高等学校成人教育网络教育专用系列教材

高等数学

（下册）

刘丁酉　赵燕芬　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校成人教育网络教育专用系列教材

高等数学

（下册）

刘丁酉　赵燕芬　编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/刘丁酉,赵燕芬编著. —武汉:武汉大学出版社,2012.9
高等学校成人教育网络教育专用系列教材
ISBN 978-7-307-10180-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… ②赵… Ⅲ. 高等数学—成人高等教育—教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 208473 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:黄添生　　版式设计:马　佳

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:通山金地印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:13　字数:313 千字　插页:1
版次:2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-10180-7/O·481　定价:22.00 元

前　言

“高等数学”是高等院校各学科(尤其是工学、经济学及管理学等学科)的大学生必修的数学课程之一。该课程作为一门重要并且应用广泛的数学基础课，其基本理论与基本方法几乎渗透到自然科学和社会科学的各个领域；同时，“高等数学”也是工学、经济学及管理学等学科的硕士研究生入学考试中必试数学的一个主要科目。因而，“高等数学”也就理所当然地要作为成人教育、网络教育各专业本科生、专科生及专升本等多个层次学生的必修课程之一。

进入21世纪以来，我国的高等教育已开始从“精英型教育”迅速向“大众化教育”转型，其发展速度之迅猛，既改变了我国高等教育的格局，有力地推动了我国高等教育事业的发展，也给我国的大学教育提出了新的问题与挑战。为了适应这种快速变化与需求，我们在参照“高等数学”课程教学基本要求的基础上，结合成人教育、网络教育层次的特点，强调以教育为本，注重应用与实际需要，特别编写了这套《高等数学》实用教材。本书既可以作为成人教育、网络教育各层次的《高等数学》教材，也可以作为各类独立院校及高职高专等多层次教育适用的教材与教学参考书。

全书分为上、下两册，共分12章。上册包括：函数的极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程等内容。下册包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等内容。每章节后都配有适量的习题和复习题，为方便读者自学，这套教材专门配置了《高等数学学习指导》。

为了解决成人教育、网络教育中数学教材的适应性问题，我们在该教材的编写中特别注意了从取材到写作的各个环节，既体现教学的基本要求，又突出实用。具体表现在以下几个方面：

1. 通俗易懂，深入浅出。

本书在各知识点讲解表述上尽可能利用实际背景，从实例出发引出基本概念，图文并茂，深入浅出，通俗易懂。理论证明上尽可能选用简捷的方法，有利于学生克服理论、概念枯燥难学的情绪。

2. 注重数学课程自身的系统性，循序渐进。

本书基本保持高等数学的传统体系和内容，以函数为研究对象，以极限为主要工具，由易到难地展开。同时也注意力求创新，并注重内容的循序渐进，低起点，高坡度。

3. 内容新颖，突出应用。

本书坚持理论联系实际，取材尽可能新颖，注重科学性、现实性、趣味性，努力使学生从教材中深切地感知高等数学知识在实际工作与日常生活中的广泛应用。同时在例题选

择和编排上都体现了高等数学的实际应用，注重了成人教育、网络教育的针对性和层次性。

4. 习题充分。

本书每节后都配有适量的习题。每章后又编排了总习题、给老师提供选择空间，也给成人教育、网络教育各层次的学生提供一个自主学习的空间。同时便于学生通过反复练习，达到理解基本概念和掌握基本解题方法的目的。

本教材由武汉大学数学与统计学院刘丁酉、赵燕芬两位老师共同编写，作者在充分讨论的基础上分工合作，对书稿进行了交叉修改和统稿。在本书的编写过程中，武汉大学出版社李汉保编辑和武汉大学继续教育学院的王宣主任都为本书的编写给予了热心的帮助，并提出了许多宝贵的修改意见和建议。在此表示衷心的感谢!

限于作者的水平，教材中难免存在错误和不妥之处。欢迎读者与同行批评斧正。

作　者

2012 年 6 月于武汉

目　　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是研究几何图形及性质与代数方程及形式之间对应关系的一门学科，是学习多元函数微积分学必备的基础知识. 本章首先建立空间直角坐标系，再引进把几何和代数紧密联系在一起的向量代数，然后以向量代数为工具，讨论几何空间内的曲面(平面)和曲线(直线)的性质及其方程形式.

8.1　空间直角坐标系

高中阶段已经学习过平面解析几何，所谓解析几何就是用解析的，即代数的方法来研究几何问题. 我们知道，代数运算的基本对象是数量，几何图形的基本元素是点. 在平面解析几何中，通过建立平面直角坐标系使几何中的点与有序实数对(x,y)之间建立了一一对应的关系，在此基础上，平面上的几何图形(曲线)及性质与方程(函数)及形式之间就蕴涵了严格的互相对应的关系，从而使我们能够运用代数方法去研究几何问题. 同样地，本章要运用代数的方法去研究空间的图形 —— 曲面和空间曲线. 因此必须先建立空间直角坐标系，使空间内的点与有序实数组(x,y,z)之间建立起一一对应的关系.

8.1.1　空间直角坐标系的建立

过空间任意一个定点 O，以点 O 为原点作三条两两互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这三条数轴分别称为 Ox 轴(横轴)、Oy 轴(纵轴)、Oz 轴(竖轴)，统称这三个坐标轴为坐标轴. 这三个坐标轴的正方向按右手法则确定：右手展开，以掌心贴近 Oz 轴，右手的四个手指并拢指向 Ox 轴的正方向，若四指以$\frac{\pi}{2}$角度转向 Oy 轴的正方向时，那么大拇指的指向就是 Oz 轴的正方向，如图 8-1 所示，这样的三个坐标轴就组成了一空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，点 O 称为坐标原点.

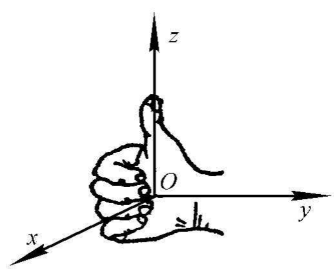

图 8-1

任意两条坐标轴确定一个平面,这样就确定了三个相互垂直的平面:xOy,yOz,zOx,这三个坐标平面统称为坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,称为八个卦限,在上半空间($z>0$)中,从含有Ox轴、Oy轴、Oz轴的正半轴的那个卦限数起,按逆时针方向分别称为Ⅰ卦限、Ⅱ卦限、Ⅲ卦限、Ⅳ卦限,下半空间($z<0$)中,与Ⅰ卦限、Ⅱ卦限、Ⅲ卦限、Ⅳ卦限四个卦限依次对应地分别称为Ⅴ卦限、Ⅵ卦限、Ⅶ卦限、Ⅷ卦限,如图8-2所示.

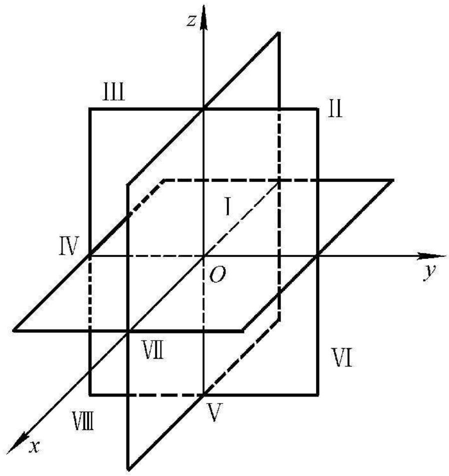

图 8-2

确定了空间直角坐标系后,就可以建立起空间点与有序数组之间的对应关系了.设M为空间中的一点,过点M分别作三个垂直于坐标轴的平面,这三个平面与Ox轴、Oy轴、Oz轴的交点依次为P、Q、R,如图8-3所示.因为$MP\perp Ox$轴,$MQ\perp Oy$轴,$MR\perp Oz$轴,所以,P、Q、R分别称为点M在坐标轴上的投影点.设点P在Ox轴、点Q在Oy轴、点R在Oz轴上的坐标依次为x,y,z,这样,空间中的一点M就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z).反之,给定了一个有序数组(x,y,z),我们可以在Ox轴上取坐标为x的点P,在Oy轴上取坐标为y的点Q,在Oz轴上取坐标为z的点R,然后通过P、Q与R分别作与Ox轴,Oy轴与Oz轴的垂直平面,这三个平面的交点就是点M(见图8-3).这样,就建立了空间中的点M和有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系.称(x,y,z)为点M的直角坐标,记为$M(x,y,z)$,x,y,z也分别称为点M的横坐标、纵坐标、竖坐标.

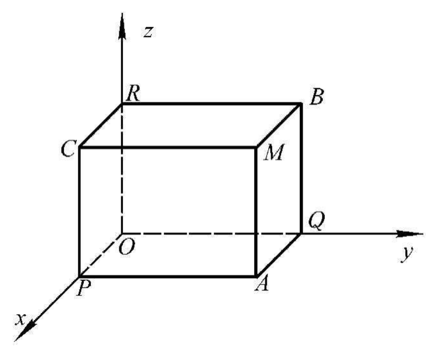

图 8-3

如图 8-3 所示，Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴上的点的坐标分别为 $P(x,0,0)$，$Q(0,y,0)$，$R(0,0,z)$；xOy 面，yOz 面和 zOx 面上的点的坐标分别为 $A(x,y,0)$，$B(0,y,z)$，$C(x,0,z)$；坐标原点 O 的坐标为 $O(0,0,0)$. 上述这些点的坐标各具有一定的特征，应注意加以区分.

8.1.2　空间中两点之间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中的任意两点，为了用两点的坐标来表达这两点之间的距离 d，我们过点 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以点 M_1，M_2 为对角线的长方体，如图 8-4 所示. 根据勾股定理，有

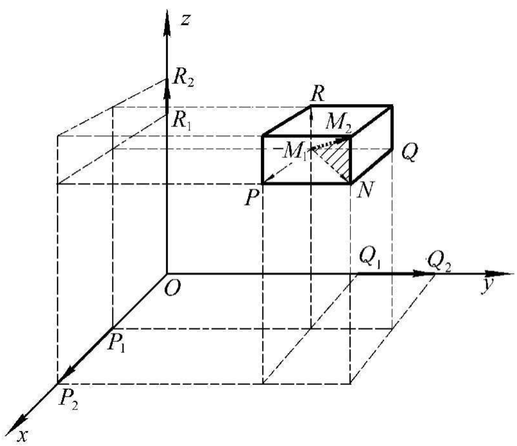

图 8-4

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$
$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$
$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \tag{8-1}$$

式(8-1)称为空间中两点之间的距离公式.

特别地，任意一点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{8-2}$$

例 8.1　已知两点 $A(1,4,\sqrt{2})$，$B(2,3,0)$，试求该两点之间的距离 d.

解　由式(8-1)，有

$$d = |AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2 + (0-\sqrt{2})^2} = 2.$$

例 8.2　在 Oz 轴上求与两点 $P(-4,1,7)$，$Q(1,5,-2)$ 等距离的点.

解　因所求点在 Oz 轴上，可设为 $R(0,0,z)$，由题设有 $|PR| = |QR|$，即

$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

整理得 $18z=36$,故 $z=2$. 于是所求点为$(0,0,2)$.

练习题 **8.1**

1. 绘制一个空间直角坐标系,确定出下列各点的位置并标出:$A(1,2,3)$;$B(3,0,0)$;$C(2,-3,-4)$;$D(3,4,0)$.

2. Ox 轴上的点的坐标有什么特点?Oy 轴上的点呢?Oz 轴上的点呢?

3. 求下列各对点之间的距离:

(1)$(0,0,0)$,$(2,-3,-4)$;　　(2)$(-2,3,-4)$,$(1,0,3)$.

4. 在 Ox 轴上求与两点 $A(4,1,5)$ 和 $B(3,5,2)$ 等距离的点.

5. 给定三个点 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$,试证 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

8.2 向量与向量的线性运算

8.2.1 向量的基本概念

我们曾经遇到的物理量有两种:一种是只有大小的量,称为数量,如时间、温度、距离、质量等;另一种是不仅有大小而且还有方向的量,称为向量或矢量,如速度、加速度、力等.

在平面和空间里,可以用一条有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向,并称为向量的几何形式. 如图 8-5 所示就是一个以 M_1 为始点,以 M_2 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 向量也可以用一个小写的黑体字母或上面加箭头的小写字母等来表示. 例如向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{u}$ 或 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{i}$,$\vec{u}$ 等.

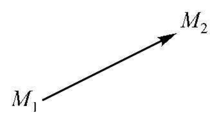

图 8-5

向量的大小称为向量的模,向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\boldsymbol{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$,$|\boldsymbol{a}|$.

在研究向量时,经常会用到以下几个特殊的向量,分别介绍如下:

单位向量:模等于 1 的向量称为单位向量.

逆向量(或负向量):与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的逆向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

零向量:模等于 0 的向量称为零向量,记为 $\boldsymbol{0}$,零向量没有确定的方向,也可以说零向量的方向是任意的.

相等向量:两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同且模相等,就说这两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

自由向量:与始点位置无关的向量称为自由向量(即向量可以在空间平行移动,所得向量与原向量是同一向量或相等).

本书研究的向量均为自由向量,必要时我们可以把一个向量平行移动到空间任一位置并视为同一向量.

平行向量:两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同或相反,就说这两个向量平行,记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移到一公共起点,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在同一条直线上,因此两向量平行也可以称为共线. 因为零向量 $\boldsymbol{0}$ 的方向是任意的,所以零向量 $\boldsymbol{0}$ 平行于任意向量.

8.2.2　向量的线性运算

1．向量的加法

我们规定向量的几何形式的加(减)法如下：

定义 8.1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个(非零)向量，把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行移动使它们的始点重合于 M，并以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，把以点 M 为端点的对角线向量 $\overrightarrow{MN}$ 定义为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8-6 所示．这样用平行四边形的对角线来定义两个向量的和的方法称为平行四边形法则．

由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图 8-6 可以看出，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可以按下列方法得出：把 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使 $\boldsymbol{b}$ 的始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，这时，从 $\boldsymbol{a}$ 的始点指向 $\boldsymbol{b}$ 的终点的有向线段 $\overrightarrow{MN}$ 就表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8-7 所示．这个方法称为三角形法则．

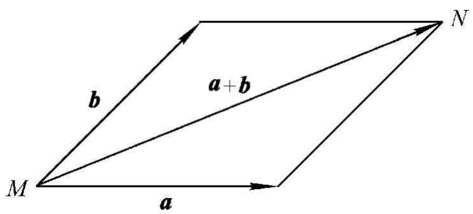

图 8-6

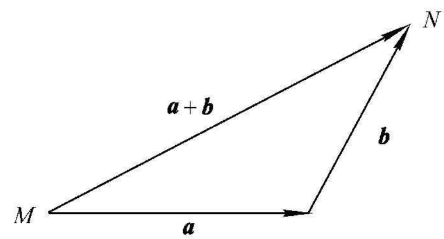

图 8-7

定义 8.2　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的逆向量 $(-\boldsymbol{b})$ 的和

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \tag{8-3}$$

按定义容易用作图法得到向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差．将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点放在一起，则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 8-8 所示．

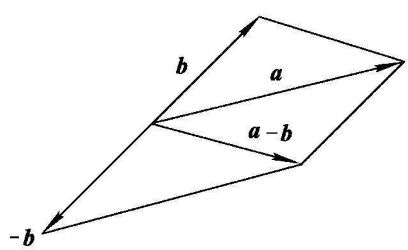

图 8-8

向量的加法满足下列性质：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；(交换律)

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(结合律)

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$．

2．向量与数量的乘法

定义 8.3　设 λ 是一实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个这样的向量：

当 $\lambda > 0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 λ 倍,即 $|\lambda\boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{a}|$;

当 $\lambda < 0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$.

当 $\lambda = 0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量,即 $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

向量与数量的乘法满足下列性质(λ,μ 为实数):

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$; (结合律)

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$; (分配律)

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. (分配律)

用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,则根据向量与数量乘法的定义,可以将 $\boldsymbol{a}$ 写成

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$$

这样就把一个向量的大小和方向都明确地表示出来.由此也有 $\boldsymbol{e}_a = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.就是说把一个非零向量除以其自身的模就得到与该向量同方向的单位向量.

可以用向量与数量的乘积来刻画向量的平行关系,即有以下定理.

定理 8.1 设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$,那么 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

证明 由定义 8.2 可知充分性显然成立.下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$,取 $\lambda = \pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时取正号,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时取负号.一方面 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向;另一方面

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$$

即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 大小相等,所以 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

上面证明了数 λ 的存在性,再证数 λ 的唯一性.设 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$ 同时成立,则有

$$\lambda\boldsymbol{a} - \mu\boldsymbol{a} = (\lambda-\mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

即

$$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}| = 0$$

因为 $|\boldsymbol{a}| \neq 0$,所以 $|\lambda-\mu| = 0$,即 $\lambda = \mu$.

8.2.3 向量在数轴上的投影

为了用代数方法来研究向量,需要引进向量的夹角和在数轴上的投影等概念.

1. 两向量的夹角

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,任取空间中的一点 O,作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$,则称这两向量正向之间的夹角 θ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,如图 8-9 所示,记为

$$\theta = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \text{ 或 } \theta = (\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

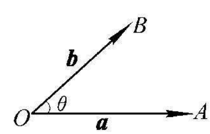

图 8-9

特别地,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\theta = 0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\theta = \pi$.

2. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴 u 上的投影

给定数轴 u 及数轴外一点 A,过点 A 作与数轴 u 垂直的平面 π,平面 π 与数轴 u 交于点 A',如图 8-10 所示,称点 A' 为点 A 在数轴 u 上的投影.数轴 u 称为投影轴.

设$\overrightarrow{AB}$为空间内任一向量，若 A、B 两点在数轴 u 上的投影分别为 A'、B'，如图 8-11 所示，设这两个点在数轴 u 上的坐标分别为 u_A，u_B，则称向量$\overrightarrow{A'B'}$为向量$\overrightarrow{AB}$在数轴 u 上的投影向量，称 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=u_B-u_A$ 为向量$\overrightarrow{AB}$在数轴 u 上的投影.

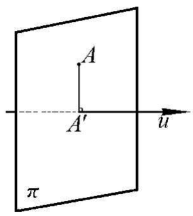

图 8-10

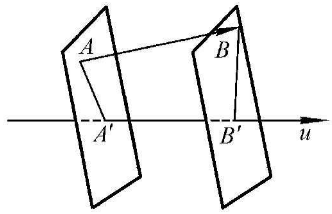

图 8-11

这里应特别指出的是：投影不是向量，而是数量，投影可正，可负，也可以是零.

关于向量的投影有下面两个定理：

定理 8.2　向量$\overrightarrow{AB}$在数轴 u 上的投影等于向量$\overrightarrow{AB}$的模乘以数轴 u 与向量$\overrightarrow{AB}$的夹角 α 的余弦，即

$$\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha \tag{8-4}$$

证明　如图 8-12 所示，过点 A 作与数轴 u 平行且有相同方向的数轴 u'，则数轴 u 与向量$\overrightarrow{AB}$之间的夹角 α 等于数轴 u' 与向量$\overrightarrow{AB}$之间的夹角. 从而有

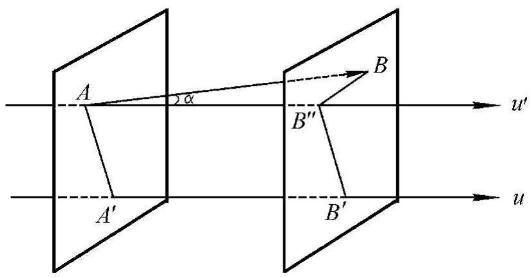

图 8-12

$$\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Pr}j_{u'}\overrightarrow{AB}=u'_B-u'_A=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha.$$

显然，当 α 是锐角时，投影为正；当 α 是钝角时，投影为负；当 α 是直角时，投影为 0.

定理 8.3　两个向量的和在同一数轴上的投影等于这两个向量在该数轴上投影的和，即

$$\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_2 \tag{8-5}$$

证明　设有两个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 及数轴 u，如图 8-13 所示.

$$\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\overrightarrow{AC}=u_C-u_A$$

而

$$\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_2=\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\overrightarrow{AB}+\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\overrightarrow{BC}=(u_B-u_A)+(u_C-u_B)$$

所以

$$\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_2.$$

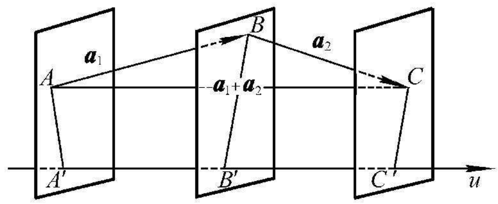

图 8-13

显然,定理 8.3 可以推广到有限个向量的情形,即

$$\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Pr}\boldsymbol{j}_u\boldsymbol{a}_n \tag{8-6}$$

8.2.4 向量的坐标

设空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$,用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴正方向的单位向量,并称 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为这一坐标系的坐标轴上的基本单位向量.

设空间中任一自由向量 $\boldsymbol{r}$ 的始点在原点 O、终点为 $M(x,y,z)$,称向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的向径. 如图 8-14 所示,设点 M 在三个坐标轴上的投影分别为

$$P(x,0,0),\quad Q(0,y,0),\quad R(0,0,z)$$

根据数与向量的乘法有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

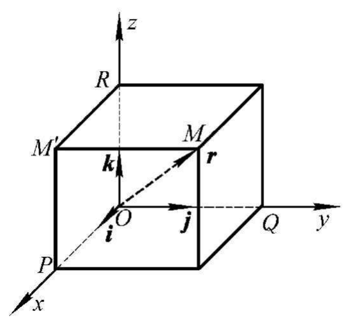

图 8-14

根据向量的加法,有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}$$

因为

$$\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{OR},\quad \overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OQ}$$

所以

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{8-7}$$

称式(8-7)为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式. 称

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z) \tag{8-8}$$

为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标. 若向量的始点在坐标原点,那么终点的坐标就是向量的坐标.

更一般地，设空间任一向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，点 M_1、M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，如图 8-15 所示，由于

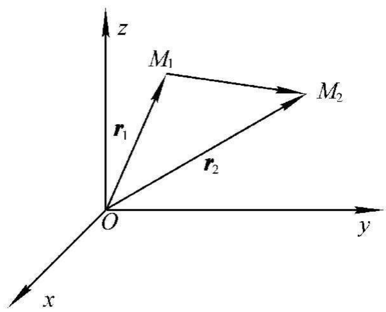

图 8-15

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

而 $\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

即起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\tag{8-9}$$

8.2.5　向量线性运算的坐标表示

利用向量的坐标，可以将向量的线性运算采用坐标表示.

设 λ 是一数量，$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$；因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x,a_y,a_z)\pm(b_x,b_y,b_z)=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)\tag{8-10}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\tag{8-11}$$

亦即，两向量之和(差)的坐标等于两向量对应坐标之和(差)；数量与向量之积，等于用数量乘以向量的每一个坐标.

前面知道向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

从而有 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

例 8.3　从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取线段 AB，使 $|\overrightarrow{AB}|=34$，求点 B 的坐标.

解 设点 B 的坐标为(x,y,z),则

$$\overrightarrow{AB}=(x-2)\boldsymbol{i}+(y+1)\boldsymbol{j}+(z-7)\boldsymbol{k}$$

按题意可知$\overrightarrow{AB}$ 上的单位向量与 $\boldsymbol{a}$ 上的单位向量相等,即

$$\boldsymbol{e}_{AB}=\boldsymbol{e}_a$$

而 $|\overrightarrow{AB}|=34$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{8^2+9^2+(-12)^2}=17$,所以

$$\boldsymbol{e}_{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{x-2}{34}\boldsymbol{i}+\frac{y+1}{34}\boldsymbol{j}+\frac{z-7}{34}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{8}{17}\boldsymbol{i}+\frac{9}{17}\boldsymbol{j}-\frac{12}{17}\boldsymbol{k}$$

比较以上二式得:$\frac{x-2}{34}=\frac{8}{17},\frac{y+1}{34}=\frac{9}{17},\frac{z-7}{34}=-\frac{12}{17}$.解得

$$x=18,\quad y=17,\quad z=-17.$$

所以点 B 的坐标为$(18,17,-17)$.

例 8.4 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$,求 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向的单位向量.

解 因为 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=3(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})-(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$

于是

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3^2+(-7)^2+(11)^2}=\sqrt{179}$$

所以

$$\boldsymbol{e}_c=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{3a-b}{|3a-b|}=\frac{1}{\sqrt{179}}(3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}).$$

8.2.6 向量的模与方向余弦

向量可以用向量的模和方向来表示,也可以用向量的坐标来表示.设

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

由空间中两点之间的距离公式可知

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地,若 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$,则

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{8-12}$$

为了找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系,我们先介绍一种在空间坐标系中表达向量方向的方法.

与平面解析几何中用倾角表示直线对坐标轴的倾斜程度相类似,我们可以用向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(a_x,a_y,a_z)$ 与三条坐标轴(正向)的夹角 α,β,γ 来表示该向量的方向,α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

过点 M_1,M_2 各作垂直于三条坐标轴的平面,如图 8-16 所示,由于 $\angle PM_1M_2=\alpha$,又 $M_2P\perp M_1P$,所以

$$a_x=M_1P=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$$

同理

$$a_y=M_1Q=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta$$

$$a_z=M_1R=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$