数学物理方程

何猛省、阮荆州 编

一九八三年十月

前　　言

一、我们在化学系讲授"物学物理方程"课程中，自编了《稳定态薛定谔方程及其解法》和《拉普拉斯变换在化学及工问题中的应用》等补充讲义。本书是在数学系领导的建议下，在这些讲义的基础上编写而成的。为了能适应较为广泛的教学需要，我们对其中部分内容作了较多的修改和补充，因此本书除适合化学，生物等系教学需要外，也可作工科院校的试用教材。

二、全书共分九章。第二章介绍数学物理方程的基本概念和几种典型方程，第三、第五至第九章都是讨论方程的解法，第一章讲述付立叶级数，第四章介绍特殊函数和施图姆——刘继尔固有值理论，这两章的内容都是为分离变量法提供具体做法和理论依据的。

三、在各种解法中，我们把重点放在分离变量法上，除详细讨论对典型方程进行分离变量的一般步骤外，同时也把这个方法应用到薛定谔方程和圆柱核反应堆的临界体积等问题上，这样，使分离变量法能有循环的机会，得以反复应用。

本书在编写过程中一直得到数学系的热忱关怀和指导。由于我们水平有限，教学经验也不足，书中的缺点和错误一定不少，希望同志们批评指正！

编　者

一九八三年十月八日

目　　录

第一章　付立叶级数

在函数项级数中，除幂级数外，另一类既简单又重要的级数是付立叶级数。

付立叶级数在自然科学与工程技术中具有广泛的应用。在数学物理方程中，用来求解定解问题的一种重要方法—分离变量法，就要用到付立叶级数。

本章要讨论的主要内容是：如何将一个已知函数展开为三角级数。

§ 1　三角级数　三角函数系的正交性

具有下列形式的级数

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)$$
$$+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots+$$
$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots$$

称为**三角级数**，其中 a_0, a_n, $b_n(n=1, 2, \cdots)$ 均为 常数。这个级数也可简写成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\qquad(1.1)$$

三角级数(1.1)是由下列函数组成的：

$$1, \operatorname{css} x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots \tag{1.2}$$

函数组(1.2)称为**三角函数系**。对于任何整数 $m\neq 0, n\neq 0$ 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0 \tag{1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi \tag{1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi \tag{1.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0 \ (m\neq n) \tag{1.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0 \ (m\neq n) \tag{1.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \sin nx\,dx = 0 \tag{1.8}$$

公式(1.3)，(1.5)很易证明。至于公式(1.4)，亦可利用倍角公式证实其正确性，利用积化和差公式可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\Big[\cos(m-n)x$$

$$+ \operatorname{css}(m+n)x\Big]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

因此公式(1.6)成立。同理公式(1.7)，(1.8)成立。

以上六个公式说明，三角函数系(1.2)中任何两个不

同函数之积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分为零，而其中任一函数与其自身之积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分异于零。这样的性质称为**三角函数系的正交性。**

三角函数系的正交性在付立叶级数的讨论中起着重要的作用，为付立叶级数理论的研究搞供了极大的便利。

§2 尤拉——付立叶公式

作为三角函数系（1.2）的正交性的一个应用，现在考虑下列问题：如果函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上可以展开为三角级数(1.1)：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.9}$$

证问怎样确定这个级数的系数a_0，a_n，b_n？

为了确定这些系数，我们再设等式（1.9）左边的函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上可积，而右边的级数可以逐项积分。现将等式（1.）两边自$-\pi$至π积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)$$

根据公式(1.3)，(1.5)，上式右边除第一项外，其余积分均为零，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=\pi a_0$$

由此求得

$$a_o=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

次将等式(1.9)两边乘以 $\cos mx$，自 $-\pi$ 至 π 积分，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx dx=\frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx+$$

$$+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx dx\Big)$$

利用公式(1.3)，(1.4)，(1.6)，(1.8)，上式可简化为

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx dx=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx dx=\pi a_m$$

因此求得

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx dx$$

最后再将等式(1.9)两边乘以 $\sin mx$，然后积分，同样可得

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx dx.$$

显然，若在 a_m 的计算公式中令 $m=0$，便得 a_o 的计算公式，即 a_o 的公式可统一于 a_m 的公式之中。这也就是为什么在级数(1.1)中我们将常数项写成 $\frac{a_o}{2}$ 的缘故。现将所得结果列出如下：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx. \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{1.10}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{1.11}$$

公式(1.10)，(1.11)称为**尤拉—付立叶**（Euler—Fourier）**公式**。

按尤拉——付立叶公式算出的系数 a_n，b_n 称为函数 $f(x)$的**付立叶系数**，由付立叶系数 a_n，b_n 确定的三角级数(1.1)称为函$f(x)$的**付立叶级数**。

由此可见，如果可积函数 $f(x)$ 可以展开为三角级数(1.1)，该级数可逐项积分，则此级数一定 $f(x)$ 的付立叶级数。

值得注意的是，若只假定 $f(x)$可积，并未对 $f(x)$作更多的假设（可以展开、逐项可积），这时仍可按尤拉——付立叶公式计算 a_n，b_n—$f(x)$的付立叶系数，因而可形式地作出三角级数(1.1)—$f(x)$ 的付立叶级数。但这时存在两个问题：其一，级数(1.1)是否收敛？其二，如果级数(1.1)收敛，它是否收敛于函数 $f(x)$？关于这些问题，在 $f(x)$ 可积的条件下，我们不能作出肯定的回答。因此，一般我们将 $f(x)$的付立叶级数记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$

即不用等号“=”，而采用符号“～”。

§3 付立叶级数的收敛性

函数 $f(x)$ 在什么条件下才能展开为付立叶级数呢？这是个很复杂的问题，要弄清楚这一问题，必须进行深入细致的分析。这里只叙述付立叶级数收敛性的一个充分条件，而不证明。

设函数 $f(x)$ 在点 x_o 处间断，但左极限 $f(x_o-0)$ 与右极限 $f(x_o+0)$ 存在，则称 x_o 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

我们要介绍的充分条件是

狄里赫莱（Dirichlet）收敛定理 设 $f(x)$ 满足**狄里赫莱条件**：

1. $f(x)$ 在区间$[-\pi, \pi]$上连续，或至多只有有限个第一类间断点；

2. $f(x)$在区间$[-\pi, \pi]$上至多只有有限个极值点。则 $f(x)$的付立叶级数在区间$[-\pi, \pi]$上每一点 x 收敛，且其和 $S(x)$满足以下等式：

1. 在 $f(x)$ 的连续点 x 处，$S(x)=f(x)$；

2. 在 $f(x)$的间断点 x 处，

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

3. 在区间的端点 $\pm\pi$ 处，

$$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

这个定理说明，函数的连续性，不足以保证其付立叶级数的收敛性，还需加上其它条件。但是定理的应用范围还是

很广的，许多常见的函数都满足本定理的条件，特别是凡可展开为幂级数的函数，都可展开为付立叶级数。

还应指出，满足收敛定理条件的函数，可以是以 2π 为周期的函数，也可以是只确定在区间$[-\pi, \pi]$上的函数。在数学物理方程中，就常会遇到只在$[-\pi, \pi]$，$[-\pi, \pi)$，…等区间上给出的函数，而要求将其展开为付立叶级数。因为级数(1.1)，各项是以 2π 为周期的函数，故若级数(1.1)收敛，，则其和 $S(x)$ 必为周期函数，我们可以将和 $S(x)$ 看作是函数 $f(x)$ 作周期性延拓的结果。

下面举例说明函数的付立叶级数展开法。

例 1　试将函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

展开为付立叶级数。

解　函数 $f(x)$ 显然满足收敛定理的条件．按尤拉一付立叶公式，并利用部分积分法，有

$$a_o=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^1}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin x}{n}\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin x}{n}dx$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left[\cos\pi\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

同样求得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx dx=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

将系数 a_n，b_n 的值代入（1.1），于是，

当 $-\pi<x<\pi$ 时，级数的和为 $f(x)$，即有

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right]$$

或者表成

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)+$$

$$+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right) \tag{1.12}$$

当 $x=\pm\pi$ 时，级数的和为

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+0}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

函数 $f(x)$ 作周期延拓后的图形为图1—1所示。

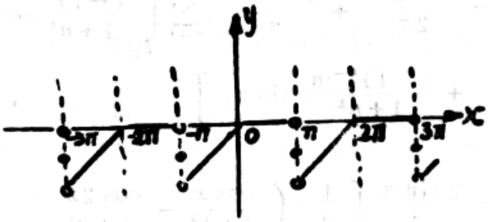

图 1—1

利用（1.12）可以求出某些数项级数的和，例如在（1.12）中令 $x=0$，得

$$0=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

由此得到

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

例 2　将 $f(x)=e^x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上展成付立叶级数.

解　函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件。根据尤拉——付立叶公式，有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e x d x=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e x \cos n x d x=\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin n x d x=\frac{(-1)^{n-1} n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

当 $-\pi<x<\pi$ 时，得

$$e^x=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}\sin nx\right]$$

或者

$$e^x=\frac{2\sin\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{\cos x}{1+1^2}-\frac{\cos 2x}{1+2^2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\cos 3x}{1+3^2}-\cdots\right)+\left(\frac{\sin x}{1+1^2}-\frac{2\sin 2x}{1+2^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3\sin 3x}{1+3^2}-\cdots\right)\right] \tag{1.13}$$

函数 $f(x)=e^x$ 作周期延拓后的图形见图1—2.

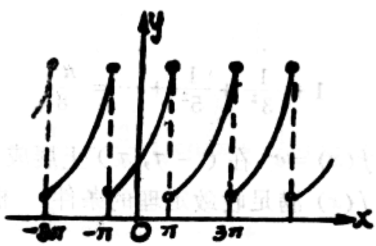

图　1—2

在式（1.13）中令 $x=0$，不难得到

$$\frac{1}{1+2^2}-\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{1+4^2}-\frac{1}{1+5^2}$$

$$+\cdots=\frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\pi}$$

§ 4　奇函数与偶函数的付立叶级数

设有函数 $f(x)$，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。奇函数的图形对称于坐标原点，偶函数的图形对称于 y 轴。关于奇、偶函数，我们有下面的一个性质：

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上可积，则当 $f(x)$ 是奇函数时，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

当 $f(x)$ 是偶函数时，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

这个性质的证明，在一般的数学分析教程中可以找到。这个性质在求奇、偶函数的付立叶级数时是很有用的。现将有关结果叙述如下：

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积。

1. 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的付立叶系数为

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \tag{1.14}$$

而其付立叶级数为正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

2. 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的付立叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = 0 \tag{1.15}$$

而其付立叶级数为余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

事实上，如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)\cos nx$ 亦为奇函数，而 $f(x)\sin nx$ 是偶函数，因此由奇、偶函数积分的性质，有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

亦即式（1.14）成立。同理式（1.15）成立。

例 1　将函数 $f(x)=x$ 在区间$[-\pi,\pi]$上展成付立叶级数。

解　函数 $f(x)=x$ 是奇函数，由式(1.14)，

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin x}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n} \operatorname{css} n\pi = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$$

因此，当 $-\pi<x<\pi$ 时，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

即有