



主编：杨德胜

# 高中数学

# 拉分题

# 满分训练

# 1000题

## 代数集训篇



华东理工大学出版社  
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



# 高中数学

# 拉分题

# 满分训练

# (1000题)

代数集训篇

---

主编：杨德胜

编委会

汪昌辉 潘瑾 侯宝坤

朱伟卫 叶莎莎 张千明



华东理工大学出版社  
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

高中数学拉分题满分训练.代数集训篇 / 杨德胜主编. —上海:  
华东理工大学出版社, 2015.10

(赢在思维)

ISBN 978 - 7 - 5628 - 4374 - 0

I. ①高… II. ①杨… III. ①代数课—高中—习题集  
IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 204071 号

赢在思维

## 高中数学拉分题满分训练(1000题)(代数集训篇)

---

编 著 / 杨德胜

策划编辑 / 郭 艳

责任编辑 / 陈月姣

责任校对 / 金慧娟

封面设计 / 视界创意

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址: 上海市梅陇路 130 号, 200237

电 话: (021)64250306(营销部)

(021)64252735(编辑室)

传 真: (021)64252707

网 址: [press.ecust.edu.cn](http://press.ecust.edu.cn)

印 刷 / 江苏省句容市排印厂

开 本 / 787 mm × 1092 mm 1/16

印 张 / 15.5

字 数 / 698 千字

版 次 / 2015 年 10 月第 1 版

印 次 / 2015 年 10 月第 1 次

书 号 / ISBN 978 - 7 - 5628 - 4374 - 0

定 价 / 45.00 元

联系我们: 电子邮箱 [press@ecust.edu.cn](mailto:press@ecust.edu.cn)

官方微博 [e.weibo.com/ecustpress](http://e.weibo.com/ecustpress)

天猫旗舰店 <http://hdlgdxcb.tmall.com>



# 前 言

“初中数学拉分题”自出版到现在已经逐步形成了自己的品牌效应,受到广大师生朋友们的认可和好评.在此期间我们收到很多读者朋友的反馈,希望能够继续出版“高中数学拉分题”系列.为此我们在深入研究高中教学实际与考纲要求的前提下,与一线特级教师研讨分析,编写了本套丛书,希望学生能在具备扎实基本功的基础上进一步提高解题能力,同时,教师们可以从本书中找到教学和考试中合适的题目使用.

本套丛书主要有以下特点.

- 源于教材,高于教材

全书内容以教育部制定的高考考纲要求为依据,紧扣课本,又高于课本.同学们在不超纲题型的基础上可进一步针对自己需加强的章节进行提高,做到基础与提高的统一.

- 经典题型,加深理解

本书所选的题目大多都是典型题型的代表,在同学们日常接触的题目的基础上进行内容的改编以及难度的提高.因此,同学们在解题的过程中可以巩固解题技巧、加深对题目的理解,并且可以了解自己的学习情况,做进一步的自我提升.

- 剖析难题,拓展思维

书后附有参考答案与提示,使得同学们在解题的过程中,可以参考答案中的方法与思路,引导学生将每种方法和思路逐步转化为自己的理解,在思考问题、探索问题的过程中,找到最方便的解题技巧,效率得以提高,能力得以增强,思维得以拓展.

本套丛书适用于中高水平学生的提高,也适用于一线教师在教学中的使用,希望本书较高的实用性能帮助同学们在打好基础的同时进行巩固、拓展和提高,帮助教师和学生进行自我提升与灵活使用.

另外,对于本套丛书,建议与“赢在思维——高中数学拉分题满分训练”配合使用,相信这样能取得更好的效果.

最后,希望同学们和老师们能够通过本套丛书收获各自想收获的,同时也希望能够得到读者的建议与批评,使我们不断进步.

进入出版社官方网站:<http://press.ecust.edu.cn>,搜索本书,免费下载 PDF 答案详解文件.

# 目 录

---

第 1 章 集合与常用逻辑用语	1
1.1 集合的概念与运算	1
1.2 四种命题的形式 充分条件 必要条件 基本逻辑联结词及量词	5
第 2 章 函数	9
2.1 函数的概念及表示	9
2.2 函数的单调性与最值	12
2.3 函数奇偶性与周期性	17
2.4 幂函数	20
2.5 指数函数	24
2.6 对数函数	27
2.7 函数图像变换、零点、函数方程	31
2.8 函数的应用	35
第 3 章 三角函数	41
3.1 三角函数的概念	41
3.2 同角三角函数的基本关系	44
3.3 诱导公式	47
3.4 三角函数的图像和性质	50
3.5 简单的三角变换	54
3.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质	58
3.7 解斜三角形	64
3.8 反三角函数和简单三角方程	70
第 4 章 数列	74
4.1 数列的概念	74
4.2 等差数列及其前 $n$ 项的和	80
4.3 等比数列	84
4.4 数列的通项与求和	89
4.5 数列的极限	93
第 5 章 不等式	98
5.1 不等式的基本性质	98
5.2 二元一次不等式组与简单的线性规划	101
5.3 基本不等式	105
5.4 解不等式	109
5.5 “恒成立”问题中求参数的范围	112

5.6	不等式选讲——柯西不等式	116
<b>第6章</b>	<b>排列组合概率论</b>	119
6.1	加法原理与乘法原理	119
6.2	排列与组合	122
6.3	二项式定理	125
6.4	古典概率	128
6.5	几何概率	134
6.6	条件概率	138
<b>第7章</b>	<b>统计</b>	143
7.1	随机抽样,用样本估计总体,方差,期望,线性回归	143
7.2	二项分布与正态分布	152
<b>第8章</b>	<b>算法初步</b>	159
8.1	算法的概念与程序框图	159
<b>第9章</b>	<b>导数及其应用</b>	166
9.1	变化率与导数、导数的计算	166
9.2	导数的应用	170
9.3	定积分的概念与微积分基本定理	178
<b>第10章</b>	<b>复数</b>	184
10.1	复数的概念、复数的坐标表示	184
10.2	复数的运算	187
10.3	复数的平方根、立方根、实系数一元二次方程	191
<b>第11章</b>	<b>矩阵与行列式</b>	195
11.1	矩阵的概念与矩阵的运算	195
11.2	二阶行列式与三阶行列式	203
<b>第12章</b>	<b>推理与证明</b>	207
12.1	推理与证明	207
12.2	数学归纳法	213
<b>参考答案</b>		219

## 1.1 集合的概念与运算

## 第 一 期

## 一、填空题

1. 集合  $M$  的元素为正整数,且满足  $x \in M$ ,则  $8-x \in M$ ,则

- (1) 只有一个元素的集合  $M =$  \_\_\_\_\_;  
 (2) 有 2 个元素的集合  $M$  有 \_\_\_\_\_;  
 (3) 满足题设条件的集合  $M$  共有 \_\_\_\_\_ 个.

2. 含有三个元素的集合  $\left(a, \frac{b}{a}, 1\right)$ ,也可以表示为  $\{a^2, a+b, 0\}$ ,则  $a^{2009} + b^{2009} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  集合  $A, B$  满足  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 9\}$ ,  $(\complement_U A) \cap B = \{4, 6, 8\}$ ,  $A \cap B = \{2\}$ ,则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_,  $A =$  \_\_\_\_\_,  $B =$  \_\_\_\_\_.

4. 已知集合  $A = \{(x, y) | y = \sqrt{1-x^2}\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = x + m, m \in \mathbf{R}\}$ ,若  $A \cap B$  是单元素集,则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

## 二、选择题

5. 已知  $x \in \{1, 2, x^2\}$ ,则有( ).

- A.  $x=1$       B.  $x=1$  或  $x=2$       C.  $x=0$  或  $x=2$       D.  $x=0$  或  $x=1$  或  $x=2$

6. 设全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \left\{x \mid -4 < x < -\frac{1}{2}\right\}$ ,  $B = \{x \mid x \leq -4\}$ ,则  $C = \left\{x \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$  是集合  $A$  和  $B$  的( ).

- A. 交集      B. 并集      C. 交集的补集      D. 并集的补集

## 三、解答题

7. 设集合  $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $C = \{x \mid x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ ,若  $a \in A, b \in B$  试判断  $a+b$  与集合  $A, B, C$  的关系.

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12





## 第 三 期

1. 设集合  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $S_1, S_2, \dots, S_k$  都是  $M$  的含 2 个元素的子集, 且满足: 对任意的  $S_i = \{a_i, b_i\}, S_j = \{a_j, b_j\} (i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\})$ , 都有  $\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$  ( $\min\{x, y\}$  表示两个数  $x, y$  中的较小者), 求  $k$  的最大值.

2. 已知  $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}, A \cap B = \{a, b, c\}, c \in A \cap B \cap C$ , 求符合上述条件的  $\{A, B, C\}$  的组数.

3. 定义闭集合  $S$ , 若  $a, b \in S$ , 则  $a + b \in S, a - b \in S$ .

(1) 举一例, 真包含于  $\mathbf{R}$  的无限闭集合;

(2) 求证: 对任意两个闭集合  $S_1, S_2 \subsetneq \mathbf{R}$ , 存在  $c \in \mathbf{R}$ , 但  $c \notin S_1 \cup S_2$ .

4. 已知两个整数集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$ , 满足  $A \cap B = \{a_1, a_4\}$  且  $a_1 + a_4 = 10, A \cup B$  的所有元素之和为 124, 其中  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ , 求  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

5. 是否存在非零实数  $p, q$  使得集合  $A = \{x \mid x^2 + px + q = 0\}, B = \{x \mid qx^2 + px + 1 = 0\}$ , 同时满足两个条件:  $A \cap B \neq \emptyset, A \cap \complement_U B = \{-2\}$ , 若存在, 求出  $p, q$  的值; 若不存在, 说明理由.

6. 已知  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  是正整数, 从这 5 个数中任取 4 个组成的集合为  $\{44, 45, 46, 47\}$ , 求这 5 个数.

7. 已知集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\} (k \geq 2)$  其中  $a_i \in \mathbf{Z} (i = 1, 2, \dots, k)$ , 由  $A$  中的元素构成两个相应的集合  $S = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a + b \in A\}$ ,  $T = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a - b \in A\}$ , 其中  $(a, b)$  是有序实数对, 集合  $S$  和  $T$  的元素个数分别为  $m, n$ . 若对于任意的  $a \in A$ , 总有  $-a \notin A$ , 则称集合  $A$  具有性质  $P$ .

(1) 检验集合  $\{0, 1, 2, 3\}$  与  $\{-1, 2, 3\}$  是否具有性质  $P$ , 并对其中具有性质  $P$  的集合写出相应的集合  $S$  和  $T$ ;

(2) 对任何具有性质  $P$  的集合  $A$ , 证明:  $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$ ;

(3) 判断  $m$  和  $n$  的大小关系, 并证明你的结论.

8. 集合  $A = \{x^2, 1 + 2z^2, xy + yz + zx\}$ ,  $B = \{1, y^2, 2 + 3z^2\}$ , 其中  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , 满足  $A = B$ , 求  $x, y, z$  的值.



## 第 二 期

### 一、填空题

1. 设  $x, y \in \mathbf{R}, x > y$  是  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$  成立的\_\_\_\_\_条件.
2. “ $a=1$ ”是“函数  $y = a \cos^2 ax - \sin^2 ax$  的最小正周期为  $\pi$ ”的\_\_\_\_\_条件.
3. 复数“ $z = -\bar{z}$  ( $\bar{z}$  是  $z$  的共轭)”的\_\_\_\_\_条件是“ $z$  为纯虚数”.
4. 对于四面体  $ABCD$ , 给出下面四个命题  
① 若  $AB=AC, BD=CD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ② 若  $AB=CD, AC=BD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ③ 若  $AB \perp AC, BD \perp CD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ④ 若  $AB \perp CD, BD \perp AC$ , 则  $BC \perp AD$ . 其中真命题的序号是\_\_\_\_\_.

### 二、选择题

5. 函数  $f(x) = x|x+a| + b$  是奇函数的充要条件是( ).  
A.  $ab=0$             B.  $a+b=0$             C.  $a=b$             D.  $a^2+b^2=0$
6.  $a=3$  是直线  $ax+2y+3a=0$  和直线  $3x+(a-1)y=a-7$  平行且不重合的( ).  
A. 充分非必要条件            B. 必要非充分条件  
C. 充要条件            D. 既非充分又非必要条件

### 三、解答题

7. 已知双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ , 过点  $A(1,1)$  能否作直线  $l$  交双曲线于点  $P$  及  $Q$ , 且点  $A$  为线段  $PQ$  的中点, 这样的直线  $l$  如果存在, 求其方程; 如果不存在, 说明理由.

请看下述解法:

设点  $P, Q$  的坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 则  $x_1^2 - \frac{y_1^2}{2} = 1, x_2^2 - \frac{y_2^2}{2} = 1$ , 所以  $x_1^2 - x_2^2 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)$ , 即  $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$ , 因为  $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2$ , 所以  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2$ , 即直线  $PQ$  的斜率为 2, 所以这样的直线存在, 其方程为  $y - 1 = 2(x - 1)$ . 上述解法正确吗? 若不正确, 说明理由.

8. 可以用下述方法证明“ $a > 0$  且  $b > 0$  的充要条件是  $a + b > 0$  且  $ab > 0$ ”为真命题.  
必要性: 若  $a > 0, b > 0$ , 自然有  $a + b > 0$  且  $ab > 0$ .  
充分性: 若  $a + b > 0$  且  $ab > 0$ .

考查函数  $f(x) = x^2 - (a+b)x + ab$ .

当  $x \leq 0$  时, 因  $x^2 \geq 0, -(a+b)x \geq 0, ab > 0$ , 所以  $f(x) > 0$ , 即“若  $x \leq 0$ , 则  $f(x) > 0$ ”为真命题. 进而其逆否命题“若  $f(x) \leq 0$ , 则  $x > 0$ ”亦为真命题, 而今  $f(a) = f(b) = 0$ , 故  $a > 0, b > 0$ , 充分性得证.

阅读上述材料, 并利用上述方法证明:

$a < 0, b < 0, c < 0$  的充要条件是  $a + b + c < 0, ac + bc + ab > 0, abc < 0$ .

## 第 三 期

### 一、选择题

- 下列命题中正确的是( ).
  - $a < b$  是  $a^2 < b^2$  的必要非充分条件
  - $\alpha = \beta$  是  $\tan \alpha = \tan \beta$  的充分非必要条件
  - 两虚数之积为实数是这两虚数互为共轭复数的必要非充分条件
  - 空间两直线不相交是这两直线异面的充要条件
- 若数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = p$  ( $p$  为正常数,  $n \in \mathbf{N}^+$ ), 则称  $\{a_n\}$  为“等方比数列”. 甲: 数列  $\{a_n\}$  是等方比数列; 乙: 数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 则( ).
  - 甲是乙的充分条件但不是必要条件
  - 甲是乙的必要条件但不是充分条件
  - 甲是乙的充要条件
  - 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
- 下列各小题中,  $p$  是  $q$  的充要条件的是( ).
  - $p: m < -2$  或  $m > 6; q: y = x^2 + mx + m + 3$  有两个不同的零点.
  - $p: \frac{f(-x)}{f(x)} = 1; q: y = f(x)$  是偶函数.
  - $p: \cos \alpha = \cos \beta; q: \tan \alpha = \tan \beta$ .
  - $p: A \cap B = A; q: \complement_U B \subseteq \complement_U A$ .

A. (1) (2)      B. (2) (3)      C. (3) (4)      D. (1) (4)
- 若  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , 则  $\alpha + \beta = 90^\circ$  是  $\sin \alpha + \sin \beta > 1$  的( ).
  - 充分非必要条件
  - 必要非充分条件
  - 充要条件
  - 既非充分又非必要条件
- 实数  $\mathbf{R}$  中的集合  $X$  如果满足: 任意非空开区间都含有  $X$  中的点, 则称  $X$  在  $\mathbf{R}$  中稠密, 那么, “ $\mathbf{R}$  中的集合  $X$  在  $\mathbf{R}$  中不稠密”的充分必要条件是( ).
  - 任意非空开区间都不含有  $X$  中的点
  - 存在非空开区间不含有  $X$  中的点

- C. 任意非空开区间都含有  $X$  的补集中的点
- D. 存在非空开区间含有  $X$  的补集中的点

## 二、填空题

6. 设命题  $P: c^2 < c$  和命题  $Q: \text{对任何 } x \in \mathbf{R}, x^2 + 4cx + 1 > 0$  有且仅有一个成立, 则实数  $c$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

7. 珠宝店丢失了一件珍贵珠宝. 以下四人只有一人说真话, 只有一人偷了珠宝. 甲: 我没有偷. 乙: 丙是小偷. 丙: 丁是小偷. 丁: 我没有偷. 则说真话的人是\_\_\_\_\_, 偷珠宝的人是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

8. 方程  $x^2 - \frac{3}{2}x = k$  在  $x \in [-1, 1]$  上有实数解, 求  $k$  的取值范围.

9. 若  $s, m$  是  $r$  的充分条件,  $p, q$  是  $r$  的必要条件, 而  $p$  是  $m$  的充分条件,  $s$  是  $q$  的必要条件, 则  $p$  是  $q$  的什么条件?  $s$  是  $m$  的什么条件?

10. 求证: 关于方程  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  有一个根为  $-1$  的充要条件是:  $a + c = b + d$ .

## 2.1 函数的概念及表示

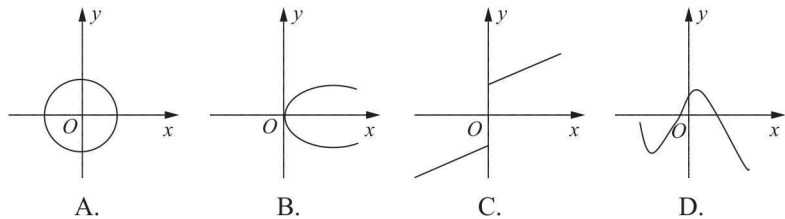
## 第 一 期

## 一、填空题

1. 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
2. 如果函数  $f(x)$  的定义域为  $(0,1)$ , 那么函数  $F(x) = f(x+a) + f(x-a)$   $\left(-\frac{1}{2} < a < 0\right)$  的定义域为\_\_\_\_\_.
3. 设函数  $y = -x(x+2) (x \geq 0)$  的反函数定义域为\_\_\_\_\_.
4. 若函数  $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$  的值域是  $\{y | y \leq 0\} \cup \{y | y \geq 4\}$ , 则  $f(x)$  的定义域是\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

5. 下列四组函数中, 表示同一函数的是( ).
- A.  $y = x-1$  与  $y = \sqrt{(x-1)^2}$                       B.  $y = \sqrt{x-1}$  与  $y = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$
- C.  $y = 4\lg x$  与  $y = 2\lg x^2$                       D.  $y = \lg x - 2$  与  $y = \lg \frac{x}{100}$
6. 下列各图中, 可表示函数  $y = f(x)$  的图像的只可能是( ).



## 三、解答题

7. 已知  $f(x) = 2^x - 1$  的反函数为  $f^{-1}(x)$ ,  $g(x) = \log_4(3x+1)$ .
- (1) 若  $f^{-1}(x) \leq g(x)$ , 求  $x$  的取值范围  $D$ ;
- (2) 设函数  $H(x) = g(x) - \frac{1}{2}f^{-1}(x)$ , 当  $x \in D$  时, 求函数  $H(x)$  的值域.





8. 已知集合  $M_B$  是满足下列性质的函数  $f(x)$  的全体: 对于定义域  $B$  中的任何两个自变量  $x_1, x_2$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ .

(1) 当  $B = \mathbf{R}$  时,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  是否属于  $M_B$ ? 为什么?

(2) 当  $B = (0, +\infty)$  时,  $f(x) = \frac{1}{x}$  是否属于  $M_B$ , 若属于请给予证明; 若不属于说明理由, 并说明是否存在一个  $B_1 \subset (0, +\infty)$  使  $f(x)$  属于  $M_{B_1}$ ?

9. 对于定义域为  $D$  的函数  $y = f(x)$ , 若有常数  $M$ , 使得对任意的  $x_1 \in D$ , 存在唯一的  $x_2 \in D$  满足等式  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = M$ , 则称  $M$  为函数  $y = f(x)$  的“均值”.

(1) 判断 1 是否为函数  $f(x) = 2x + 1 (-1 \leq x \leq 1)$  的“均值”, 请说明理由;

(2) 若函数  $f(x) = ax^2 - 2x (1 < x < 2, a$  为常数) 存在“均值”, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 若函数  $f(x)$  是单调函数, 且其值域为区间  $I$ , 试探究函数  $f(x)$  的“均值”情况(是否存在、个数、大小等)与区间  $I$  之间的关系, 写出你的结论(不必证明).