H-JUZHEN JI JUZHEN DE YINGYONG

H-矩阵及矩阵的应用

韩贵春　张俊丽　张永富　编著

内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社

H-矩阵及矩阵的应用

韩贵春　张俊丽　张永富　编著

内 蒙 古 出 版 集 团
内蒙古科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

H-矩阵及矩阵的应用 / 韩贵春，张俊丽，张永富编著.
—赤峰：内蒙古科学技术出版社，2014. 3
ISBN 978-7-5380-2393-0

Ⅰ. ①H… Ⅱ. ①韩… ②张… ③张… Ⅲ. ①矩阵
Ⅳ. ①0151.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第043541号

出版发行：内蒙古出版集团　内蒙古科学技术出版社
地　　址：赤峰市红山区哈达街南一段4号
邮　　编：024000
电　　话：(0476)8225264　8224848
邮购电话：(0476)8224547
网　　址：www.nm-kj.com
责任编辑：那　明
封面设计：李树奎
印　　刷：赤峰金源彩色印刷有限责任公司
字　　数：280千
开　　本：700 × 1010　1/16
印　　张：10.75
版　　次：2014年3月第1版
印　　次：2014年3月第1次印刷
定　　价：24.00元

目　录

引 言

在科学研究与工程技术领域，矩阵是很重要的有着广泛应用的一种工具. 本书首先介绍了一些特殊矩阵的理论，其次介绍了矩阵在处理数学物理反问题以及线性子空间辨识中的应用.

1937年，美国数学家A.M.Ostrowski发现了一类具有特殊构造的矩阵，其非对角元素（$\forall i \neq j,\ i, j \in N$） $a_{ij} \leqslant 0$，且$A^{-1} \geqslant 0$，则称A为M-矩阵. 特别地，当 $A^{-1} > 0$ 时，称作M-矩阵. 随后，A.M.Ostrowski（一，文献[1]）在M-矩阵的基础上又提出了H-矩阵的概念，即A的比较阵是M-矩阵. 另一方面，在研究对角占优矩阵时，人们定义了广义对角占优矩阵：若存在正对角阵 $X = diag(x_1, \cdots x_2, \cdots x_n)$，对任意$i \in N$都有$\left|a_{ii}\right| x_i \geqslant \sum_{j \neq i}^{n} \left|a_{ij}\right| x_j$，则称$A$为广义严格对角占优矩阵. 后来人们证明了H-矩阵也可等价地定义为广义严格对角占优矩阵（二，文献[2]）. 这个重要的矩阵类的提出起源于矩阵计算中迭代程序的收敛性研究. 随着H-矩阵理论的发展，它在计算数学、数学物理、弹性力学、控制论、经济学、生物学、动力系统、电力系统理论及神经网络中都有着广泛的应用. 众所周知，许多实际问题的解决都可以归结到H-矩阵的判定上. 例如：在研究线性时滞系统和神经网络系统的稳定性时，需要用到H-矩阵以及正稳定矩阵；许多工程常常归结为一些大型线性方程组的求解问题，而当方程组系数矩阵为H-矩阵时，许多经典的迭代法（如Gauss-Seidel，Jacobi 和SOR迭代法等）均是收敛的（一，文献[3]~[13]）. 因此，研究H-矩阵的简捷实用数值判定方法，具有十分重要的理论价值和实际应用价值. 近几十年，H-矩阵的研究一直是矩阵代数与计

算数学领域的热门课题，无论是H-矩阵的等价表征、判定条件，还是更深入的性质研究、H-矩阵的谱分析，都出现了一些既有重要的理论价值又在实际计算中有广泛用途的重要成果.

利用对角占优性来判定H-矩阵，是近年来国内外学者讨论较多的问题，其研究方法也较多. 从不同角度相继提出了α-对角占优矩阵、α-双对角占优矩阵、按环路α-对角占优矩阵、G-函数等，经研究表明以上的矩阵类都是H-矩阵的子类（二，文献[7]~[13]）.

自20世纪60年代以来，数学物理反问题（简称反问题）已成为应用数学领域中发展和成长最快的领域之一，它在地球物理、生命科学、材料科学、遥感技术、模式识别、信号（图像）处理、工业控制乃至经济决策等众多的科学技术领域中都有着广泛而重要的应用；迄今，它已发展成为具有交叉性的计算数学、应用数学和系统科学中的一个热门学科方向（三，文献[1]）.

近20年来，有关偏微分方程反问题已成为学术界研究的热点之一。微分方程反问题来源于各种实际背景，属于多科学的应用理论范畴，在理论研究和实际应用方面都有重要意义。在实际中，偏微分方程中的算子、右端项和边界条件、初始条件从过去的已知变成未知，而原方程的解仍然未知，我们要通过方程、某些定解条件和某些附加条件来确定这些未知量(三、文献[3])，就构成了偏微分方程的反问题。这些问题在Hadamard意义下是不适定的,主要表现在解不连续，依赖于数据，也就是当方程的右端项有微小变化时，所求得的近似解与真实解相差非常大，即不稳定性。由于反问题的非适定性与非线性，使得它的理论与求解都比正问题困难的多。在物理学、力学、工程技术和经济预测问题等众多的应用领域中，有相当多的重要物理量根本无法直接测量或测量耗费代价太大，必须借助一些间接手段（如通过求得所对应的微分方程在若干点处的解或者已知的初值条件）来推算，这在数学上又常常归结为参数识别反问题(三、文献[5]).

参数识别反问题的提出为微分方程反问题的研究注入了新的活力, 大大拓宽了数学物理反问题的研究领域. 但由于反问题本身所具有的不适定性和具体应用问题的复杂性, 寻源反问题的研究与实际应用的要求尚有一段距离.

在20世纪70年代初随着控制理论与电子信息技术的不断发展, 人们开始对系统辨识进行研究, 并且取得了一系列包括论文、专著与专利等方面的研究成果（四, 文献[14]）. 系统辨识是一种数学模型, 它是通过对输入与输出的时间函数关系来确定且刻画系统行为的方法, 在现代各种控制领域中起着重要的作用, 是一种较新的研究分支, 其数学建模的过程主要用于系统设计与控制、系统诊断、监测、性能优化等方面, 在实际应用中受到广泛关注. 传统的系统辨识方法包括有预测误差法和辅助变量法, 这两种方法均建立在优化迭代的基础之上, 对优化算法所提供的初始条件依赖性强, 即在迭代计算过程中辨识结果对初始条件的选取较为敏感, 同时对多变量输入输出辨识系统的模型参数化较难实现. 到20世纪90年代提出的子空间辨识方法可以克服以上算法的缺点（四, 文献[2]~[5], [15]~[16], [18]~[23]）.

“子空间辨识方法（Subspace Identification Method）是一类可直接估计线性状态空间模型的建模方法, 特别是从提出的近20年里获得了广泛的关注. 该方法与传统的线性建模方法相比，其优势不仅在于算法本身的简单可靠, 而且在建立的模型结构中不需要太多的先验知识, 在工业控制过程中具有一定的鲁棒性, 同时, 子空间辨识方法在处理由许多相互作用的变量组成的多输入多输出（MIMO）系统也备受人们的关注”.

第一章 对角占优矩阵与H-矩阵简介

在本章中, 回忆了关于对角占优矩阵与H-矩阵关系的一些经典结论.

1.1 符号简介

说明 $N \triangleq \{1,2,\cdots,n\}$；$M \triangleq \left\{(i,j)\middle| i \neq j; i,j \in N\right\}$；$C^{n\times n}(\mathrm{R}^{n\times n})$表示$n$阶复（实）方阵；$R_i(A) := \sum_{j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|$, $C_i(A) := \sum_{j\neq i}^{n}\left|a_{ji}\right|$. $A^*(A^T)$表示矩阵A的共轭（转置）.

因为H-矩阵主对角元非零, 所以总假定所涉及矩阵主对角元$a_{ii} \neq 0$且$R_i(A) > 0$（$\forall i \in N$）.

1.2 对角占优矩阵与H-矩阵的判定

1.2.1 对角占优矩阵与H-矩阵的关系

在文献[14]~[15]中, Bellman, Varga对对角占优矩阵做了一些研究.

定义1.2.1 设$A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, 若$\left|a_{ii}\right| \geqslant R_i(A)$（$\forall i \in N$）.
则称A为对角占优矩阵, 记为$A \in D_0$; 若上述不等式严格成立, 则称A为严格对角占优矩阵, 记为$A \in D$; 若存在一正对角阵X, 使得$AX \in D$, 则称A为广义严格对角占优矩阵, 记为$A \in \tilde{D}$.

O.Tassky, Shivakumar, Varga等人研究了不可约对角占优矩阵与非零元素链对角占优矩阵（见文献[16]~[18]）.

定义1.2.2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，不可约, 若 $A\in D_0$，且至少有一个不等式严格成立, 则称A为不可约对角占优矩阵.

定义1.2.3 设 $\ddot{u}=(\ \ _{ij})\in\ \ ^{n\times n}$, 若$A\in D_0$, 并对于满足$|a_{ii}|=R_i$的定点$i$都有非零元素链 a_{ii_1}， $a_{i_1i_2}$，…， a_{i_rj}，使得 $j\in J\,(A)=\{j\in N\|a_{jj}|>R_j\}\neq\varnothing$. 则$A$称为非零元素链对角占优矩阵, 并且得到相应的对角占优矩阵与H-矩阵之间的关系.

定理1.2.1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则$A$为H-矩阵的充要条件是$A\in\tilde{D}$.

定理1.2.2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若$A\in D$, 则$A$为H-矩阵.

定理1.2.3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A$为不可约对角占优矩阵, 则$A$为H-矩阵.

定理1.2.4 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A$为非零元素链对角占优矩阵, 则$A$为H-矩阵.

1.2.2 双对角占优矩阵与H-矩阵的关系

一些学者将对角占优矩阵推广到双对角占优矩阵, 并得到相应的双对角占优矩阵与H-矩阵之间的关系（见文献[19]~[20]）.

定义1.2.4 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$|a_{ii}a_{jj}|\geqslant R_i(A)R_j(A)$ （$\forall(i,j)\in M$）. 则称A为双对角占优矩阵, 记为$A\in DD_0$; 若上述不等式严格成立, 则称A为严格双对角占优矩阵, 记为$A\in DD$; 若存在一正对角阵 X，使得 $AX\in DD$，则称A为广义严格双对角占优矩阵, 记为 $A\in D\tilde{D}$.

定义1.2.5 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 不可约, 若$A\in DD_0$, 且至少有一个不等式严格成立, 则称$A$为不可约双对角占优矩阵.

定义1.2.6 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A\in DD_0$, 并若对于每一满足$|a_{ii}a_{jj}|=R_iR_j$的$(i,j)\in M$都有$A$的一个非零元素链$a_{i_0i_1}$， $a_{i_1i_2}$，…， $a_{i_rj_0}$或$a_{j_0j_1}$， $a_{j_1j_2}$，…， $a_{j_li_0}$，使得 $i_0=i$， $j_0\in J(A)$ 或 $i_0=j$， $j_0\in J(A)$，其中

$$J(A)=\{i\|a_{ii}a_{jj}|>R_iR_j,i\neq j,i,j\in N\}\neq\varnothing.$$

则称 A 为非零元素链双对角占优矩阵.

定理1.2.5 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 则$A$为H-矩阵的充要条件是$A\in D\tilde{D}$.

定理1.2.6 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若 $A\in DD$, 则A为H-矩阵.

由文献[18]得出, 当A为不可约双对角占优矩阵, 矩阵A不一定全为H-矩阵. 文献对不可约双对角占优矩阵进行改进. 设令$\Gamma(A)$表示A的有向图, 若 $a_{i_1i_2}, a_{i_2i_3}, \cdots, a_{i_ti_1}\neq 0$（ $t\geqslant 2$ ）, 且$i_1, i_2, \cdots, i_t$互不相同, 称$\Gamma(A)$的顶点$i_1, i_2, \cdots, i_t$构成一个简单回路, 记作γ. $E(A)$表示$\Gamma(A)$的边集, $S(A)$表示$\Gamma(A)$的简单回路集合, $i\in\gamma\in S(A)$表示i为回路γ的一个顶点, 得到下述结论.

定理1.2.7 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, ü ∈ $_0$且A不可约. 若有$e_{i_*j_*}\in E(A)(i_*\neq j_*)$, 使得$\left|a_{i_*i_*}, a_{j_*j_*}\right| > R_{i_*}, R_{j_*}$成立, 则$A$为H-矩阵.

定理1.2.8 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A$为非零元素链双对角占优矩阵, 则$A$为H-矩阵.

1.2.3 按环路对角占优矩阵与H-矩阵的关系

Brualdi 等讨论了按环路对角占优的形式（见文献[21]~[25]）.

定义1.2.7 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$\prod\limits_{i\in\gamma}|a_{ii}|\geqslant\prod\limits_{i\in\gamma}R_i(A)$（ $\forall\gamma\in S(A)$ ）. 则称A为按环路对角占优矩阵, 记为$A\in\pi D_0$; 若上述不等式严格成立, 则称A为严格按环路对角占优矩阵, 记为$A\in\pi D$; 若存在一正对角阵X, 使得$AX\in\pi D$, 则称A为广义严格按环路对角占优矩阵, 记为$A\in\pi\tilde{D}$.

定义1.2.8 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 不可约, 若$A\in\pi D_0$, 且至少存在一个环路使一个不等式严格成立, 则称A为不可约按环路对角占优矩阵.

定义1.2.9 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A\in\pi D_0$, 且对任意的$i\in\gamma\in S(A)\setminus J(A)$, A中都有非零元素链$a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, a_{i_2i_3}, \cdots, a_{i_tj}\neq 0$, 使

$$j\in\gamma\in J(A)=\{i\in\gamma\in S(A)\left|\prod_{i\in\gamma}|a_{ii}|>\prod_{i\in\gamma}R_i\right.\}\neq\varnothing.$$

则称 A 为非零元素链按环路对角占优矩阵.

定理1.2.9 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 则 A 为H-矩阵的充要条件是 $A\in \pi\tilde{D}$.

定理1.2.10 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若 $A\in \pi D$, 则 A 为H-矩阵.

定理1.2.11 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若 A 为不可约按环路对角占优矩阵, 则 A 为H-矩阵.

定理1.2.12 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若 A 为非零元素链按环路对角占优矩阵, 则 A 为H-矩阵.

参考文献

[1] Ostrowski. A. M. Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale[J]. Comment. Math. Heh, 10 (1937): 69-96.

[2] Berman A, Plemmons R.J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. Philadelphia: SLAM Press, 1994.

[3] R. Bru, C. Corral, I. Gimenez, J. Mas. Classes of general H-matrices[J]. Linear Algebra and Applications, 429 (2008): 2358-2366.

[4] O. Axelsson. Iterative Solution Methods[M]. New York: Cambridge University Press, 1994.

[5] Stephen Barnett. Matrices: Methods and Applications[M]. New York: Oxford University Press, 1990.

[6] A. Frommer, D.B. Szyld. H-splittings and two-stage iterative methods[J]. Numer. Math, 63 (1992): 345-356.

[7] R.A. Horn, C.R. Johnson. Matrix Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[8] R.A. Horn, C.R. Johnson. Topics In Matrix Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[9] S. W. Kim, J. H. Yun. Block ILU factorization preconditioners for a block-tridiagonal H-matrix[J]. Linear Algebra Appl, 317 (2000): 103-125.

[10] A. Neumaier, R.S. Varga. Exact convergence and divergence domains for the symmetric successive overrelaxation iterative SSOR method applied to H-matrices[J]. Linear Algebra Appl, 58 (1984): 261-272.

[11] B. Polman. Incomplete blockwise factorizations for block H-matrices[J]. Linear Algebra Appl, 90 (1987): 119-132.

[12] H. Schneider. Theorem On M-splittings of a singular M- matrix which depend on graph structure[J]. Linear Algebra Appl, 58 (1984): 407-424.

[13] C. L. Wang, Z. Y. You. H-splittings and synchronous parallel iterative method[J]. Comput. Math, 15 (1997): 97-104.

[14] R. Bellman. Introduction to Mattrix analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1960, MR 23 #A153.

[15] Varga. R.S. Matrix iterative analysis[M]. NewJersy Prentice Hall Inc: Englevood Cliffs, 1962.

[16] O.Taussky. A recurring theorem on determinants with dominant[J]. Proc. Amer. Math. Monthly, 56 (1949): 672-676. MR 11, 307.

[17] P.N. Shivakumar and K.H. Chew. A sufficient condition for nonvanishing of determinants[J]. Proc. Amer. Math. Soc, 43 (1974): 63-66.

[18] Varga. R.S. Recurring Theorems on Diagonal dominance[J]. Linear Algebra and Appl, 13 (1978): 257-268.

[19] Bishan Li, M.J. Tsatsomeros. Doubly diagonally dominant matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 01 (1997): 221-235.

[20] Xian Zhang and Dunhe Gu. A note on A. Brauer's theorem[J]. Linear Algebra Appl, 196 (1994): 163-174.

[21] R.A. Brualdi. Matrices: eigenvalues and directed graphs[J]. Linear Multilinear Algebra, 11 (1982): 143-165.

[22] Varga. R.S. Gersgorin and His Circles[J]. Springer in Computational Mathematics, 2004, Vol. 36.

[23] R.A. Brualdi. Matrices: eigenvalues and directed graphs[J]. Linear Multilinear Algebra, 11 (1982): 143-165.

[24] 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 北华大学学报：自然科学版, 2(1) (2001): 1-4.

[25] L. Yu, Kolotilina. On Brualdi's Theorem[J]. Journal of Mathematical Sciences, 121(4) (2004): 2465-2473.

第二章 α-对角占优矩阵类与H-矩阵的讨论

2.1 α-对角占优矩阵与H-矩阵的判定

根据α-对角占优矩阵、α-双对角占优矩阵、α-按环路对角占优矩阵、G-函数等,给出H-矩阵的一些充要条件、充分条件以及必要条件,从而拓展了H-矩阵的判定准则,同时给出了判定H-矩阵的一些算法和程序,以及H-矩阵的一些应用,并用数值例子说明结果的有效性.

2.1.1 α-对角占优矩阵与H-矩阵的讨论

Ostrowski,孙玉祥将对角占优矩阵与H-矩阵的讨论推广到α_1-对角占优矩阵与H-矩阵(见文献[1]和第一章文献[1]).

定义2.1.1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若存在$\alpha\in[0,1]$,使

$$|a_{ii}|\geqslant R_i^{\alpha}(A)C_i^{1-\alpha}(A)\ (i\in N).$$

则称A为α_1-对角占优矩阵,记为$A\in D_1(\alpha_0)$;若上述不等式严格成立,则称A为α_1-严格对角占优矩阵,记为$A\in D_1(\alpha)$;若存在一正对角阵X,使得$AX\in D_1(\alpha)$,则称A为广义α_1-严格对角占优矩阵,记为$A\in \tilde{D}_1(\alpha)$.

定义 2.1.2 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,不可约,若$A\in D_1(\alpha_0)$,且至少存在一个不等式严格成立,则称$A$为不可约$\alpha_1$-对角占优矩阵.

定义 2.1.3 设$A=[a_{ij}]_{n\times n}\in C^{n,n}$,若$A\in D(\alpha_0)$,且对于满足$|a_{ii}|=R_i^{\alpha}(A)C_i^{1-\alpha}(A)$的定点$i$都有非零元素链$a_{ii_1}$,$a_{i_1i_2}$,$\cdots$,$a_{i_rj}$,使得

$$j\in J(A)=\{j\in N\|a_{jj}|>R_j^{\alpha}C_j^{1-\alpha}\}\neq\varnothing.$$

则称A为非零元素链α_1-对角占优矩阵.

在文献[1]和第一章文献[1]中, 对于α_1-对角占优矩阵与H-矩阵的关系有下述结论.

定理2.1.1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 则$A$为H-矩阵的充要条件是$A\in\tilde{D}_1(\alpha)$.

定理2.1.2 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A\in D_1(\alpha)$, 则$A$为H-矩阵.

定理2.1.3 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A$为不可约$\alpha_1$-对角占优矩阵, 则$A$为H-矩阵.

定理2.1.4 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A$为非零元素链$\alpha_1$-对角占优矩阵, 则$A$为H-矩阵.

随后, 孙玉祥、谢清明又研究了α_2-对角占优矩阵与H-矩阵（见文献[2]~[3]）.

定义2.1.4 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若存在$\alpha\in[0,1]$, 使

$$|a_{ii}|\geqslant\alpha R_i(A)+(1-\alpha)C_i(A)\quad(\forall i\in N).$$

则称A为α_2-对角占优矩阵, 记为$A\in D_2(\alpha_0)$; 若上述不等式严格成立, 则称A为α_2-严格对角占优矩阵, 记为$A\in D_2(\alpha)$; 若存在一正对角阵X, 使得$AX\in D_2(\alpha)$, 则称A为广义α_2-严格对角占优矩阵, 记为$A\in\tilde{D}_2(\alpha)$.

定义 2.1.5 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 不可约, 若$A\in D_2(\alpha_0)$, 且至少存在一个不等式严格成立, 则称$A$为不可约$\alpha_2$-对角占优矩阵.

定义 2.1.6 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若$A\in D_2(\alpha_0)$, 且对于满足$|a_{ii}|=R_i^{\alpha}(A)C_i^{1-\alpha}(A)$的定点$i$都有非零元素链$a_{ii_1}$, $a_{i_1i_2}$, $\cdots$, a_{i_rj}, 使得

$$j\in J(A)=\{j\in N\|a_{jj}|\geqslant\alpha R_j(A)+(1-\alpha)C_j(A)\}\neq\varnothing.$$

则A为非零元素链 α_2-对角占优矩阵.

在文献[2]~[3]中, 对于α_2-对角占优矩阵与H-矩阵的关系有下述结论.