,1〕闭区间任意值，就是隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，它满足

$$0 \leqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leqslant 1$$

也可记作$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0, 1]$。一般如图2·2所示。

如果论域U是有限集时，可用向量来表示模糊子集$\underset{\sim}{A}$，

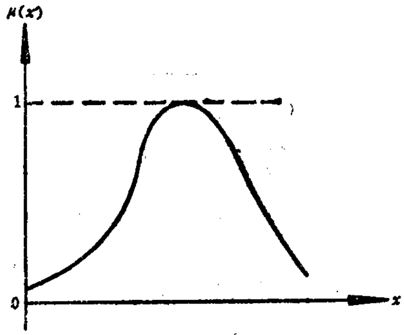

图 2·2 隶属函数μ(x)

$$\underset{\sim}{A} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

其中$\mu_i \in [0, 1]$，($i = 1, 2, \cdots, n$) 是第i个元素对模糊子集$\underset{\sim}{A}$的隶属度。

另外也可以采取查德记号，写为：

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i / \chi_i$$

也可记作：

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mu_i / \chi_i$$

比如上述"冷气压力较低"集合，与所考察的四个冷气压力值相对应的隶属度分别为：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = 1$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = 0.5$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3) = 0.3$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4) = 0$，则模糊集合$\underset{\sim}{A}$可表示为：

$$\underset{\sim}{A} = (1, 0.5, 0.3, 0)$$

或
$$\underset{\sim}{A} = \left\{\frac{1}{\chi_1} + \frac{0.5}{\chi_2} + \frac{0.3}{\chi_3} + \frac{0}{\chi_4}\right\}$$

其中隶属度为 0 者，可略去不记，写作：

$$\underset{\sim}{A} = \left\{\frac{1}{\chi_1} + \frac{0.5}{\chi_2} + \frac{0.3}{\chi_3}\right\}$$

应该特别注意的是，查德记号决不是分式求和，只是一种符号而已。其"分母"是论域 U的某一元素，"分子"是相应元素的隶属度，当隶属度为 0 时，那一项可以不写入。

在论域是无限的情形时，可表示为：

$$\underset{\sim}{A} = \int_{x \in U} \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi) / \chi$$

其中U是论域，$x \in U$，这里积分号不是普通的积分，也不是求和，而是表示各个元素与隶属度对应关系的一个总括。对这样情况，它后面也不需要写dx。

(二) 模糊子集的运算

两个模糊子集间的运算，实际上就是逐元对隶属度作相应的运算。现列表对照如下：

$$\underset{\sim}{A}=\phi \Longleftrightarrow \text{对 } \forall \chi \in U,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi)=0$$

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \text{对} \forall \chi \in U,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi)$$

$$\neg \underset{\sim}{A} \Longleftrightarrow \text{对} \forall \chi \in U,\ \mu_{\neg \underset{\sim}{A}}(\chi)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi)$$

$$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \text{对} \forall \chi \in U,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi) \leqslant \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi)$$

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \text{对} \forall \chi \in U,\ \mu_{\underset{\sim}{C}}(\chi)=\max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi), \chi_{\underset{\sim}{B}}(\chi)\right)$$

$$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \text{对} \forall \chi \in U,\ \mu_{\underset{\sim}{D}}(\chi)=\min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi)\right)$$

今后为运算方便起见，常用符号“$\vee$”代替max，用符号“$\wedge$”代替min，称之为最大、最小运算。如：

$$0.8 \vee 0.4=0.8$$

$$0.8 \wedge 0.4=0.4$$

例2·1 设论域：$U=[0,1000°K]$；模糊子集$\underset{\sim}{A}=\{$排气温度高$\}$，$\underset{\sim}{B}=\{$排气温度低$\}$；并且$\chi_1=950°K$、$\chi_2=750°K$、$\chi_3=600°K$、$\chi_4=540°K$、$\chi_5=500°K$，其相应于各子集的隶属度为：

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\frac{1}{\chi_1}+\frac{0.8}{\chi_2}+\frac{0.3}{\chi_3}+\frac{0.2}{\chi_4}+\frac{0}{\chi_5}\right\}$$

$$\underset{\sim}{B}=\left\{\frac{0}{\chi_1}+\frac{0.1}{\chi_2}+\frac{0.2}{\chi_3}+\frac{0.8}{\chi_4}+\frac{1}{\chi_5}\right\}$$

(1) 求$\neg \underset{\sim}{A}=\{$排气温度不高$\}$

$\neg \underset{\sim}{B}=\{$排气温度不低$\}$

解

利用$\mu_{\neg \underset{\sim}{A}}(\chi)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi)$ 得：

$$\neg \underset{\sim}{A}=\left\{\frac{0}{\chi_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.7}{\chi_3}+\frac{0.8}{\chi_4}+\frac{1}{\chi_5}\right\}$$

$$\neg \underset{\sim}{B}=\left\{\frac{1}{\chi_1}+\frac{0.9}{\chi_2}+\frac{0.8}{\chi_3}+\frac{0.2}{\chi_4}+\frac{0}{\chi_5}\right\}$$

(2) 求$\neg \underset{\sim}{A} \cap \neg \underset{\sim}{B}=\{$排气温度既不高也不低（即正常）$\}$

利用$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}=\min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi)\right)$ 得：

$$\neg \underset{\sim}{A} \cap \neg \underset{\sim}{B}=\left\{\frac{0 \wedge 1}{\chi_1}+\frac{0.2 \wedge 0.9}{\chi_2}+\frac{0.7 \wedge 0.8}{\chi_3}+\frac{0.8 \wedge 0.2}{\chi_4}+\frac{1 \wedge 0}{\chi_5}\right\}$$

$$= \left\{\frac{0}{\chi_1}+\frac{0.2}{\chi_2}+\frac{0.7}{\chi_3}+\frac{0.2}{\chi_4}+\frac{0}{\chi_5}\right\}$$

(3) 求 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$ = {排气温度失常（有高有低）}

利用 $\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}} = \max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi), \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi)\}$ 得

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \left\{\frac{0 \vee 1}{\chi_1}+\frac{0.1 \vee 0.8}{\chi_2}+\frac{0.3 \vee 0.2}{\chi_3}+\frac{0.2 \vee 0.8}{\chi_4}+\frac{1 \vee 0}{\chi_5}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{\chi_1}+\frac{0.8}{\chi_2}+\frac{0.3}{\chi_3}+\frac{0.8}{\chi_4}+\frac{1}{\chi_5}\right\}$$

（三）λ水平截集

λ水平截集是在模糊集合与普通集合相互转化中的一个很重要的概念。

定义：设给定模糊集合 $\underset{\sim}{A}$，对任意〔0，1〕闭区间实数λ，（记作 $\lambda \in$〔0，1〕），称普通集合

$$A_\lambda = \{x | x \in U;\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant \lambda\}$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的λ水平截集。

实际上是把模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 按不同的水平分解为几个普通集合，这些普通集合是对原来的模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度先确定一个阈值λ（$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$）之后，再把隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant \lambda$ 的元素挑选出来而得到的。此时，对取定一个λ的水平截集 A_λ，其特征函数可写为：

$$C_{A\lambda}(\chi) = \begin{cases} 1, 当\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi) \geqslant \lambda 时 \\ 0, 当\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi) < \lambda 时 \end{cases}$$

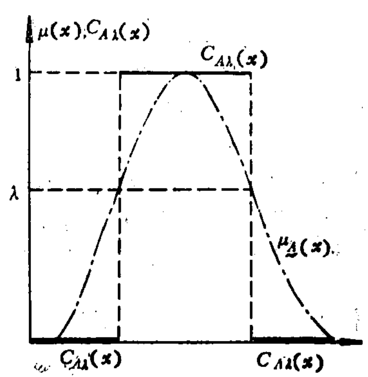

图2·3 A_λ 的特征函数

从隶属函数转换为特征函数如图 2·3 所示

例2·2 设：在某团抽查 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8 八架飞机，并按百分制对所抽查的飞机的维护质量进行综合评分结果如下：

$x_1 = 55$分，$x_2 = 80$分，$x_3 = 92$分，$x_4 = 76$分，$x_5 = 83$分，$x_6 = 40$分，$x_7 = 95$分，$x_8 = 100$分。

求优秀（90分以上）、良好（80分以上）、及格（60分以上）的飞机有哪些。

解

将每架飞机所得分除100折合为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，则集合 $\underset{\sim}{A}$ 可写作：

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\frac{0.55}{\chi_1}+\frac{0.8}{\chi_2}+\frac{0.92}{\chi_3}+\frac{0.76}{\chi_4}+\frac{0.83}{\chi_5}+\frac{0.4}{\chi_6}+\frac{0.95}{\chi_7}+\frac{1}{\chi_8}\right\}$$

分别选水平（阈值）$\lambda=0.9$，0.8，0.6，可得：

$$A_{\lambda=0.9}=\{\chi_3, \chi_7, \chi_8, \}$$

$$A_{\lambda=0.8}=\{\chi_2, \chi_3, \chi_5, \chi_7, \chi_8\}$$

$$A_{\lambda=0.6}=\{\chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_7, \chi_8\}$$

结果表明：优秀的有三架、良好以上的有五架、及格以上的有六架。

上例看出，截集水平越低，则A_λ越大，反之，A_λ越小，若取$\lambda=1$最大时，则$A_{\lambda=1}=\{x_8\}$只有一个元素，为最小。

定义：若$A_{\lambda=1}\neq\phi$时，则称$A_{\lambda=1}$为$\underset{\sim}{A}$的“核”，又：如果一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$的核是非空的，则称$\underset{\sim}{A}$为正规模糊集。

上例中：$A_{\lambda=1}=\{x_8\}$ 为$\underset{\sim}{A}$的“核”，因它是非空的，故$\underset{\sim}{A}$为正规模糊集。

（四）模糊算子

上面谈到：对两个模糊子集进行并、交等运算时，是逐元对隶属度进行min(∧)和max（∨）的运算，即：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(\chi)=\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi),\mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi))=\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi) \quad (2\cdot3)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(\chi)=\max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi),\mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi))=\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi) \quad (2\cdot4)$$

亦可简写为：

$$a\wedge b=\min(a, b) \quad (2\cdot5)$$

$$a\vee b=\max(a, b) \quad (2\cdot6)$$

其中a，b分别表示$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$、$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$。“∧”、“∨”即称为算子，这对算子是查德提出的，称为Zadeh算子，它的优点是运算简便，缺点是这对算子的清晰域最小，因而是最模糊的，换句话说用这对算子运算时失落的信息太多。因而以后又相继提出了不少与“∧”“∨”相对应的新算子。目前提出的有：

1.概率算子“·”，“$\hat{+}$”

$$a\cdot b=ab \quad (2\cdot7)$$

$$a\hat{+}b=a+b-ab \quad (2\cdot8)$$

例2·3　由例2·1设：

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\frac{1}{\chi_1}+\frac{0.8}{\chi_2}+\frac{0.3}{\chi_3}+\frac{0.2}{\chi_4}+\frac{0}{\chi_5}\right\}$$

$$\underset{\sim}{B}=\left\{\frac{0}{\chi_1}+\frac{0.1}{\chi_2}+\frac{0.2}{\chi_3}+\frac{0.8}{\chi_4}+\frac{1}{\chi_5}\right\}$$

求 $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}$

解

由 $a\cdot b=ab$ 可得：

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\left\{\frac{1\times0}{\chi_1}+\frac{0.8\times0.1}{\chi_2}+\frac{0.3\times0.2}{\chi_3}+\frac{0.2\times0.8}{\chi_4}+\frac{0\times1}{\chi_5}\right\}$$

$$=\left\{\frac{0}{\chi_1}+\frac{0.08}{\chi_2}+\frac{0.06}{\chi_3}+\frac{0.16}{\chi_4}+\frac{0}{\chi_5}\right\}$$

由 $a\hat{+}b=a+b-ab$ 可得：

$$\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}=\left\{\frac{1+0-1\times0}{\chi_1}+\frac{0.8+0.1-0.8\times0.1}{\chi_2}+\frac{0.3+0.2-0.3\times0.2}{\chi_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{0.2+0.8-0.2\times0.8}{\chi_4}+\frac{0+1-0\times1}{\chi_5}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{\chi_1}+\frac{0.82}{\chi_2}+\frac{0.44}{\chi_3}+\frac{0.84}{\chi_4}+\frac{1}{\chi_5}\right\}$$

2.有界算子“$\odot$”，“$\oplus$”

$$a\odot b=\max\ (0,a+b-1) \tag{2·9}$$

$$a\oplus b=\min\ (1,a+b) \tag{2·10}$$

例2·4　由例2·3中的 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$

求　$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}$

解

由 $a\odot b=\max\ (0,a+b-1)$ 可得：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}}(\chi_1)=\max\ (0,\ 1+0-1)=0$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}}(\chi_2)=\max\ (0,\ 0.8+0.1-1)=0$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}}(\chi_3)=\max\ (0,\ 0.3+0.2-1)=0$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}}(\chi_4)=\max\ (0,\ 0.2+0.8-1)=0$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}}(\chi_5)=\max\ (0,\ 1+0-1)=0$$

$$\therefore\quad \underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\left\{\frac{0}{\chi_1}+\frac{0}{\chi_2}+\frac{0}{\chi_3}+\frac{0}{\chi_4}+\frac{0}{\chi_5}\right\}$$

由 $a \oplus b = \min(1, a+b)$ 可得：

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}}(\chi_1) = \min(1, 1+0) = 1$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}}(\chi_2) = \min(1, 0.8+0.1) = 0.9$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}}(\chi_3) = \min(1, 0.3+0.2) = 0.5$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}}(\chi_4) = \min(1, 0.2+0.8) = 1$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{P}}(\chi_5) = \min(1, 0+1) = 1$$

∴

$$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = \left\{\frac{1}{\chi_1} + \frac{0.9}{\chi_2} + \frac{0.5}{\chi_3} + \frac{1}{\chi_4} + \frac{1}{\chi_5}\right\}$$

3. Einstain 算子 "$\underset{\varepsilon}{\cdot}$"，"$\underset{\varepsilon}{+}$"

$$a \underset{\varepsilon}{\cdot} b = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)} \tag{2·11}$$

$$a \underset{\varepsilon}{+} b = \frac{a+b}{1+ab} \tag{2·12}$$

4. γ算子 "$\underset{\gamma}{\cdot}$"，"$\underset{\gamma}{+}$"

$$a \underset{\gamma}{\cdot} b = \frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a \hat{+} b)} \tag{2·13}$$

$$a \underset{\gamma}{+} b = \frac{a \hat{+} b-(1-\gamma)ab}{\gamma+(1-\gamma)(1-ab)} \tag{2·14}$$

式中γ是参数，显然，当$\gamma=1$时，"$\underset{\gamma}{\cdot}$"、"$\underset{\gamma}{+}$"分别为"·"、"$\hat{+}$"算子，当$\gamma=2$时，"$\underset{\gamma}{\cdot}$"、"$\underset{\gamma}{+}$"分别为"$\underset{\varepsilon}{\cdot}$"、"$\underset{\varepsilon}{+}$"算子。

5. Yager算子 "y_p"，"Y_p"

$$a y_p b = 1-\min\left(1, [(1-a)^p+(1-b)^p]^{1/p}\right) \tag{2·15}$$

$$a Y_p b = \min\left(1, (a^p+b^p)^{1/p}\right) \tag{2·16}$$

式中P是参数，当$P=1$时，"y_p"、"Y_p"分别为"⊙"、"⊕"，当$P=\infty$时，"y_p"、"Y_p"分别为"∧" "∨"。

上述模糊算子各有自己的优缺点，各自适合于描写不同的现实。人们可以针对具体问题的特点，选择使用。

（五）模糊关系、模糊矩阵与λ截矩阵

设有两个集合A和B，我们从A中取一个元素a，又在B中取一个元素b，把它们搭配

起来成为（a，b），这叫做“序偶”，所有序偶（a，b）构成一个集合，此集合$A\times B$称为集合A与B的直积。比如：设$A=\{1,2,3\}$；$B=\{4,5\}$则直积$A\times B$为

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,5),(3,4)\}$$

直积$A\times B$也称“笛卡尔积”。一般来说$(a,b)\neq(b,a)$。

定义：设有两个集合A和B，则直积$A\times B$为：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

直积$A\times B$的一个子集R叫作A到B的二元关系，推广到模糊集合中即为模糊关系。

定义：所谓A，B两集合的直积

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

中的一个模糊关系$\underset{\sim}{R}$，是指以$A\times B$为论域的一个模糊子集，序偶（a，b）的隶属度为

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,b)$。

例2·5 设某型机引起液压系统压力表指针摆动的原因有：液压泵柱塞运动不灵，液压泵随动活塞运动不灵，液压泵高压薄膜老化，蓄压器压力过小，压力表节流器堵塞，压力表限流孔堵塞，压力表内传动机构间隙太大，发动机振动等，分别以x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8代号表示。则：

$$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$$

而每种原因所引起的压力表指针摆动的情况是不完全相同的，现请专业人员用打分的办法来表示这八种原因引起的指针摆动情况的相似程度。若二者完全相似为“1”分，完全不相似为“0”分，各按具体相似程度在〔0，1〕之间给一个分数μ，则决定了一个U上的模糊关系$\underset{\sim}{R}$。列表如下：

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	0.8	0.9	0.7	0.1	0.2	0	0.1
x_2	0.8	1	0.8	0.6	0.3	0.1	0	0
x_3	0.9	0.8	1	0.8	0.1	0.3	0.1	0.2
x_4	0.7	0.6	0.8	1	0.6	0.5	0.3	0.5
x_5	0.1	0.3	0.1	0.6	1	0.9	0.6	0.4
x_6	0.2	0.1	0.3	0.5	0.9	1	0.7	0.8
x_7	0	0	0.1	0.3	0.6	0.7	1	0.9
x_8	0.1	0	0.2	0.5	0.4	0.8	0.9	1

由于模糊关系$\underset{\sim}{R}$实际上是一个模糊子集，因此它的运算完全服从模糊子集的运算法则。

若论域$A\times B$为有限集时（当然A，B都是有限集），则模糊关系$\underset{\sim}{R}$可以用矩阵来表示，并称之为模糊矩阵$\underset{\sim}{R}$，记为：

$$\underset{\sim}{R}=(\gamma_{ij})=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\cdots\cdots\gamma_{1m}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\cdots\cdots\gamma_{2m}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2}\cdots\cdots\gamma_{nm}\end{pmatrix}$$

其中：$0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$，$i=1, 2, \cdots, n$

$j=1, 2, \cdots, m$

当U为有限集合时，U上的模糊关系可表示为n阶方阵，比如例2·5的模糊关系$\underset{\sim}{R}$可表示为8阶方阵如下：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc}\chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_4 & \chi_5 & \chi_6 & \chi_7 & \chi_8\end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0.1\\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.9 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2\\ 0.7 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.5\\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 1 & 0.9 & 0.6 & 0.4\\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8\\ 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.9\\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.8 & 0.9 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\\ \chi_4\\ \chi_5\\ \chi_6\\ \chi_7\\ \chi_8 \end{array}$$

在线性代数中，设有A，B两个矩阵，

$$A=(a_{ij})_{m\times p}$$

$$B=(b_{ij})_{p\times n}$$

若两矩阵相乘，设

$$C=A\cdot B=(C_{ij})_{m\times n}$$

其中：$C_{ij}=\sum_{K=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}$　$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$

若把上式中的普通乘法换为最小运算“$\wedge$”，把普通加法“Σ”换为最大运算“$\vee$”，即：

$$C_{ij}=\bigvee_{k=1}^{p}(a_{ik}\wedge b_{kj}) \qquad (2\cdot 17)$$

则为两模糊矩阵的运算规则，称为模糊关系的合成法则。记为 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$

例2·6　设：

$$\underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7 & 0.2\\ 1 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.5 & 1\\ 0.6 & 0.7 & 0.8\end{pmatrix}_{4\times 3}, \qquad \underset{\sim}{B}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.9\\ 0.9 & 0.1\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

按照　$C_{ij}=\bigvee_{k=1}^{3}(a_{ik}\wedge b_{kj})$　$(i=1,2,3,4; j=1,2)$

可得模糊关系$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的合成

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.9\\0.6 & 0.4\\0.7 & 0.6\end{pmatrix}_{4\times2}$$

比如其中：

$$\begin{aligned}C_{11}&=(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21})\vee(a_{13}\wedge b_{31})\\&=(0.3\wedge0.1)\vee(0.7\wedge0.9)\vee(0.2\wedge0.6)\\&=0.1\vee0.7\vee0.2\\&=0.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{12}&=(a_{11}\wedge b_{12})\vee(a_{12}\wedge b_{22})\vee(a_{13}\wedge b_{32})\\&=(0.3\wedge0.9)\vee(0.7\wedge0.1)\vee(0.2\wedge0.4)\\&=0.3\vee0.1\vee0.2\\&=0.3\end{aligned}$$

依此类推可得$\underset{\sim}{C}$中的其余元素。

模糊关系的合成运算规则满足下列性质：设：$\underset{\sim}{P}$，$\underset{\sim}{Q}$，$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{S}$，$\underset{\sim}{O}$，$\underset{\sim}{T}$等都是定义域U上的模糊子集。则：

1. $(\underset{\sim}{P}\circ\underset{\sim}{Q})\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{P}\circ(\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{R})$ （2·18）

2. $\underset{\sim}{O}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{O}=\underset{\sim}{O}$ （2·19）

$\underset{\sim}{I}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{I}=\underset{\sim}{R}$ （2·20）

其中$\underset{\sim}{O}$是零关系（所有矩阵元素全为0）；$\underset{\sim}{I}$是恒等关系（$\underset{\sim}{I}$所对应的矩阵是单位矩阵）。

3. $\underset{\sim}{R}^m\circ\underset{\sim}{R}^n=\underset{\sim}{R}^{m+n}$ （2·21）

其中：$R^m=\underbrace{R\circ R\circ\cdots\circ R}_{m个}$；$R^n=\underbrace{R\circ R\circ\cdots\circ R}_{n个}$

4. 若$\underset{\sim}{Q}\subseteq\underset{\sim}{R}$，则对U上的任意模⊆关系$\underset{\sim}{S}$有

$$\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{S}\subseteq\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S} \qquad (2·22)$$

特别若$\underset{\sim}{Q}\subseteq\underset{\sim}{R}$必有$\underset{\sim}{Q}^n\subseteq\underset{\sim}{R}^n$

前面讲过：在论域U上给定一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，选不同水平λ可得到不同的截集A_λ，A_λ是普通集合。同样，这个概念可以推广到模糊矩阵$\underset{\sim}{R}$中来。

定义：设给定模糊矩阵$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$，对任意的$\lambda\in[0,1]$记$R_\lambda=(\lambda r_{ij})$

其中

$$\lambda\gamma_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}\gamma_{ij}\geqslant\lambda\text{时}\\0 & \text{当}\gamma_{ij}\leqslant\lambda\text{时}\end{cases}\qquad(2\cdot23)$$

则称$R_\lambda=(\lambda\gamma_{ij})$为$\underset{\sim}{R}$的λ截矩阵。

例2·7　例2·5中模糊矩阵

$$R=\begin{pmatrix}1&0.8&0.9&0.7&0.1&0.2&0&0.1\\0.8&1&0.8&0.6&0.3&0.1&0&0\\0.9&0.8&1&0.8&0.1&0.3&0.1&0.2\\0.7&0.6&0.8&1&0.6&0.5&0.3&0.5\\0.1&0.3&0.1&0.6&1&0.9&0.6&0.4\\0.2&0.1&0.3&0.5&0.9&1&0.7&0.8\\0&0&0.1&0.3&0.6&0.7&1&0.9\\0.1&0&0.2&0.5&0.4&0.8&0.9&1\end{pmatrix}$$

取λ＝0.7，则

$$R_{\lambda=0.7}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

（六）模糊聚类分析

模糊聚类分析是将具有模糊性的一族样品，按“物以类聚”的原则进行客观地分型划类。

模糊聚类分析的具体步骤如下：

1.确定评分标准

确定评分标准是将具有模糊性的样品按一定的标准进行数量化。比如，设“排气温度超温”、“转速超转”、“推、收油门快慢”、“振动”四个征兆，按其程度不同可确定评分标准如表2·1所示

2.建立评分矩阵

评分矩阵是在已知所考虑因素的评分标准的基础上，对各被划分的对象进行打分得到评分矩阵。比如：设考虑的因素是表2·1中四个征兆，现需对10个成因A_i（$i=1,2,\cdots,10$），进行分型划类。设每一成因对所考虑的征兆进行打分如表2·2所示

表 2·1　　相应四个征兆的评分标准

排气温度（χ_1）		转速（χ_2）		推收油门速度（χ_3）		振动（χ_4）	
超温非常严重	3	超转很严重	3	非常快	6	很剧烈	2
超温严重	2	严重超转	2	很　快	5	剧　烈	1
超　温	1	超　转	1	快	4	一　般	0
温度正常	0	转速正常	0	正　常	3		
				较　慢	2		
				慢	1		
				很　慢	0		

表 2·2　　评分表

	超温程度	超转程度	推收油门速度	振动程度
A_1	1	0	1	0
A_2	3	2	6	2
A_3	2	1	4	2
A_4	2	0	1	0
A_5	0	3	5	2
A_6	1	3	5	2
A_7	0	1	0	0
A_8	2	3	6	1
A_9	3	1	3	1
A_{10}	0	1	2	0

显然表 2·2是说明了每一个成因发生时，相应于所考虑的四个征兆表现的程度如何，比如，第一行表示当A_1成因发生时，有超温现象(1)，而转速正常(0)，是慢推油门(1)，振动一般(0)。其他亦依此类推。

当然，上述评分标准与评分表的形式并不是唯一的，比如，可用模糊语言值确定每一所考虑的征兆表现程度。亦可用统计数据作为原始数据确定每一征兆的评分标准，此时，可用下面二个公式确定评分标准。

$$x=\frac{x'-\overline{x'}}{c} \qquad (2·24)$$

式中：x'为原始数据，$\overline{x'}$为原始数据的平均值，c为原始数据的标准差。

$$\chi=\frac{\chi'-\chi'_{min}}{\chi'_{max}-\chi'_{min}} \qquad (2·25)$$

当$\chi'=\chi_{max}$时，则$\chi=1$
当$\chi'=\chi_{min}$时，则$\chi=0$
把评分表写成矩阵形式即为评分矩阵，