# 代數術

# 代數術卷九

英國華里司輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

## 論二次之正雜各方式解法

第八十五款　二次式者其式中必有未知數之二次方其式有二種　一爲二次之正方式　一爲二次之雜方式

二次之正方式者如法變化相消之後其代未知數之元只在一項中爲平方而其他項之中則皆爲已知之數

如有式

$天^{二}=六四$。

或

$甲天^{二}\perp乙=丙$

此類之式。皆為二次之正方式。

二次之雜方式者。如法變化相消之後。其代未知數之元。在一項中為平方。而第二項中亦有其元之一方。其餘他項。則俱為已知之數。

如有式

$天^{二}\perp三天=二八$。

或

$二天^{二}=三三丅五天$。

或

$甲天^{二}\perp乙天丅丙=丁$。

此類之式皆為二次之雜方式

二次正方式之解法甚易知。如其代未知數之元。移至

獨居一邊其倍數爲一而相當之彼邊俱爲已知之數則兩邊各開平方即得元之同數

如六卷第五法是也

第八十六款　凡開任何數之平方必須留心其所得之根或爲正號或爲負號或爲正負兩可之號其識別之法專恃乘法變號之理

如依乘法之例將任何數無論正或負自乘之其乘得之積必俱爲正所以丄甲與丅甲之平方俱爲丄甲二則如將丄甲二開其平方根可爲丄甲亦可爲丅甲故其開得之根必以加減兩可之號記之如±甲是也

第八十七款　前款已明任何數。無論正負。其自乘之積必爲正數。準此說。則知必無一箇實在之數。自乘而能爲負數者。所以如欲將一負數。求其平方根。則可知其斷不能有此數。

所以解題之時。若遇其式必須開一負數之平方根。而始可得同數者。則知其事必不合于理。或因誤會題意。或是其題本來不通。

第八十八款。　凡二次之雜方式。若依法化之。必得以下三箇式中之任一式。

一式　天二⊥己天＝午

二式　天二⊥己天＝午

三式　天二⊥己天＝午

惟解此三式之法，其理相同，所以只須將第一式細論之，已足以明其理。

如將第一式 天二⊥己天＝午 中有未知數之項 天二⊥己天 與他兩項式如 天⊥甲 之平方 天二⊥二甲天⊥甲二 相比，即 天二⊥己天 與 天二⊥二甲天 相比，如思 二甲＝己，即 甲＝己/二，則 天二⊥己天 與 天二⊥二甲天 必相等無異。又因 天二⊥二甲天 若加以 甲二，即得 天二⊥二甲天⊥甲二 為 天⊥甲 之

自乘數則依此理亦可將$天^{二}丄己天$加以$\frac{己^{二}}{四}$即亦得一正

自乘數此因$\frac{己^{二}}{四}$等于$(\frac{己}{二})^{二}$故也所以亦可以將本

式$天^{二}丄己天=午$之兩邊各以$\frac{己^{二}}{四}$加之使左邊配成平方即得

式$天^{二}丄己天丄\frac{己^{二}}{四}=\frac{己^{二}}{四}丄午$即$(天丄\frac{己}{二})^{二}=\frac{己^{二}}{四}丄午$兩邊各開平方得$天丄\frac{己}{二}=\pm\sqrt{\frac{己^{二}}{四}丄午}$所以得$天=丅\frac{己}{二}\pm\sqrt{\frac{己^{二}}{四}丄午}$

第八十九款　由前款之說得以下各法為解各種二次

雜方式之公法

一、將式中凡有未知數之各項。盡移于左邊。其已知數之各項。盡移于右邊。又令其有未知數平方之項。必爲正。

二、觀其未知元之平方。若有倍數。則以此倍數。遍約各項。令其未知元之平方。其倍數爲一。

三、將式之兩邊。各加一未知元一次方之半倍數平方。則其式之左邊之諸項。必爲正自乘數。

四、將兩邊各開平方。則式之諸項中。只有未知元之一次式。又移其已知之數于右邊。令右邊皆爲已知數。而左邊只有未知元之一次方。則二次雜方之式已

解矣．

惟配成平方之後．欲開方之時．須留心記得其左邊之平方根．恆等于未知數．與第二項半倍數之平方相加．若次項之號爲正．則等于其和數．若次項之號爲負．則等于其較數．

一式有$天^{二}\perp二天=三五$，求天之同數．

其第二項之倍數爲二．則半之爲一．自乘亦爲一．故于本式之兩邊．各以一加之．使左邊配成正平方式．則其式爲

$天^{二}丄二天丄一=三五丄一$。即 $天^{二}丄二天丄一=三六$ 兩邊各開平方得 $天丄一=\sqrt{三六}=丄丅六$。所以 $天=丅一丄丅六$。即得 $天=丄五$。或 $天=丅七$。

其天之兩箇同數丄五、及丅七、俱可解其本式、因 $五\times五丄二\times五=三五$、而

其 $丅七\times丅七丄二\times丅七$、亦等于三五、故也。

二式有 $\frac{天^{二}}{六}丅一二=天$。求天之同數、將本式化之為 $天^{二}丅六天=七二$。依法配

成正平方得 天二丅六天丄九＝七十二丄九＝八一 兩邊各開平方得 天丅三＝±九 即 天＝±九丄三 所以得 天＝十二 或 天＝丅六 如以此兩箇同數試之即知此二數皆可以解其本式因 十二二丅六乂十二＝七十二 而 丅六二丅六乂丅六＝七十二 故也

三式有 天二丄二八＝一一天 求天之同數先以本式移作 天二丅一一天＝丅二八 乃依法配

成正平方。得 $x^2-11x+\frac{121}{4}=\frac{121}{4}-28$ 即 $x^2-11x+\frac{121}{4}=\frac{9}{4}$ 兩邊各開平方。得 $x-\frac{11}{2}=\pm\frac{3}{2}$ 所以得 $x=\frac{11}{2}\pm\frac{3}{2}$ 即 $x=+7$。或 $x=+4$。觀一二兩題所求得天之兩同數。俱爲一正一負。而此式中所得天之兩同數。俱爲正。如試之。即知所得之兩箇正數。俱可解其本式。因 $7\times7+28=11\times7$。而 $4\times4+28=11\times4$。故也。

第九十款　初觀二次式之解法，其未知之數，每有兩箇各異之同數，人未免疑之，應再細察其究因何故而能然，則知不但二次式如此，卽多次式亦然，惟以上所論二次式之理，覺尙未詳，

第九十一款　今將前八十九款中第一題之式，再詳論之，

如以 $\text{天}^{\text{二}}\perp\text{二天}=\text{三五}$ 式之各項，盡聚于左邊，爲 $\text{天}^{\text{二}}\perp\text{二天}\top\text{三五}=\bigcirc$，則知若能尋得一箇數目，可代其式中之天，而令左邊各項之總數等于○者，則其所用之一箇數目，卽爲天之同數無疑，

惟$天^{二}$⊥二天⊤三五又為天⊤五與天⊥七相乘之積數所以知(天⊤五)(天⊥七)＝○凡兩數中如有一數為○則其相乘而得之積亦為○所以天⊤五與天⊥七兩式中若任有一式等于○則其相乘而得之積皆可等于○若天⊤五＝○則天＝五若天⊥七＝○則天＝⊤七所以$天^{二}$⊥二天⊤三五之式其天可有兩箇同數一為⊥五一為⊤七則與前款中所得之數相合

第九十二款 前款專取一箇二次式論之其各理已如

此則推之凡有二次式其理莫不皆然

如有式 $天^{2}\perp已天=午$ 移其項聚于一邊為 $天^{2}\perp已天\top午=〇$ 則恆必能尋得兩箇

乘數如 $天\top甲$ 與 $天\perp乙$ 能令 $天^{2}\perp已天\top午=(天\top甲)(天\perp乙)$ 其甲乙為已知之數不過憑

本式中已知之數已午而得如果 $(天\top甲)(天\perp乙)=〇$ 則非 $天\top甲=〇$ 必 $天\perp乙=〇$ 則

可見 $天^{2}\perp已天\top午=〇$ $天^{2}\perp已天=午$ 無論以為 $天=\perp甲$ 或以為 $天=\top乙$ 俱可解之

由以上所論之理。可見凡一箇二次之式中。其天之同數。只能有兩箇。

如果天之同數能有三箇。或多箇。則必能將天丅午天丄巳化得等多之乘數天丅丙天丄丁等式。惟因乘數若有兩箇以上。則其相乘而得之積。其各項中必有天之三方。或多方。今觀天丅午天丄巳之式中。無有過天之二方者。所以知斷不能有多于兩箇之同數。

第九十三款

前款已證明天²丄巳天丅午為天丅甲與天丄乙兩箇相乘之積今本款將此兩箇乘數窮究其情狀

如將天丅甲與天丄乙相乘得天²丄(乙丅甲)天丅甲乙此式既必等于天²丄巳天丅午則可見乙丅甲＝巳而甲乙＝午若將兩邊之項俱變其號則得甲丅乙＝丅巳丅甲乙＝丅午所以如用丄甲與丅乙為天²丄巳天＝午之根則易知甲丅乙為其兩根之和而丅甲乙必為