数理化知识探索

张焕明数学教育研究文集（二）

张焕明/著

远 方 出 版 社

数理化知识探索

张焕明数学教育研究文集(二)

张焕明/著

远 方 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

张焕明数学教育研究文集.2/张焕明著.—2版.—呼和浩特:远方出版社,2007.12

(数理化知识探索)

ISBN 978-7-80595-979-5

Ⅰ.张… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课—教学研究—中学—文集 Ⅳ.G633.602—53

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第200243号

数理化知识探索

张焕明数学教育研究文集(二)

著　　者 张焕明
出版发行 远方出版社
社　　址 呼和浩特市乌兰察布东路666号
电　　话 0471-4919981(发行部)
邮　　编 010010
经　　销 新华书店
印　　刷 廊坊市华北石油华星印务有限公司
开　　本 850×1168　1/32
字　　数 1215千
印　　张 97.5
版　　次 2007年12月第2版
印　　次 2007年12月第1次印刷
印　　数 3000
标准书号 ISBN 978-7-80595-979-5

前　言

按照国家教育部的统一部署,我国的基础教育改革工作正在逐步深入。同时,关于课程管理政策、评价制度、综合实践活动的研究,均已取得阶段性成果。

新课程改革,不仅给教师带来了严峻的挑战,而且也为教师的发展提供了契机。新课程强调教师是学生学习的合作者、引导者和参与者,教学过程是师生交流、共同发展的互动过程。这也意味着师生之间应该平等对话,教师将由居高临下的权威角色转向平等中的首席,教师与学生将互教互学,彼此形成一个真正的学习共同体。

由此,在学生的学习过程中,自主学习、合作学习、探究性学习、研究性学习、体验性学习与实践性学习就显得格外重要,尤其是在数理化知识的汲取方面,这点就更为突出。比如研究性学习,学生要进行有效的研究,就要求作为参与者与指导者的教师首先应是研究者,具有研究的经历和体验。唯有这样,才能真

正地实现让学生进行有目的的研究，并从中受益。

在新课程理念的感召下，培养学生的综合能力也是大势所趋。这就要求教师必须发挥集体的智慧，改变彼此之间孤立与封闭的现象，学会与他人合作，与不同学科的教师打交道，学习其他学科的知识、思维和方法。

本套丛书是从事数学、物理、化学三科教学的优秀教师教学方法与教学经验的作品集，旨在将知识与技巧融为一体，将创新思维与实践精神合而为一。在数学方面，不但涵盖了教学理论与教学策略、课堂设计与课堂评价，而且还有富于经验的教育文集；在物理方面，有解题快捷规律，也有解题障碍诊断；在化学方面，有知识要点的精析，也有新颖实用的教法，融趣味性与知识性于一体。

我们期待教师从此套丛书中发现其他教师教学方面的优点，并为自己的教学提供借鉴，进而丰富教学思维和方法，发挥能动性、创造性，设计出适合所教学生的、富有个性化的教学活动。

编　者

2007 年 12 月

目　　录

第四章　教材教法与学习方法研究 ······ 1

1　证明浙大少年班的一个招考题 ······ 1

2　从一道课本例题的教学所想到的 ······ 5

3　一道课本几何题的推广 ······ 8

4　一道课本练习题的推广及妙用 ······ 12

5　高中数学学法指导 ······ 27

6　函数单调性的基本问题 ······ 38

7　怎样求关于一元二次不等式有关的问题 ······ 46

8　怎样解函数图像变换题 ······ 53

9　直线与圆的基本问题 ······ 61

10　怎样用复数的代数形式解题 ······ 69

11　怎样解数列探索题 ······ 75

12　怎样用反函数的概念解题 ······ 88

13　二项式定理有哪些常见的题型 ······ 94

14　谈谈按新定义运算解题 ······ 99

15　三垂线定理及其应用 ······ 108

16　怎样求关于轴对称的题目 ······ 113

17　数学综合题解法的思路 ······ 123

18　辩证思维与数学解题 ······ 136

19　如何学好等比定理 ······ 146

20　和同学们谈谈平面几何的学习 ······ 154

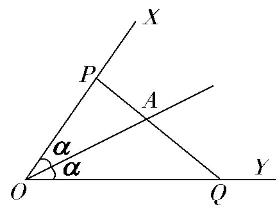
21　怎样学好初中数学…………………………………… 158
22　怎样学好课本中的例题和习题…………………… 162
23　怎样学好数学概念………………………………… 165
24　学会运用数学公式………………………………… 168
第五章　解题方法与技巧研究…………………………… 174
1　用张角定理证明平面几何题 ………………………… 174
2　平面几何中不对称等式的 …………………………… 179
3　用韦达定理证平面几何题证题思路 ………………… 185
4　辅助图形构造法初探 ………………………………… 189
5　巧用柯西不等式解三角题 …………………………… 195
6　用结论换元法求三角数列的和与积 ………………… 201
7　一类反三角函数式的证明方法 ……………………… 208
8　退化、简化、特殊化发现 …………………………… 211
9　强化法解题例说 ……………………………………… 217
10　不等式……………………………………………… 222
11　探求中间量的一种方法…………………………… 224
12　用拆项法解方程与不等式………………………… 229
13　几何根式的证明…………………………………… 231
14　初中数学解题中的辩证思维……………………… 237
15　解代数题的一些技巧……………………………… 246
16　用代数分析法添加几何辅助线…………………… 252
17　偶质数的妙用……………………………………… 255
第六章　竞赛试题与解题研究…………………………… 257
1　一道数学竞赛题的背景及其推广 …………………… 257
2　三道数学竞赛题的推广 ……………………………… 260
3　在课本中寻找竞赛题的影子 ………………………… 265

4　从一道竞赛题的解法想到的 …………………… 277
5　赋值法解竞赛题例说 ……………………………… 281
6　数学竞赛中的方格盘问题 ……………………… 286
7　用转换法解数学竞赛题 ………………………… 293
8　类比转化与解题思路 ……………………………… 302
附录　发表论文与论著目录……………………………… 305

第四章　教材教法与学习方法研究

1　证明浙大少年班的一个招考题

全日制初中几何第二册总复习题24题：经过$\angle XOY$的平分线上一点A，任作一直线与OX、OY分别相交于P、Q，求证：$\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}$等于定值。



证明　如图，$\because S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}OP\cdot OQ\cdot\sin 2\alpha$

$$=OP\cdot OQ\cdot\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}OA\cdot OQ\cdot\sin\alpha,$$

$$S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}OA\cdot OP\cdot\sin\alpha,$$

又$\because S_{\triangle OPQ}=S_{\triangle OAQ}+S_{\triangle OAP}$，

$\therefore 2\,OP\cdot OQ\cos\alpha=OP\cdot OA+OQ\cdot OA$。

即$\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}=\dfrac{2\cos\alpha}{OA}$.　…………………………（*）

$\because \cos\alpha$、OA均为定值，故命题得证。

用这个题目来证明浙大少年班第一届的一个招考题尤为简捷。

题目 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，$CA=a$，$CB=b$，$\angle C$ 的 n 等分线顺次与斜边 AB 交于 P_1、P_2、…、P_{n-1}，试证：

$$\frac{1}{CP_1}+\frac{1}{CP_2}+\cdots+\frac{1}{CP_{n-1}}=\frac{a+b}{2ab}\left(\cot\frac{\pi}{4n}-1\right)。$$

证明 设 $CP_1=m_1$，$CP_2=m_2$，…，$CP_{n-1}=m_{n-1}$。

由已知条件知，$\angle ACP_1=\angle P_1CP_2=\cdots=\angle P_{n-1}CB=\frac{\pi}{2n}$。

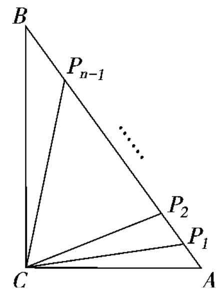
由（*）式得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{m_2}=\frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{m_1},$$

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}=\frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{m_2},$$

……,

$$\frac{1}{m_{n-2}}+\frac{1}{b}=\frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{m_{n-1}}.$$



上面诸式相加，得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_{n-1}}+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{m_i}=2\cos\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{m_i} \quad ①$$

在 $\triangle ACP$ 中，有 $\dfrac{m_1}{\sin A}=\dfrac{a}{\sin\left[180°-\left(\dfrac{\pi}{2n}+A\right)\right]}$，

$$\therefore \frac{1}{m_1}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{2n}\cdot\cos A+\cos\dfrac{\pi}{2n}\cdot\sin A}{a\sin A}$$

$$=\frac{1}{a}\sin\frac{\pi}{2n}\cot A+\frac{1}{a}\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$=\frac{1}{b}\sin\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{a}\cos\frac{\pi}{2n}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

同理可得 $\dfrac{1}{m_{n-1}}=\dfrac{1}{a}\sin\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{1}{b}\cos\dfrac{\pi}{2n}.\quad\cdots\cdots\cdots$ ③

把②、③代入①，整理，得

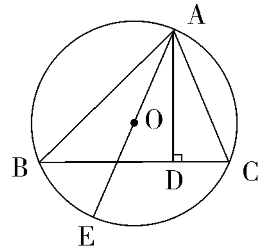
$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{m_i}=\frac{1}{-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1-\sin\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$=\frac{a+b}{2ab}\left(\cot\frac{\pi}{4n}-1\right).$$

浙江《中学教研》（数学）1989 年第2 期

人为什么在环境气温 20°～24°下生活感到最适宜?因为人体的正常体温是 36°～37°，这个体温与 0.618 的乘积恰好是 22.4°～22.8°，而且在这一环境温度中，人体的生理功能、生活节奏等新陈代谢平均处于最佳状态。

2　从一道课本例题的教学所想到的



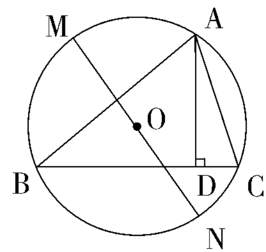
笔者在搞教学调查时，听了一位老师的平面几何课，课题是“圆周角”，在讲一道课本例题时处理得较好，现写出来供大家参考。

例题　如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，AE 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径。

求证：$AB \cdot AC = AE \cdot AD$（《几何》 第二册 $P85$）。

这是一道用“三点法找相似三角形” 来证比例式（等积式）的典型题目。

当教师讲完了这道题目后，提出了这样的问题：

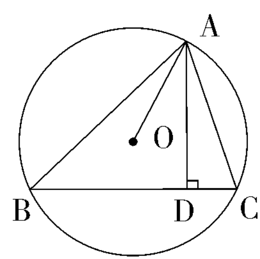


能否将这道题目经过适当的变化，改成其它“形异质同” 的题目呢？

经过数分钟的学生自由讨论，加上老师的点拨启发，得出了这样一组变题：

变题 1　如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，MN 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径。

求证：$AB \cdot AC = AD \cdot MN$。



变题 2　如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的

圆心。

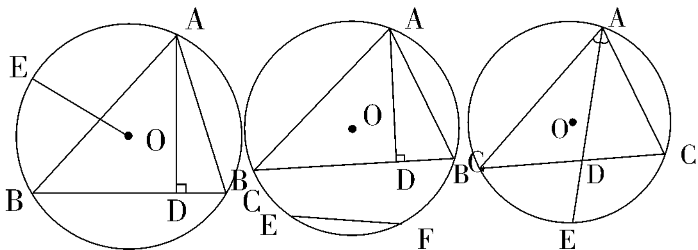
求证：$AB \cdot AC = 2AO \cdot AD$。

变题 3 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，R 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径。

求证：$AB \cdot AC = 2R \cdot AD$。

变题 4 如下页图左，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，OE 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径。

求证：$AB \cdot AC = 2OE \cdot AD$。



变题 5 如图中，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，E、F 是 $\triangle ABC$ 外接圆上两点，且$\overset{\frown}{EF}$ 的度数是$60°$。

求证：$AB \cdot AC = 2EF \cdot AD$。

变题 6 如图右，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，交其外接圆于 E。

求证：$AB \cdot AC = AE \cdot AD$。

变题 7 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，且 $AB = 4$，$AC = 3$，$AD = 2$. 求 $\triangle ABC$ 外接圆的直径。

变题 8 已知 $\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，并延长交其外接圆于E，且 $AB = 4$，$AC = 3$，$AD = 2$. 求弦 AE 的长。

教师对这些变题的书写、讲解详略得当，多数同学只要稍加启发即可获得，通过对这道例题的变化，不但加深了对题目本身

的理解，而且培养了一题多变的能力，使学生初步掌握编题的技能和技巧。

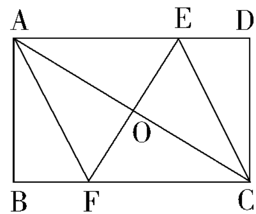
离下课只有5 分钟了，学生的思维逐渐趋于平静，教师小结了这节课的内容后，又提出了这样一个课外作业：

这道例题不但可以变出这么多题目，而且它还是一个“定理型” 题目，请同学们利用课外时间去收集、研究、整理。

北京《中小学数学》1992 年第7 期

3　一道课本几何题的推广

统编初中几何第一册178页的例题是：



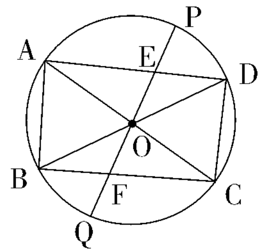
已知矩形$ABCD$的对角线AC的垂直平分线与边AD、BC分别交于E、F。

求证：四边形$AFCE$是菱形（如图）。

这是一道极其平凡的题目，然而由它所引伸出来的题目却不平凡。实际上，EF与AC的交点（垂足）O就是矩形$ABCD$的中心，所以可得

命题1　过矩形$ABCD$的中心O引直线与边AD、BC交于E、F，则$OE=OF$。

因矩形的四个顶点共圆，两条对角线AC、BD是圆的直径，O是圆心，所以又可得



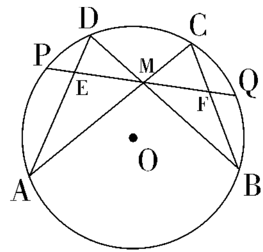
命题2　AC、BD为$\odot O$的两条直径，直径PQ交弦DA于E，交弦BC于F，则$OE=OF$（如图）。

若将命题2中于“直径AC、BD、PQ”改为“弦AC、BD、PQ，但保持AC、BD都经过PQ的中点”这一条件，则得

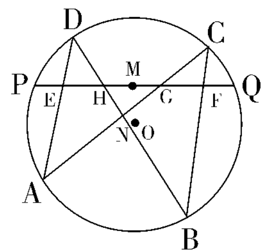
命题3　PQ为圆O的弦，M为PQ的中点，经过M的弦AC、BD与AD、BC交于E、F，则$ME=MF$（如图）。

这就是著名的蝴蝶定理。

若将命题3中的条件“经过 $M\cdots$”改为“不经过 $M\cdots$”，并使 $MH=MG$，则得



命题4 如图，M 是圆 O 的弦 PQ 的中点，过圆 O 内一点 N 引弦 AC、BD 与 PQ 分别交于 G、H，AD、BC 与 PQ 分别交于 E、F，且 $MH=MG$，则 $ME=MF$。



证明 设 $\angle A=\angle B=\angle\alpha$，$\angle C=\angle D=\angle\beta$，$\angle EHD=\angle BHF=\gamma$，$\angle FGC=\angle AGE=\delta$。

又设 $EM=x$，$FM=y$，$PM=QM=a$，$HM=GM=b$。

则 $\dfrac{S_{\triangle DHE}}{S_{\triangle CGF}}\cdot\dfrac{S_{\triangle CGF}}{S_{\triangle EAG}}\cdot\dfrac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle FHB}}\cdot\dfrac{S_{\triangle FHB}}{S_{\triangle DHE}}=1$。

$\therefore\ \dfrac{DE\cdot DH\sin\beta}{CF\cdot CG\sin\beta}\cdot\dfrac{CG\cdot GF\sin\delta}{GA\cdot GE\sin\delta}\cdot\dfrac{AG\cdot AE\sin\alpha}{BF\cdot BH\sin\alpha}\cdot\dfrac{HB\cdot HF\sin\gamma}{HD\cdot HE\sin\gamma}=1$。

化简并整理，得

$DE\cdot GF\cdot AE\cdot HF=CF\cdot EG\cdot BF\cdot HE.\quad\cdots(*)$

$\therefore\ GF=MF-GM=y-b$，

$HF=HM+FM=y+b$，

$EG=EM+MG=x+b$，

$HE=EM-HM=x-b.$