大学课程教学同步练丛书

DAXUE KECHENG JIAOXUE TONGBULIAN CONGSHU

高等数学（上册）

同步学习辅导

西北工业大学高等数学教研室　编

西北工业大学出版社

大学课程教学同步练丛书

DAXUE KECHENG JIAOXUE TONGBULIAN CONGSHU

高等数学（下册）

同步学习辅导

西北工业大学高等数学教研室 编

西北工业大学出版社

□ 策划编辑／冷国伟
□ 责任编辑／王俊轩
□ 封面设计／成　艺

ISBN 7-5612-1366-2
9 787561 213667 >

ISBN 7 - 5612 - 1366 - 2 / O・185
定价：25.00元(本册定价：13.00元)

高等数学同步学习辅导

（上册）

西北工业大学高等数学教研室　编

西北工业大学出版社

高等数学同步学习辅导

（下 册）

西北工业大学高等数学教研室　编

西 北 工 业 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习辅导/西北工业大学高等数学教研室编．—西安:西北工业大学出版社,2001.8

ISBN 7-5612-1366-2

Ⅰ．高… Ⅱ．西… Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 036120 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号　邮编:710072　电话:(029)8493844

网　　址:http://www.nwpup.com

印 刷 者:西安电子科技大学印刷厂

开　　本:850mm×1 168mm　1/32

印　　张:20.1875

字　　数:516 千字

版　　次:2001 年 8 月 第 1 版　　2001 年 11 月 第 2 次印刷

印　　数:6 001～13 000 册

定　　价:25.00 元(上、下册)　本册定价:13.00 元

前　言

学习高等数学课程时，不少学生感到教学进度快。虽然上课能听懂，但独自解题时会有不少的困惑和疑虑，遇到灵活性较大、综合性较强的题，更是无从下手。我们编写这本同步学习辅导书，供学生课外阅读，以起到教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。

本书共分12章(与高等数学(同济四版)教材相对应)，每章分为若干节(与教学次序相同)，最末节为综合问题。每节分为“知识网络导学”、“重点难点剖析”、“典型例题分析”、“基础知识训练”、“能力提高测试”、“参考答案与提示”等栏目。

【知识网络导学】 概括本节所对应的教材内容中的知识要点，阐述扼要、清晰。

【重点难点剖析】 对于教与学中的“重点”、“难点”以及“误点”进行整理提炼、着重剖析。

【典型例题分析】 讲究选题的布局，例题的典型性，注重解题思路的分析，对解题方法给出引导性的归纳总结。

【基础知识训练】 这部分是给学生配备的基础练习题，通过多种题型，检查学生掌握该节基础知识的程度。

【能力提高测试】 这部分也是练习题，选题具有一定的难度和综合性，以检查学生对知识的灵活运用能力，帮助学生对所学知识全面、深入地理解与掌握。

【参考答案与提示】 给出了每题的答案，并对略难的题给出了提示或简答。

全书试图给学生贯穿这样的思想：在学习中需要熟悉概念、性质，更需要明了其要素；需要多做几类练习题，更需要明了分析问

题的着眼点及解题的思路。引导学生学会将计算方法条理化，总结出规律性的东西，提高利用基本计算方法的思想去解决问题的能力。

本书可作为高等学校工科高等数学的同步教学参考书，也可作为考研应试者考前复习、强化训练的指导书。

参加本书编写工作的有西北工业大学数学与信息科学系陆全、肖亚兰、李云珠，符丽珍，王雪芳、杨月茜、刘华平、孟亚琴、刘哲、林伟、郑红婵等同志，全书由陆全、肖亚兰统纂定稿。

由于水平所限，加之时间仓促，书中错误及疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2001 年 4 月

内容简介

本书是高等数学的同步学习辅导书，书中每节均设6个栏目，包括以下内容：对高等数学的主要知识点进行梳理、归总；剖析重点、难点和误点；选择有代表性的典型例题进行分析和求解，从而揭示高等数学的解题方法与技巧；配置了两级测试练习题，以提高学生基本运算、推理及应试的能力；附有测试题答案及提示，供学生自测。

本书可作为本科生学习高等数学的同步学习辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

目　录

（上 册）

（下 册）

第一章　函数与极限

§1　函　　数

【知识网络导学】

$$\text{函数概念}\begin{cases}\text{函数,分段函数}\\ \text{反函数,复合函数}\\ \text{基本初等函数,初等函数}\end{cases}$$

$$\text{函数性质}\begin{cases}\text{有界函数}\ f(x)\quad x\in X\subset D,\text{存在}\ M>0,\text{使}\ |f(x)|\leqslant M\\ \text{单调增加(减少)函数}\ f(x)\quad x\in I\subset D,\\ \qquad \text{当}\ x_1<x_2\ \text{时},f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2))\\ \text{奇(偶)函数}\ f(x)\quad x\in[-a,a],\\ \qquad f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x))\\ \text{周期函数}\ f(x)\quad x\in(-\infty,+\infty),\\ \qquad \text{存在}\ T>0,\text{使}\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$$

【重点难点剖析】

(1) 确定函数的两个要素是定义域 D 和对应关系 f. 只有当两个函数的定义域与对应规律完全相同时,它们才是同一个函数.

例如,$f_1(x)=\ln(1-x^2)$ 与 $g_1(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$ 是同一函数. 因为它们的定义域均为 $(-1,1)$,当 $x\in(-1,1)$ 时,$g_1(x)=\ln[(1+x)(1-x)]=\ln(1-x^2)=f_1(x)$. 又 $f_2(x)=\ln(x^2-1)$ 与 $g_2(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$ 不是同一函数. 因为

$f_2(x)$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$g_2(x)$ 的定义域为 $D_2=(1,+\infty)$，$D_1\neq D_2$.

(2) 不是任意两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\cos x-2$ 就不能构成复合函数 $y=\sqrt{\cos x-2}$. 因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=[0,+\infty)$ 与 $u=\cos x-2$ 的值域 $R_\varphi=[-3,-1]$ 的交集是空集. 一般地，当函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_φ 的交集 $D_f\cap R_\varphi$ 不空时，此两函数才能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

将复合函数分解为若干个简单函数，这对函数的研究会带来方便. 复合函数的分解过程是由外层到内层，逐层进行的. 例如，$y=\sin(e^{\arctan\sqrt{x}})$ 分解为

$$y=\sin u,\quad u=e^v,\quad v=\arctan w,\quad w=\sqrt{x}.$$

【典型例题分析】

例 1.1 (1) 求 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

(2) 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域.

解 (1) 由 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi\\ (k=0,\pm1,\cdots).\end{cases}$

解得函数的定义域(图 1-1) 为 $D=[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

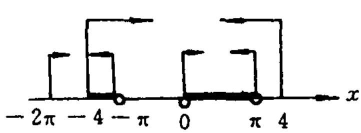

图 1-1

(2) 函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是 $f(x+a)$ 及

$f(x-a)$ 的定义域之交集，即

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}\qquad \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a\,.\end{cases}$$

1° 当 $a<1-a$，即 $a<\frac{1}{2}$ 时(图 1-2)，所求函数的定义域为$[a,1-a]$；

图 1-2

2° 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数的定义域为一个点，$x=\frac{1}{2}$.

3° 当 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数的定义域为空集 Φ，此时函数在$(-\infty,+\infty)$ 内处处无定义.

小结 求具体函数的定义域时，应注意对常见函数的某些限制.

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 根式中负数不能开偶次方；

(3) 零和负数不能取对数；

(4) 三角函数、反三角函数的定义域. 如 $\arcsin x$ 中 $|x|\leqslant 1$，$\tan x$ 中 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$.

对于应用问题中确定的函数，其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2 下列函数中哪个是周期函数?周期为多少?

(1) $y=\sin(3x+2)+|\cos x|$； (2) $y=x\cos x$.

解 (1) 因为 $\sin x$ 是以 2π 为周期，所以 $\sin(3x+2)$ 以$\frac{2\pi}{3}$为周期. 又 $|\cos x|$ 以 π 为周期，于是和函数 $y=\sin(3x+2)+|\cos x|$ 是以 $T=2\pi\left(\frac{2\pi}{3}\text{ 和 }\pi\text{ 的最小公倍数}\right)$为周期的周期函数.

(2) 假设 $y = x\cos x$ 是周期函数，周期为 $T(>0)$，则有

$$(x+T)\cos(x+T) = x\cos x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $x = 0$，得 $T\cos T = 0$. 令 $x = \frac{\pi}{2}$，得

$$\left(T+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(T+\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \left(T+\frac{\pi}{2}\right)\sin T = 0.$$

由于 $T > 0, T+\frac{\pi}{2} > 0$，可得 T 应满足的方程组

$$\begin{cases} \sin T = 0 , \\ \cos T = 0, \end{cases}$$

显然此方程组无解，故函数 $y = x\cos x$ 不是周期函数.

小结

(1) 若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期；

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 T_1, T_2 为周期，则 $f(x) \pm g(x)$ 以 T_1 和 T_2 的最小公倍数为周期.

例 1.3 证明函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上即有上界又有下界.

证 设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在 $M > 0$，对任意 $x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$，即 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$，所以 $f(x)$ 有上界 M 和下界 $-M$.

反之，设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1 和下界 K_2，即对任意的 $x \in X$，有 $K_2 \leqslant f(x) \leqslant K_1$，令 $K = \max\{|K_1|, |K_2|\}$，则 $|f(x)| \leqslant K, x \in X$，即 $f(x)$ 在 X 上有界.

思考题 能否用“存在 $M > 0$，使 $|f(x)| < M, x \in X$”来定义函数 $f(x)$ 在 X 上有界，为什么？

例 1.4 设 $f(x)$ 为 $(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

分析 可按单调函数的定义证明，注意利用函数的奇偶性.

证 对任意的 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$，$x_1 < x_2$，则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$，且 $-x_1 > -x_2$. 由题设单调性知 $f(-x_1) > f(-x_2)$. 又由题设，$f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内为奇函数，有

$$f(-x_1) = -f(x_1), \quad f(-x_2) = -f(x_2),$$

于是

$$-f(x_1) > -f(x_2), \quad f(x_1) < f(x_2).$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

注 本章中对函数的单调性及有界性的判定侧重于明确概念. 在第三章中将介绍利用导数性质的判定法.

例 1.5 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ $g(x) = \ln x$，求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)] = f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 \leqslant \ln x \leqslant 1 \\ \ln^2 x, & 1 < \ln x \leqslant 2 \end{cases} =$

$$\begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, \mathrm{e}] \cap (0, +\infty) \\ \ln^2 x, & x \in [\mathrm{e}, \mathrm{e}^2] \cap (0, +\infty) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, \mathrm{e}], \\ \ln^2 x, & x \in [\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]. \end{cases}$$

小结 对于分段函数的复合函数，应注意自变量和中间变量的取值范围，这是保证运算正确的一个重要环节. 初学者容易犯这样的错误(以上题为例)，

$$f[g(x)] = f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \ln^2 x, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

其错误所在正是未正确地给出中间变量 $u = \ln x$ 的取值范围.

例 1.6 求函数 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数.

分析 求反函数的步骤为: