

高等教育基础课教材

线性代数

linear algebra

◎ 主 编 / 陈军胜 潘春玲



黄河出版传媒集团
阳 光 出 版 社

高等教育基础课教材

线性代数

linear algebra

◎ 主编 / 陈军胜 潘春玲



黄河出版传媒集团
阳光出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 陈军胜, 潘春玲主编. —银川: 阳光出版社, 2015.8

高等教育基础课教材

ISBN 978-7-5525-2094-1

I. ①线… II. ①陈… ②潘… III. ①线性代数—高等学校—教材 IV. ①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 197311 号

线性代数

陈军胜 潘春玲 主编

责任编辑 刘 涛 金小燕

封面设计 张 宁

责任印制 岳建宁

黄河出版传媒集团
阳光出版社 出版发行

地 址 宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)

网 址 <http://www.yrpubm.com>

网上书店 <http://www.hh-book.com>

电子信箱 yangguang@yrpubm.com

邮购电话 0951-5047283

经 销 全国新华书店

印刷装订 宁夏凤鸣彩印广告有限公司

印刷委托书号 (宁)0017800

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 12.75

字 数 250 千字

版 次 2015 年 9 月第 1 版

印 次 2015 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5525-2094-1/G·1887

定 价 28.00 元

版权所有 翻印必究

前言

线性代数是一门应用十分广泛的数学学科,是工科类、经济类、管理类本科专业的一门重要的基础理论课程.线性代数为研究和处理涉及许多变元的线性问题提供了有力的数学工具,这一工具在工程技术、经济科学和管理科学中都有广泛的应用.通过本课程的学习,学生能掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法,能应用线性代数的基本思想和基本方法分析和解决实际问题.

本教材根据高等教育线性代数课程教学的基本要求,结合编者多年从事线性代数课程教学的体会编写而成.在编写过程中主要考虑了下述问题:

1. 目前绝大多数综合性大学、工科院校都设立了工程、经济及管理学科的相关专业,但各校、各专业方向对数学基础的要求有一定的差异.这套教材照顾到了多数院校教学的实际情况,便于老师和学生使用.

2. 在编写过程中力争做到科学性(七)通俗性相结合,内容由浅入深,逐步提高;在引入一些概念时尽量采用学生易于接受的方式叙述;在介绍一些重要方法时精选了一些典型例题,通过典型例题来阐述线性代数的思想和处理问题的方法,帮助学生掌握所学内容.

3. 为了加深学生对概念的理解,培养学生的逻辑推理能力,大多定理给出了证明,这有助于学生对定理的掌握和运用;对于证明过程复杂的个别定理和性质,仅做了直观的说明或类比.

4. 教材每一节后都配有相应的习题,书后附有参考答案,希望通过练习帮助学生熟悉和巩固所学知识.

本教材第 1 章至第 5 章和习题参考答案由陈军胜编写,第 6 章由潘春玲编写.

教材中难免有不妥之处,希望读者提出宝贵的意见和建议.

编 者

2015 年 6 月

第1章	行列式	001
1.1	二阶行列式和三阶行列式	001
习题1.1		005
1.2	n 阶行列式	006
习题1.2		017
1.3	行列式的计算	020
习题1.3		025
1.4	克莱姆法则	025
习题1.4		030
第2章	矩阵	032
2.1	矩阵的概念	032
习题2.1		036
2.2	矩阵的运算	036
习题2.2		046
2.3	逆矩阵	048
习题2.3		052
2.4	矩阵的分块	053
习题2.4		061
2.5	矩阵的初等变换	062
习题2.5		071
2.6	矩阵的秩	073
习题2.6		076
第3章	向量	079
3.1	向量及其线性运算	079

习题3.1	081
3.2 向量的线性关系	081
习题3.2	090
3.3 向量组的秩	091
习题3.3	097
3.4 向量的内积(七)正交性	098
习题3.4	105
第4章 线性方程组	106
4.1 线性方程组的基本概念	106
习题4.1	112
4.2 齐次线性方程组	113
习题4.2	120
4.3 非齐次线性方程组	122
习题4.3	127
第5章 特征值(七)特征向量	129
5.1 特征值(七)特征向量	129
习题5.1	137
5.2 相似矩阵(七)矩阵可对角化	137
习题5.2	143
5.3 实对称矩阵的特征值和特征向量	144
习题5.3	150
第6章 二次型	151
6.1 二次型的基本概念	151
习题6.1	155
6.2 二次型的标准形(七)规范形	156
习题6.2	168
6.3 二次型和对称矩阵的有定性	169
习题6.3	175
习题参考答案	177
参考文献	198

第 1 章 行列式

线性代数学的核心内容是研究线性方程组解的存在条件、解的结构以及解的求法,所用的基本工具是矩阵,而行列式是研究矩阵很有效的工具之一.行列式作为一种数学工具,不但在本课程中极其重要,而且在其他数学学科,乃至在其他许多学科都是必不可少的.

1.1 二阶行列式和三阶行列式

为了引进行列式的概念,我们先来看一看二元线性方程组的解.对于二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad (1.1)$$

由消元法,得

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = b_2a_{11} \end{cases},$$

两式相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

同理,可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

于是,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,可求得方程组的唯一解为:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

可见,方程组的解完全可由方程组中的未知数系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 以及常数项 b_1, b_2 表示

出来.若规定 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,上述二元线性方程组

就有唯一解,记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}.$$

则可以把线性方程组(1.1)的解(1.2)写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (1.3)$$

由二元线性方程组的解与方程组中未知数系数的关系,可给出下列定义:

定义 1.1.1 由 4 个数 $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 组成的两行两列的数表 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式,

将 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为该数表所确定的数值,记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 数 $a_{ij} (i,$

$j = 1, 2)$ 称为二阶行列式的元素,简称为元. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表示该元素位于行列式的第 i 行;它的第二个下标 j 称为列标,表示该元素位于行列式的第 j 列. 该二阶行列式的数值刚好是数表中主对角线(左上角至右下角的对角线)上两个数的乘积与副对角线(右上角至左下角的对角线)上两个数的乘积之差.

例 1 计算下列二阶行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & -\sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}.$$

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 4 \times (-3) = 14;$

$$(2) \begin{vmatrix} a & -\sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix} = a \times 1 - \sqrt{a} \times (-\sqrt{a}) = 2a.$$

例 2 用行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases}.$$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13, D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 16, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7,$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{16}{13}, x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{7}{13}.$$

类似地,可定义三阶行列式:

定义 1.1.2 称形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

的式子为**三阶行列式**. 其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 称为三阶行列式的元素, 其中 i 表示其所在行, j 表示其所在列.

三阶行列式的展开式规定为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (1.5)$$

所以,三阶行列式也是一个数,它通过二阶行列式来计算.

可以看出,三阶行列式共有六项,每一项均取自不同行不同列的三个元素的乘积,其中前三项符号为正,后三项符号为负. 为便于记忆,作图 1-1,图中每条实线(共三条)所连接的三个数的乘积的符号为正,每条虚线(共三条)所连接的三个数的乘积前面的符号为负,此方法称为**对角线法则**(显然此方法也适用二阶行列式).

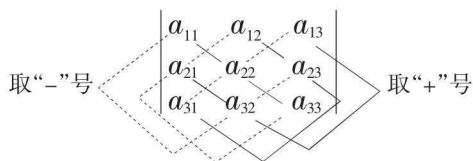


图 1-1

例 3 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 利用公式(1.5),得

$$D = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \times (45 - 48) - 2 \times (36 - 42) + 3 \times (32 - 35) \\
&= -3 + 12 - 9 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

可利用三阶行列式求解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.6)$$

若分别记三阶行列式

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

若方程组(1.6)的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组有唯一解, 可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}. \quad (1.7)$$

在方程组(1.6)的解的表达式(1.7)中, $x_i (i=1, 2, 3)$ 的分母都是方程组(1.6)的系数行列式 D , x_i 的分子为 $D_i (i=1, 2, 3)$, 是把系数行列式 D 的第 i 列换成方程组(1.6)中等式右边的常数项, 其余列不动所得的行列式.

例 4 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

解 利用对角线法则, 先计算出系数行列式

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times (-1) \times 1 - 2 \times 1 \times 2 - 1 \times (-1) \times (-1) - 1 \times 1 \times 1 \\
&= -7
\end{aligned}$$

同理, 可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -14, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21.$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 3.$$

习 题 1.1

1. 选择题.

(1) 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases}$, 则方程组的解 $(x_1, x_2) = (\quad)$.

A. (13, 5)

B. (-13, 5)

C. (13, -5)

D. (-13, -5)

(2) 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$, 则方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2 = 0 \end{cases}$ 的解是().

A. $x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

B. $x_1 = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

C. $x_1 = \begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}, x_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -b_1 \\ -a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

D. $x_1 = \begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}, x_2 = -\begin{vmatrix} -a_{11} & -b_1 \\ -a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

2. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix};$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix};$

$$(5) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

3. 用行列式解下列线性方程组.

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 7. \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

1.2 n 阶行列式

在上节的讨论中,我们知道对于未知数个数等于方程个数的二元、三元线性方程组,它们的系数行列式不等于零时,利用行列式这一工具可求出方程组的解,公式也易于记忆.我们自然会想到,对于未知数个数等于方程个数的 n 元($n > 3$)线性方程组,是否也会有类似的结果呢?我们需要引入 n 阶($n > 3$)行列式的概念.

1.2.1 n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$)组成的 n 行 n 列的数表,并在两侧各加一竖线,记为 D ,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

称为 n 阶行列式,它仍然表示一个数值.

当 $n = 1$ 时, $D = |a_{11}| = a_{11}$;当 $n = 2$ 时, $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;当 $n > 2$ 时,

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j},$$

其中 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij} 的代数余子式; M_{ij} 为由 D 划去第 i 行以及第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

称 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式.

例如,三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{21} 的余子式即为划去第二行和第一列元素后余下的元素按原来的位置摆放形

成的二阶行列式 $M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$,元素 a_{21} 的代数余子式为

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

又如,四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -5 & 6 \\ -2 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{23} 的余子式即为划去第二行和第三列元素后余下的元素按原来的位置摆放形

成的三阶行列式 $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,元素 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

由定义 1.2.1 可知,一个 n 阶行列式表示一个数,这个数是第一行所有元素与其对应的代数余子式乘积之和,称为 n 阶行列式按第一行的展开.

例 1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

解 将行列式按第一行展开,得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10. \end{aligned}$$

通常, n 阶行列式按第一行展开的展开式,也可扩展为如下定理:

定理 1.2.1 $n(n \geq 2)$ 阶行列式 D 的值等于它的任一行(列)各元素与其对应的元素的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

例 1 中的行列式按第二行展开为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -4 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10. \end{aligned}$$

按第三列展开为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10. \end{aligned}$$

由上述分析,定理 1.2.1 可将高阶行列式降阶,从而简化行列式的计算.

例 2 应用按行(列)展开定理计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第五列展开}} 2 \times (-1)^{2+5} \times \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第一列展开}} (-2) \times 5 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-10) \times \left(2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \right) = -10 \times (10 + 5) = -150$$

例 3 计算对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} \text{ 和 } \begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & & a_2 \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中未写出的数都是零.}$$

解 依行列式的定理 1.2.1, 按第一行依次展开,

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} a_2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} = \cdots = a_1 a_2 \cdots a_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & & a_2 \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_1 \begin{vmatrix} & & & a_2 \\ & & & a_3 \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= (-1)^{n+1+n+\cdots+3} a_1 a_2 \cdots a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

类似地,三角行列式有相同的结果

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

定理 1.2.2 $n(n \geq 2)$ 阶行列式任一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0 \quad (i \neq k);$$

或

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = 0 \quad (s \neq j).$$

证明 对于 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

← 第 i 行

← 第 k 行

将第 i 行的元素相应地换成第 k 行的元素,得

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

← 第 i 行

← 第 k 行