单墫初中数学指津
——代数的魅力与技巧

单 墫 著

上海辞书出版社

前 言

这几本课外读物，是提供给初中同学学习数学用的.

五十多年前，我也是中学生. 当时有几本小册子，如许莼舫的《几何定理和证题》，刘尼的《因式分解》等，都写得很好.

可惜这些书，现在都见不到了.

目前充斥市场的是各种练习册、习题集.

学数学，不是为了当熟练的"操作工"、"模仿秀"，而是为了学会思考.

大量重复的练习，不利于培养学习的兴趣，甚至会弄坏了学习的"胃口".

因此，上海辞书出版社向我约稿时，我承诺写几本有助于培养学习兴趣的书. 但现在年事渐高，体力与精力大不如前，花了一年时间才写成三册.

如果同学们能够耐心地阅读这几本书，并觉得对启迪思维有些帮助，那么我就心满意足了.

单 墫

2014 年 5 月

目 录

第一章

字 母 世 界

这本课外读物介绍的是初中代数.

读者应当学过小学数学,并且知道有理数的有关知识.

本书是课外读物,当然不同于通常的课本.它的特点可以用四个字概括:曲径通幽.

我们沿着一条小路,僻静的、弯弯曲曲的、有点幽香的小路,通向繁花盛开的数学花园.一路上,能够欣赏到丘壑的错落,享受到山林的野趣,这就是我们所希望的.

本章引领读者进入字母世界,了解其中的种种规则,观念与符号.

“入乡问俗”,我们会发现“字母世界”中,绝大多数事物与“数的世界”是一样的,但也有所不同,有一些新的东西,值得我们注意,值得我们学习.

温故知新,就是我们的学习方法.

既然进入这个世界,我们就是其中的一个主人,应当而且可以考虑如何合理地拟定其中的规则,如何自由地运用这些规则,如何欣赏获得的成果,如何解决面临的问题或绕过前进的障碍.

没有东西可以阻挡我们前进.

向前进,你就会产生信心!

1. 从特殊到一般

代数，顾名思义，就是用字母来代表数.

用字母代表数，有什么好处？

好处就是可以反映一般的规律. 例如：

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

只是一个特殊的、具体的例子. 但从这些具体、特殊的例子中，可以归纳出一般的规律：

乘法交换律　对任意两个数 a、b，

$$a \times b = b \times a.$$

同样地，用字母可以表示：

加法交换律　对任意两个数 a、b，

$$a + b = b + a.$$

乘法结合律　对任意三个数 a、b、c，

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

加法交换律　对任意三个数 a、b、c，

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

（乘法对加法的）分配律　对任意三个数 a、b、c，

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

在字母运算时，乘号常常省略. 例如分配律可写成

$$a(b + c) = ab + ac.$$

除法也有分配律，对任意三个数 a、b、c $(a \neq 0)$，

$$(b + c) \div a = b \div a + c \div a.$$

不过,"$\div a$"可作为"$\times \frac{1}{a}$"处理.所以通常只说乘法分配律,而不说除法分配律.

一个等式,如果不论其中字母代表什么数(当然除数不能为0),它们都是成立的,那么这个等式就称为恒等式.

表示上述规律的等式,都是恒等式.

2. 公　　式

很多公式,用字母表示尤为方便.

设正方形的边长为 a,周长为 p,面积为 S,则

$$p = 4a, \tag{1}$$

$$S = a^2. \tag{2}$$

设长方形的长为 a,宽为 b,周长为 p,面积为 S,则

$$p = 2(a+b), \tag{3}$$

$$S = ab. \tag{4}$$

设三角形的一边为 a,这边上的高为 h,面积为 S,则

$$S = \frac{1}{2}ah. \tag{5}$$

设梯形的上底为 a,下底为 b,高为 h,面积为 S,则

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h. \tag{6}$$

设平行四边形的一边为 a,这边上的高为 h,面积为 S,则

$$S = ah. \tag{7}$$

设圆的半径为 r,周长为 p,面积为 S,则

$$p = 2\pi r, \tag{8}$$

$$S=\pi r^2. \tag{9}$$

设多边形的边数为 n,多边形的内角和为 S,则

$$S=(n-2)\times 180^\circ. \tag{10}$$

其中有些公式是相通的.例如(6)式中:令 $a=b$,(6)式就变成(7)式;令 $b=0$,(6)式就变成(5)式.

3. 两位数,三位数

两位数 32 的个位数字是 2,十位数字是 3.一般地,如果一个两位数,个位数字是 b,十位数字是 a,这个数应当表示为

$$10\times a+b, \tag{1}$$

也就是

$$10a+b. \tag{2}$$

在数与字母相乘(或字母与字母相乘)时,乘号"×"可以省略,$10\times a$ 可以写成 $10a$.同样,$a\times b$ 可以写成 ab.

因此,ab 并不是十位数字为 a,个位数字为 b 的两位数,而是 a 与 b 的乘积.

同样,百位数字为 a,十位数字为 b,个位数字为 c 的三位数应当表示为

$$100a+10b+c. \tag{3}$$

而 abc 却表示 a、b、c 三个数的乘积.

有时也用 $\overline{ab}$ 表示十位数字为 a、个位数字为 b 的两位数,用 $\overline{abc}$ 表示百位数字为 a、十位数字为 b、个位数字为 c 的三位数.但上面的一条横线绝不能省,否则便产生混乱.

例题　将任一个两位数的十位数字与个位数字交换,再将得出的两位数与原数相加.证明所得的和一定被 11 整除.

证明　设这个两位数为 $10a+b$,则十位数字 a 与个位数字交换后,所得两位数是 $10b+$

a.两个数的和

$$(10a+b)+(10b+a)=11a+11b=11(a+b)$$

被 11 整除.

4. $65^2=?$

$65^2=65\times65=4\ 225$.

不难算出结果,但要一口报出答数,恐怕也不太容易.可以再试一试:

$$75^2=?$$

诀窍是“积的末两位是 25,百位以上(含百位)是被乘数的十位数字加 1 再乘以十位数字”.即

$$75^2=700\times(7+1)+25=5\ 625.$$

更一般地,如

$$78\times72=5\ 616.$$

这类“头同尾合十”的乘法,被乘数与乘数是十位数字相同的两位数,并且个位数字的和为 10.相乘时,所得的积,末两位就是被乘数的个位数字与乘数的个位数字相乘,而百位以上(含百位)就是被乘数的十位数字加 1 再乘以十位数字.

用字母表达更为清晰:设 a、b、c 为数字,并且 $b+c=10$,那么

$$(10a+b)(10a+c)=100a(a+1)+bc.$$

理由很简单:用分配律

$$\begin{aligned}&(10a+b)(10a+c)\\=&10a\times10a+10ac+10ab+bc\\=&100a\times a+10a(b+c)+bc\\=&100a\times a+100a+bc\\=&100a(a+1)+bc.\end{aligned}$$

5. 手指表示乘法口诀

$1\times 9=9$, $2\times 9=18$, $\cdots$, $9\times 9=81$，可以用手指来表示.

例如 4×9，可以这样表示：

将两手平伸，手心向上. 从左开始数至第 4 个手指（左手的无名指），将它弯起. 在它左边有 3 个手指，右边有 6 个手指，乘积就是 36（四九三十六）.

不妨试一试其他情况，肯定屡试不爽.

为什么呢？

这是不难证明的.

证法一　设 k 表示 1, 2, $\cdots$, 9 中的某一个数. 在第 k 个手指左面，有 $k-1$ 个手指；右面，有 $10-k$ 个手指. 而

$$10(k-1)+(10-k)=9k.$$

证法二　一共有 9 种情况，不难一一验证. 既然 9 种情况都成立，当然这种方法是正确的. 这种证法叫作枚举法或穷举法（穷即穷尽一切可能）.

6. 三 阶 幻 方

图 1-1 的正方形由 9 个小方格组成. 每个小方格中各填一个数. 如果每一行（上三个数）的和、每一列的和、每条对角线的和，都等于同一个数 s，即

$$a+b+c=s \tag{1}$$

$$d+e+f=s \tag{2}$$

$$g+h+i=s \tag{3}$$

$$a+d+g=s \tag{4}$$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

图 1-1

$$b+e+h=s \tag{5}$$

$$c+f+i=s \tag{6}$$

$$a+e+i=s \tag{7}$$

$$c+e+g=s \tag{8}$$

那么图 1-1 就称为三阶幻方.

三阶幻方有许多有趣的性质与问题.

例 **1**　已知 $e=10$,求 $s=?$

解　(5)+(7)+(8),得

$$b+e+h+a+e+i+c+e+g=3s,$$

即

$$(a+b+c)+3e+(g+h+i)=3s. \tag{9}$$

(9)-(1)-(3),得

$$3e=s. \tag{10}$$

所以三阶幻方具有以下性质:

每一行(列、对角线)的和等于中央那个数的 **3** 倍.

特别地,在 $e=10$ 时,$s=30$.

例 **2**　已知 $a=15$, $i=5$. 求 $e=?$

解　由(10)式,e 是 s 的$\frac{1}{3}$. $a+i+e=s$,所以 $a+i$ 是 s 的$\frac{2}{3}$,即 $a+i$ 是 e 的两倍. 所以三阶幻方有性质:

每条对角线上,两端的两个数的和是中央那个数的两倍.

特别地,$a=15$, $i=5$ 时,

$$e=(15+5)\div 2=10.$$

同样,可得

第二行或第二列上,两端的两个数的和是中央那个数的两倍.

例 **3**　已知 $h=7$, $f=9$. 求 $a=?$

解　(1)+(4),得

$$2a+b+d+c+g=2s. \tag{11}$$

(2)+(5),得

$$b+d+2e+f+h=2s. \tag{12}$$

由(11)、(12)两式得

$$2a+b+d+c+g=b+d+2e+f+h. \tag{13}$$

因为 $c+g=2e$,所以在(13) 式两边去掉相同的 $b+d$,去掉 $c+g$ 与 $2e$,得

$$2a=f+h. \tag{14}$$

即三阶幻方有性质:

对角线端点的数等于不在对角线上并且与这个数不相邻的两个数的平均数.

特别地,$h=7$, $f=9$ 时,

$$a=(7+9)\div 2=8.$$

例 **4** 已知 $c=18$, $d=20$. 求 $h=$?

解 与例 3 同理可知,

$$2c=d+h,$$

所以当 $c=18$, $d=20$ 时,

$$h=2\times 18-20=16.$$

7. 字母运算的建立

代数引进了字母,字母代表数,当然可以进行运算.与数一样,字母(以及数)之间可以进行加、减、乘、除(只要除数不为 0),而且服从(加法、乘法的)交换律、结合律、分配律.

我们也可以换一种观点,从另一种角度考虑问题.我们不问字母是否代表数.设想我们来到一个字母世界(今后还会进入集合世界、向量世界、矩阵世界,等等),我们如何在这个世界中逐步建立四则运算,而且上述运算定律均保持成立?

首先考虑字母(数)的乘法.3、a、c、b(一个数,三个字母)相乘,我们将它们用乘号连结

起来，成为

$$3\times a\times c\times b. \tag{1}$$

这样的式子就作为乘积(乘法的结果).所以这种乘法非常省事，可以称为“不乘之乘”.

而且，代数中还可以将乘号“×”，写成简单一些的“·”，甚至不写，例如上面的式子(1)可以写成

$$3\cdot a\cdot c\cdot b, \tag{2}$$

或

$$3acb. \tag{3}$$

当然全是数的情况，如 3×2，不能写成 32. 习惯上将数写在最前面，称为系数.(3)式的系数就是 3. 习惯上还按照字母的顺序来写，所以(3)式最好写成

$$3abc, \tag{4}$$

这样就便于比较了.

同一个字母相乘，如 $a\times a\times a$，可以写成 a^3. 这里相同的乘数 a 称为底数，相同乘数 a 的个数 3 称为指数，乘积 a^3 称为 a 的三次幂. 一般地，设 n 为正整数，

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}=a^n,$$

称为 a 的 n 次幂.

如果含有数与字母的式子中，只有乘法，那么这个式子就称为单项式. 例如 $-15ab^3c^2$ 就是单项式，其中 -15 是系数. 在系数为 ±1 时，常常省去 1，只留下正负号. 如 $-a^2b$ 的系数就是 -1. 在提及单项式时，必须包括它的符号. 如单项式 $-a^2b$ 与单项式 $+a^2b$ 是两个不同的单项式. 但“+”号在不致混淆时也可省去.

单独一个字母，如 a，或者单独一个数，如 1 001，也都作为单项式.

8. 2 米+3 米

2 米+3 米=？米.

这个问题太简单了. 答案当然是 5 米.

$$2a^2bc^3 + 3a^2bc^3 = ?$$

同样地,答案是 $5a^2bc^3$. 这里的 a^2bc^3 与单位“米”地位相当. 在相加时,只需要将前面的“系数”2 与 3 相加.

$2a^2bc^3$ 与 $3a^2bc^3$ 称为同类项,其中的字母相同(都是 a、b、c),而且每个字母的相应的指数也都相等(a^2 与 a^2, b 与 b, c^3 与 c^3). 用一句口诀来说:

“同类项,同类项,指数底数都一样.”

同类项可以合并,也应当合并. 合并的方法就是将系数相加. 这里的系数可以是负数. 例如

$$2a^2bc^3 - 3a^2bc^3 = 2a^2bc^3 + (-3a^2bc^3) = -a^2bc^3.$$

在字母世界中,字母、数、单项式的加法也是很简单的“不加之加”,将它们用“+”号连结起来就可以了. 但如果其中有同类项,则应当加以合并.

例 **1** 求 $3a$, $5b$, $-4c$, $2a$, $-b$ 的和.

解 $$3a + 5b + (-4c) + 2a + (-b) = 5a + 4b - 4c. \quad (1)$$

其中 $5a$、$4b$、$-4c$ 无法合并,用加号连结作为和.

若干个单项式用加号连结起来就称为多项式. 例如(1)式中的 $5a + 4b - 4c$ 就是多项式. 它由 3 项(3 个单项式)即 $5a$、$4b$、$-4c$ 组成. 这里项也是包括正负号的.

多项式的加法实质上也就是合并同类项.

例 **2** 求 $3a - 5b$ 与 $2b - 3c$ 的和.

解 $(3a - 5b) + (2b - 3c) = 3a - 3b - 3c$.

多项式的减法实际上是加法,即将减式中每一项改变符号与被减式相加.

例 **3** 求 $(3a - 5b) - (2b - 3c)$.

解 原式 $= (3a - 5b) + (-2b + 3c) = 3a - 7b + 3c$.

9. 数　　轴

数轴,是数、形结合的典范.

在一条直线上,任意取定一点 O,称为原点(也就是出发点). 我们用 O 点表示 0. 从 O 出