

《宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐目录》
推荐教辅图书
经人民教育出版社授权

配人教版®



宁夏专版

精讲精练

JINGJIANGJINGLIAN

高中数学
学生用书

选修 2-3
(人教A)

《精讲精练》编写组 编



黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐图书

宁夏专版

精讲精练

JINGJIANGJINGLIAN

高中数学
学生用书

选修 2-3
(人教A)

《精讲精练》编写组 编



黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练: 人教 A 版: 宁夏专版. 高中数学. 2-3:
选修 / 《精讲精练》编写组编. -- 银川: 宁夏人民教育出版社, 2014.8

ISBN 978-7-5544-0875-9

I. ①精… II. ①精… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP 数据核字(2014)第 197179 号

精讲精练 宁夏专版 高中数学 选修 2-3(人教A)

《精讲精练》编写组 编

责任编辑 虎雅琼

封面设计 晨 皓

责任印制 殷 戈

黄河出版传媒集团 出版发行
宁夏人民教育出版社

地 址 宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)

网 址 www.yrpubm.com

网上书店 www.hh-book.com

电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com

邮购电话 0951-5014284

经 销 全国新华书店

印刷装订 宁夏雅昌彩色印务有限公司

印刷委托书号 (宁)0016212

开 本 890 mm × 1240 mm 1/16

印 张 10

字 数 360 千字

版 次 2014 年 8 月第 1 版

印 次 2014 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5544-0875-9/G·2683

定 价 14.11 元

版权所有 翻印必究

创新学习模式——稳步提升计划

自主预习·夯基础

自主学习

分类加法计数原理与分步乘法计数原理

1. 分类加法计数原理

完成一件事，有 n 类办法，每一类办法都能达到目的，设第 i 类办法有 m_i 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法。

2. 分步乘法计数原理

完成一件事，需要分成 n 个步骤，每个步骤都不能缺少，设第 i 个步骤有 m_i 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 种不同的方法。

3. 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的关系与区别

(1) 联系：都是计数问题，都是完成一件事的方法数。

(2) 区别：分类加法计数原理适用于“分类”，分步乘法计数原理适用于“分步”。

自主预习

梳理基础
思考辨析

梳理教材主干
夯实基础知识
辨析易错易混
思考点拨提醒

课堂探究·提要点

典例探究

应用分类加法计数原理

1. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

2. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

应用分步乘法计数原理

1. 某人从 3 个不同的电子邮箱中，每次取 1 封电子邮件，问有多少种不同的取法？

2. 某人从 3 个不同的电子邮箱中，每次取 1 封电子邮件，问有多少种不同的取法？

课堂探究

核心突破
典例探究

精选典型题目
总结解题规律
强化应用技能
突破重点难点

案例规范·明思路

案例探究

规范答题

1. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

2. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

案例规范

规范答题
案例探究

设置经典案例
明晰解题步骤
警示答题误区
累积应答技巧

学业测试·达目标

课时提升卷

分步乘法计数原理与分步乘法计数原理

1. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

2. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

巩固提升

全面提升
课时巩固

习练基础试题
巩固考点知识
甄选经典试题
提升解题素能

阶段复习课

网络构建·筑体系

1. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

2. 某中学有男教师 12 名，女教师 8 名，从中选出 4 名组成一个教学小组，问有多少种不同的选法？

阶段整合

专题整合
阶段强化

构建知识体系
展现要素关系
纵横知识联系
归纳核心考点

目录

精讲精练 宁夏专版
高中数学选修2-3 (人教A)

课堂学习案

第一章 计数原理

- 1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 · 1
 - 第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理及其简单应用 · 1
 - 第2课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用 · 4
 - 1.2 排列与组合 · 7
 - 1.2.1 排列 · 7
 - 第1课时 排列的概念及简单排列问题 · 7
 - 第2课时 排列与排列数公式 · 10
 - 第3课时 排列的综合应用 · 12
 - 1.2.2 组合 · 15
 - 第1课时 组合与组合数公式 · 15
 - 第2课时 组合的综合应用 · 19
 - 1.3 二项式定理 · 22
 - 1.3.1 二项式定理 · 22
 - 1.3.2 “杨辉三角”与二项式系数的性质 · 25
- 阶段复习课 · 29

第二章 随机变量及其分布

- 2.1 离散型随机变量及其分布列 · 32
 - 2.1.1 离散型随机变量 · 32
 - 2.1.2 离散型随机变量的分布列 · 35
 - 2.2 二项分布及其应用 · 39
 - 2.2.1 条件概率 · 39
 - 2.2.2 事件的相互独立性 · 42
 - 2.2.3 独立重复试验与二项分布 · 46
 - 2.3 离散型随机变量的均值与方差 · 49
 - 2.3.1 离散型随机变量的均值 · 49
 - 2.3.2 离散型随机变量的方差 · 53
 - 2.4 正态分布 · 56
- 阶段复习课 · 60

第三章 统计案例

- 3.1 回归分析的基本思想及其初步应用 · 64
 - 3.2 独立性检验的基本思想及其初步应用 · 68
- 阶段复习课 · 73

高效学习作业本 (活页试卷) P77~P116

答案解析 (单独成册) P117~P156

聚焦助学技巧

突破疑难瓶颈

规范案例

- 综合应用两个计数原理解决涂色(种植)问题 · 6
- 排列的综合应用 · 14
- 二项式系数性质的应用问题 · 28
- 随机变量分布列的综合应用 · 38
- 独立重复试验在实际问题中的应用 · 48
- 方差的实际应用 · 55
- 正态分布的应用 · 59
- 线性回归方程的应用 · 67

易错案例

- 混淆分类与分步而致误 · 3
- 忽视排列问题中的限制条件而致误 · 9
- 忽视排列数中的隐含条件致误 · 12
- 忽视组合数中参数的限制条件致误 · 18
- 组合应用问题中考虑不周致误 · 21
- 将二项式系数与项的系数混淆致误 · 24
- 对随机变量的试验结果表述不全致误 · 34
- 对事件不理解导致失误 · 41
- 对事件类型判断不明导致错误 · 45
- 因不理解二项分布致误 · 52
- 因不理解独立性检验的含义致误 · 72



课堂学习案

第一章 计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理及其简单应用

踏着坚实的步伐,稳健启程

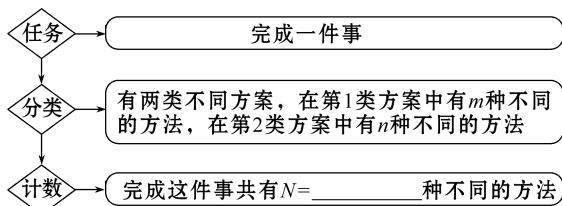
自主初探·夯基础

预习新知

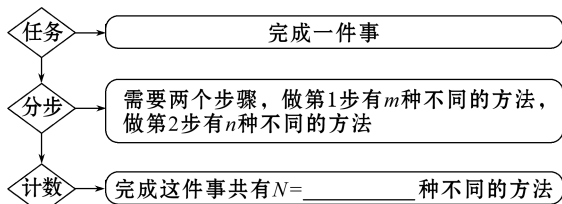
自主学习

分类加法计数原理与分步乘法计数原理

1. 分类加法计数原理:



2. 分步乘法计数原理:



3. 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的联系与区别:

(1)联系:都是涉及做一件事的_____的种数问题.

(2)区别:分类加法计数原理针对的是_____问题,其中各种方法_____,用其中任何一种方法都可以做完这件事;分步乘法计数原理针对的是_____问题,各个步骤中的方法_____,只有各个步骤都完成才算做完这件事.

思考:区分“完成一件事”是分类还是分步的关键是什么?

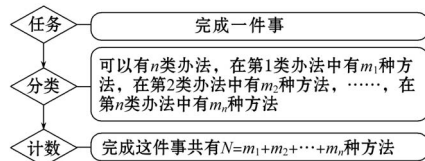
知识点拨

1. 剖析分类加法计数原理

(1)核心:概念的核心是“分类”.完成一件事要分为若干类,各类的方法相互独立,各类中的各种方法也相互独立,并且用任何一类中的任何一种方法都可以单独完成这件事.因此在应用原理时一定要根据问题的特点确定一个分类的标准,然后在确定的分类标准下进行分类,其次还要注意分类不能重复、不能遗漏.

(2)目的:原理的目的是求解“完成一件事的不同方法数”.因此在应用原理解题时要有问题意识,明确并努力思考两个问题,即问题要求我们完成一件什么事,如何完成这件事.

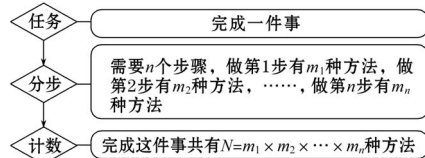
(3)推广:



2. 剖析分步乘法计数原理

(1)分步乘法计数原理与“分步”有关,要注意“步”与“步”之间所具有的相依性和连续性.也就是说,如果做一件事需要分成n个步骤来完成,各个步骤都是不可缺少的,每一个步骤中的任何一种方法都不能独立地完成这件事,只有各个步骤依次完成后才能完成这件事.求完成这件事的方法种数,就用分步乘法计数原理.

(2)推广:



类型一 应用分类加法计数原理计数

典型例题

1. 某同学有同样的画册2本,同样的集邮册3本,从中取出4本赠送给4位朋友,每位朋友1本,则不同的赠送方法共有 ()
A. 4种 B. 10种 C. 18种 D. 20种
2. 设 $x, y \in \mathbb{N}^*$, 且 $x+y \leq 6$, 则在直角坐标系中满足条件的点 $M(x, y)$ 共有 _____ 个.
3. 在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有多少个?

解题探究

1. 应用分类加法计数原理计数的关键是什么?
2. 题2中满足条件的 x, y 各可以取几个数?
3. 应用分类加法计数原理计数的步骤是什么?

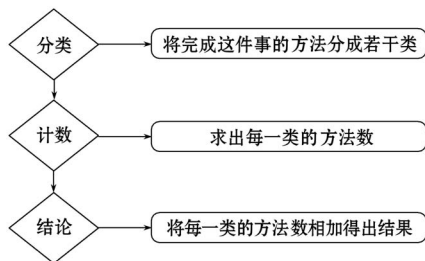
自主解答:

互动探究:

将题2中的 x, y 所满足的不等式改为不等式组 $\begin{cases} 2x-y \geq 0, \\ x+y \leq 6, \end{cases}$ 则满足条件的点 $M(x, y)$ 共有多少个?

拓展提升

1. 利用分类加法计数原理计数时的解题流程



2. 应用分类加法计数原理计数时分类的关键及原则

- (1) 一个关键:分类时,首先要根据问题的特点确定一个适当的分类标准,然后用这个分类标准进行分类.
- (2) 两条原则:一是完成这件事的任何一种方法必须分为相应的类;二是不同类的方案必须是不同的方法.

【变式训练】某一数学问题可用综合法和分析法两种方法证明.现有15名同学,其中5名同学只会用综合法证明,6名同学只会用分析法证明,4名同学会用这两种方法证明.若任选1名同学用综合法证明这个问题,有多少种不同的选法?若任选1

名同学用分析法证明这个问题,有多少种不同的选法?

类型二 应用分步乘法计数原理计数

典型例题

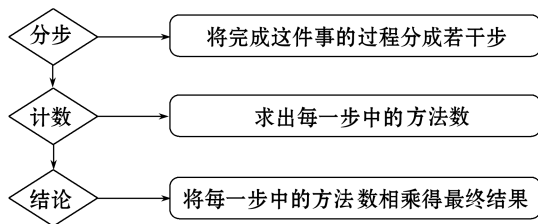
1. 某人有3个不同的电子邮箱,他要发5封电子邮件,发送的方法的种数为 ()
A. 8种 B. 15种 C. 243种 D. 125种
2. 火车上有10名乘客,沿途有5个车站,乘客下车的可能方式有多少种?

解题探究

1. 分步乘法计数原理可以解决哪种计数问题?
2. 应用分步乘法计数原理计数时如何分步?

自主解答:

拓展提升 利用分步乘法计数原理解题的流程



【变式训练】已知集合 $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $P(a, b) (a, b \in M)$ 表示平面上的点,问:

- (1) 点 P 可表示平面上多少个不同的点?
- (2) 点 P 可表示平面上多少个第二象限内的点?



类型三 两个计数原理的综合应用

典型例题

- 高艳有 4 件不同颜色的衬衣、3 件不同花样的裙子,另有 2 套不同样式的连衣裙.“五一”劳动节需选择一套服装参加歌舞演出,则高艳不同的穿衣服的方式有 ()
A. 24 种 B. 14 种 C. 10 种 D. 9 种
- 现有高一四个班的学生 34 人,其中一、二、三、四班分别有 7 人、8 人、9 人、10 人,他们自愿组成数学课外小组.
(1)选其中一人为负责人,有多少种不同的选法?
(2)每班选一名组长,有多少种不同的选法?
(3)推选两人做中心发言,这两人需来自不同的班级,有多少种不同的选法?

解题探究

- 题 1 中穿衣服的方式与题 2(3)中选两人做中心发言人的选法,有什么特点?
- 如何求解先分类后分步,或先分步后分类的计数问题?

自主解答:

拓展提升 综合应用两个计数原理计数的四个步骤

- 明确完成的这件事是什么.
- 思考如何完成这件事.
- 判断它属于分类还是分步,还是先分类后分步,还是先分步后分类.
- 选择计数原理进行计算.

【变式训练】(2014·安徽高考)从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对,其中所成的角为 60° 的共有 ()

- A. 24 对 B. 30 对 C. 48 对 D. 60 对

破译思维的密码,点拨迷津

案例展示·析误区

规避误区

易错误区 混淆分类与分步而致误

【典例】甲、乙两人参加某趣味知识竞赛,共有 10 个不同的题目,甲、乙两人依次各抽一题,则一共有_____种不同的抽法.

【解析】分两步^①:第 1 步^①,甲先从 10 个不同的题目中抽取一题,有 10 种不同的抽法;

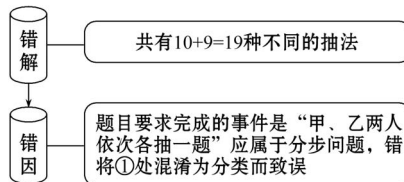
第 2 步^①,乙从剩余的 9 个不同的题目中抽取一题,有 9 种不同的抽法.由分步乘法计数原理可知共有 $10 \times 9 = 90$ 种不同的抽法.

答案:90

【类题试解】一个袋子里放有 6 个球,另一个袋子里放有 8 个球,每个球各不相同,从两袋子里各取一个球,不同取法的种数为 ()

- A. 182 B. 14
C. 48 D. 91

误区警示



防范措施

明确“分类”与“分步”

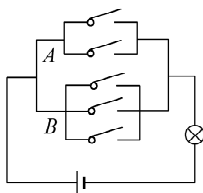
“分类”是其中任何一类中的任何一种方法均可独立完成所给事情,而“分步”必须是把各个步骤均完成才能完成所给事情.在解题过程中要能高效地得到正确结论必须将要计的数准确进行“分类”还是“分步”,如本例是“分步”,而非“分类”问题.

学业测试·速达标

放飞飞扬的梦想,沙场点兵

检测实效

- 从甲地到乙地一天之中有三次航班、两趟火车,某人利用这两种交通工具在当天从甲地赶往乙地的方法有 ()
A. 2种 B. 3种 C. 5种 D. 6种
- 三名学生分别从计算机、英语两学科中选修一门课程,不同的选法有 ()
A. 3种 B. 6种 C. 8种 D. 9种
- 有5名高二学生,3名高一学生,4名初三学生,2名初二学生,若从中随机抽取2名学生,要求高中生和初中生各一名,则不同的抽法种数是 ()
A. 14 B. 23 C. 48 D. 120
- 如图,在由电键组A与B所组成的并联电路中,要接通电源,使电灯发光的方法种数是_____.



5. 5名乒乓球队员中,有2名老队员和3名新队员,现从中选出3名队员参加团体比赛,则入选的3名队员中至少有一名老队员的选法有_____种.(用数字作答)
6. 要安排一份5天的值班表,每天有一个人值班,共有5个人,每个人可以值多天班或不值班,但相邻两天不准由同一个人值班,此值班表共有多少种不同排法?

课时提升卷(一)

一课一练日积月累,披坚执锐稳固提能

第2课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用

核心归纳·抓要点

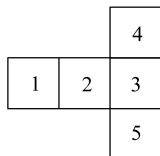
点燃智慧的明灯,探究悟道

点拨技法

类型一 选(抽)取与分配问题

典型例题

- 某校开设A类选修课3门,B类选修课4门,一位同学从中共选3门.若要求两类课程中各至少选一门,则不同的选法共有 ()
A. 30种 B. 35种 C. 42种 D. 48种
- 编号为A,B,C,D,E的五个小球放在如图所示五个盒子中.要求每个盒子只能放一个小球,且A不能放1,2号,B必须放在与A相邻的盒子中.则不同的放法有_____.



3. 一个袋子里装有10张不同的中国移动手机卡,另一个袋子里装有12张不同的中国联通手机卡.
(1)某人要从两个袋子中任取一张自己使用的手机卡,共有多少种不同的取法?

(2)某人手机是双卡双待机,想得到一张移动卡和一张联通卡供自己今后使用,问一共有多少种不同的取法?

解题探究

1. 选(抽)取问题中计数的关键是什么?
2. 分配问题中计数的关键是什么?
3. 区分是分类还是分步的关键点是什么?

自主解答:

互动探究:

题3的条件不变,若某人只要求两张卡(可为移动卡或联通卡),放到两个手机内使用,问共有多少种不同的取法?



拓展提升 选(抽)取与分配问题的常见类型及其解法

(1)当涉及对象数目不大时,一般选用枚举法、树形图法、框图法或者图表法.

(2)当涉及对象数目很大时,一般有两种方法:①直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理.一般地,若抽取是有顺序的就按分步进行;若按对象特征抽取的,则按分类进行.②间接法:去掉限制条件计算所有的抽取方法数,然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

【变式训练】设集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 选择 I 的两个非空子集 A 和 B , 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 ()

- A. 50 种 B. 49 种 C. 48 种 D. 47 种

类型二 组数问题

典型例题

- 如果一个三位正整数形如“ $a_1 a_2 a_3$ ”满足 $a_1 < a_2$ 且 $a_3 < a_2$, 则称这样的三位数为凸数(如 120, 363, 374 等), 那么所有凸数的个数为 ()
A. 240 B. 204 C. 729 D. 920
- 用 0, 1, 2, 3, 4 五个数字,
 - (1)可以排出多少个三位数字的电话号码?
 - (2)可以排成多少个三位数?
 - (3)可以排成多少个能被 2 整除的无重复数字的三位数?

解题探究

1. 题 1 中的凸数有什么特点? 如何进行“分类”或“分步”计数?
2. 题 2(1)(2)(3)中的三位数有什么特点? 如何进行计数?

自主解答:

互动探究:

由题 2 中的五个数字可组成多少个无重复数字的四位奇数?

拓展提升 组数问题的常见类型及解决原则

1. 常见的组数问题

- (1)组成的数为“奇数”“偶数”“被某数整除的数”;
- (2)在某一范围内的数的问题;
- (3)各位数字和为某一定值问题;
- (4)各位数字之间满足某种关系问题等.

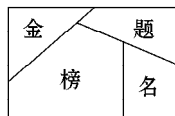
2. 解决原则

- (1)明确特殊位置或特殊数字, 是我们采用“分类”还是“分步”的关键. 一般按特殊位置(末位或首位)由谁占领分类, 分类中再按特殊位置(或特殊元素)优先的策略分步完成; 如果正面分类较多, 可采用间接法求解.
- (2)要注意数字“0”不能排在两位数字或两位数字以上的数的最高位.

类型三 涂色与种植问题

典型例题

1. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种, 分别种在不同土质的三块土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法有 ()
A. 24 种 B. 18 种 C. 12 种 D. 6 种
2. 如图所示, 要用 4 种不同的颜色给金、榜、题、名四个区域上色, 要求相邻两块涂不同的颜色, 共有多少种不同的涂法?



解题探究

1. 题 1 中黄瓜的种植有几种情况? 黄瓜必须种植的对立事件是什么?
2. 题 2 中的涂色如何进行?

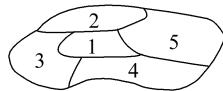
自主解答:

拓展提升 解决涂色(种植)问题的一般思路

- (1)按涂色(种植)的顺序分步进行, 用分步乘法计数原理计数.
- (2)按颜色(种植品种)恰当选取情况分类, 用分类加法计数原理计数.
- (3)几何体的涂色问题转化为平面的涂色问题处理.
- (4)如果正面情况较多, 可用间接法计算.

【变式训练】1. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色, 并使同一条棱上的两端异色, 若只有 5 种颜色可用, 则不同的染色方法共有 _____ 种.

2. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻区域不得使用同一种颜色, 共有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有多少种(以数字作答)?



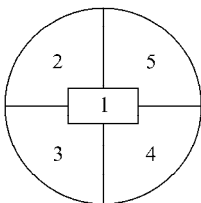
案例规范·明思路

递进成功的秘籍,导航向

规范解题

规范解答 综合应用两个计数原理解决涂色(种植)问题

【典例】(12分)如图,花坛内有5个花池,有5种不同颜色的花卉可供栽种,每个花池内只能栽种相同颜色的花卉,相邻两池的花卉颜色不同,求最多有多少种栽种方案.



【规范解答】由题意知,最少用三种颜色的花卉,按照花卉的颜色可分为三种方案^①.即用三种颜色,四种颜色,五种颜色.

..... 1分

①当用三种颜色时,花池2,4栽种同种颜色的花卉,有5种方案,花池3,5栽种同种颜色的花卉,有4种方案,花池1有3种栽种方案,由分步乘法计数原理知有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 种方案; 4分

②当用四种颜色时,

则花池2,4栽种同种颜色的花卉,或花池3,5栽种同种颜色的花卉.^②若花池2,4栽种同种颜色的花卉,有5种方案,花池3有4种栽种方案,花池5有3种栽种方案,花池1有2种栽种方案,由分步乘法计数原理得 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 种栽种方案;若花池3,5栽种同种颜色的花卉,同理得也有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 种栽种方案;再由分类加法计数原理共有 $120 + 120 = 240$ 种栽种方案; 7分

③当用五种颜色时,花池1有5种栽种方案,花池2有4种栽种方案,花池3有3种栽种方案,花池4有2种栽种方案,花池5有1种栽种方案,由分步乘法计数原理得 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 种栽种方案. 10分

根据分类加法计数原理得共有 $60 + 240 + 120 = 420$ 种栽种方案.

..... 11分

答:最多有420种栽种方案.^③ 12分

条件分析

本例要完成的事件是花池内栽种花卉;由于有5种不同颜色的花卉可供选择,所以可选择3种、4种、5种不同颜色的花卉栽种,可见有3类方法可独立完成这件事,而每一类又不能“一次性”完成,所以要分步进行.

失分警示

- ① 若未能准确把握题目的信息,分类的标准搞错而得不到①处的分类,则会导致本例不得分
- ② 若虽然分三类,但在第二类用四种颜色时,又忽视②处的分类,从而造成漏解,则本例最多得4分
- ③ 若忽视③处的答,则本例不完整最多得11分

防范措施

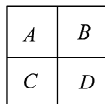
1. 加强“分类”“分步”的意识

在求解比较复杂的计数问题时,为避免重复与遗漏,切记“分类”与“分步”思想的综合应用.如本例将要计的数需按用颜色多少分三类,每类中再分步,且第二类中又需分两类来计数.

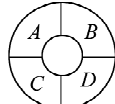
2. 掌握解决涂色(种植)问题的关注点及技巧

特别关注图形的特征,有多少块,用多少种颜色,如果图形不是很规则,往往从某一块出发进行分步涂色;如果图形具有一定的对称性,那么先对涂色方案进行分类,每一类再分步.如本例花池2与4,3与5对称,可涂相同颜色.

【类题试解】某农场有甲、乙两块地,每块地分别为如图所示的4块试验田,现有4种不同的作物可供选择种植,每块试验田种植一种作物,相邻的试验田(有公共边)不能种植同一种作物,分别求出甲、乙各有多少种不同的种植方法.



甲



乙

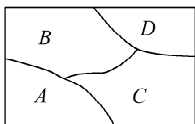


放飞飞扬的梦想,沙场点兵

学业测试·速达标

检测实效

- 一个书包内装有 5 本不同的小说,另一个书包内有 6 本不同学科的教材,从两个书包中任取一本书的取法共有 ()
A. 5 种 B. 6 种 C. 11 种 D. 30 种
- 5 名同学报名参加两个课外活动小组,每位同学限报其中一个小组,则不同的报名方法共有 ()
A. 10 种 B. 20 种 C. 25 种 D. 32 种
- 3 张不同的电影票全部分给 10 个人,每人至多一张,则不同分法的种数是 ()
A. 2 160 B. 120 C. 240 D. 720
- 如图,要给地图 A, B, C, D 四个区域分别涂上红、黄、蓝 3 种颜色中的某一种,允许同一种颜色使用多次,但相邻区域必须涂不同的颜色,不同的涂色方案有 _____ 种.
- 在 $1, 2, 3, \dots, 200$ 中,能够被 5 整除的数共有 _____ 个.
- 已知集合 $M = \{1, -2, 3\}$, $N = \{-4, 5, 6, -7\}$, 从两个集合中各取一个元素分别作为平面直角坐标系中点的横、纵坐标,则第一、二象限内不同的点的个数是多少?



课时提升卷(二)

一课一练日积月累,披坚执锐稳固提能

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

第 1 课时 排列的概念及简单排列问题

踏着坚实的步伐,稳健启程

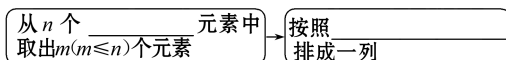
自主初探·夯基础

预习新知

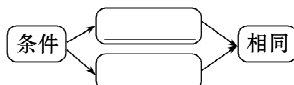
自主学习

排列与相同排列的概念

1. 排列:



2. 相同排列:



判断:(正确的打“√”,错误的打“×”)

- a, b, c 与 b, a, c 是同一个排列. ()
- 同一个排列中,同一个元素不能重复出现. ()
- 在一个排列中,若交换两个元素的位置,则该排列不发生! ()
- 从 4 个不同元素中任取三个元素,只要元素相同得到的就是相同的排列. ()

知识点拨

对排列定义的四点说明

(1) 定义的两个要素:

一是“从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素”,要求取出的元素不能重复;二是“按照一定的顺序排列”.

(2) 定义中“一定顺序”就是说与位置有关,选取的元素相同但顺序不同是不同的排列,在实际问题中,要由具体问题的性质和条件决定.

(3) 对于两个排列,只有各元素完全相同,并且元素的排列顺序也完全相同时,才是相同排列.

(4) 在定义中规定 $m \leq n$, 如果 $m < n$, 这样的排列只是取一部分元素进行排列,称选排列;如果 $m = n$, 这样的排列是取出所有元素进行排列,称全排列.

类型一 排列的概念

典型例题

1. 给出以下问题:

- (1) 从 1, 3, 4, 5, 6 五个数字中任选两个数字做加法, 可能有多少种不同的结果?
- (2) 从 1, 3, 4, 5, 6 五个数字中任选两个数字做除法, 可能有多少种不同的结果?
- (3) 会场有 50 个座位, 从中选出 3 个座位, 有多少种不同的选法?
- (4) 从集合 $M = \{1, 2, \dots, 9\}$ 中任取相异的两个元素作为 a, b , 可以得到多少个焦点在 x 轴上的双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

其中是排列问题的是_____ (只填序号).

2. 判断下列问题是否为排列问题:

- (1) 选 2 个小组分别去种树和种菜;
- (2) 选 5 个小组分别去种花;
- (3) 选 10 人组成一个学习小组;
- (4) 选 3 个人分别担任班长、学习委员、生活委员.

解题探究

1. 判断一个具体问题是不是排列问题的依据是什么?
2. 一个小组去种树或种菜是不是完成的同一件事?

自主解答:

互动探究:

若题 1(3) 中选出 3 个座位安排 3 位客人入座, 有多少种不同的选法? 该问题是否为排列问题?

拓展提升 排列中元素所满足的两个特征

- (1) 要保证元素的无重复性, 即从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素, 否则不是排列问题.
- (2) 要保证元素的有序性, 即安排这 m 个元素时是有顺序的, 有顺序的就是排列, 无顺序的就不是排列. 而检验它是否有顺序的依据就是变换不同元素的位置, 看结果是否发生变化, 有变化就是有顺序, 无变化就是无顺序.

【变式训练】判断下列问题是否为排列问题:

- (1) 某高中高一上学期某一个周一 6 节课的课程安排.
- (2) 在某校的春季运动会上, 高一(一)班 4×100 接力赛的运动员的安排.

(3) 从 1, 3, 5, 7 中任取两个不同的数, 作为二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 中 a, b 的值, 可以得到多少个不同的二次函数?

类型二 写(列)出简单排列问题的所有排列

典型例题

1. 由 1, 2, 3 这三个数字组成的三位数分别是_____.
2. 四个人 A, B, C, D 坐成一排照相有多少种坐法? 将它们列出来.

解题探究

1. 利用什么可将题 1 中的三位数不重不漏地列出来?
2. 用什么计数原理计算题 2 中的坐法种数? 用什么将所有坐法列出来?

自主解答:

互动探究:

在题 2 中, 若在条件中再增加一条“A 不坐排头”, 则结论如何?

拓展提升

1. “树形图”及其用法

- (1) 树形图简称树图, 就是把同一元素为首的若干排列按照一定的顺序一一列举出来, 从而画出像树枝一样的图形.
- (2) 树形图能很好地表达排列中各元素的先后顺序, 利用树形图能具体地列出各种情况, 可避免排列的重复或遗漏.
- (3) 树形图是处理排列问题的主要方法, 树形图可以直观地表示元素间的关系, 但它只适用于排列个数较少时的情形.

2. 利用“树形图”写(列)出简单排列问题所有排列的步骤

- (1) 确定分类的标准.
- (2) 按要求写出每类中的首个元素.
- (3) 依次进行罗列.

【变式训练】从 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数字中, 每次取出 3 个不同数字排成一个三位数, 共可以得到多少个不同的三位数? 试用树形图写出所得到的所有三位数.



案例展示·析误区

破译思维的密码,点拨迷津

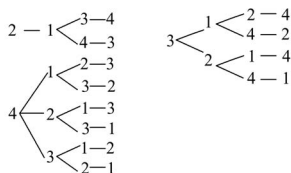
规避误区

易错误区 忽视排列问题中的限制条件而致误

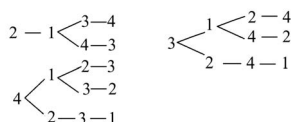
【典例】在1,2,3,4的排列 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 中,满足 $a_1 > a_2, a_3 > a_2, a_3 > a_4$ 的排列个数是_____.

【解析】首先注意 a_1 位置的数比 a_2 位置的数大,可以借助树形图进行筛选.

满足 $a_1 > a_2$ 的树形图是:



其次满足 $a_3 > a_2$ ①的树形图是:



再满足 $a_3 > a_4$ ①的排列:2143,3142,3241,4132,4231,共5个.

答案:5

【类题试解】由1,2,3,4这四个数字组成的首位数字是1,且恰有三个相同数字的四位数的个数是_____.

误区警示

错解

排列的个数是12或8

错因

忽视①处的 $a_3 > a_2$,及 $a_3 > a_4$ 的限制条件造成计数错误

防范措施

1. 两个注意

解答有限制条件的简单的排列问题时首先应注意限制条件是“位置”还是“元素”,其次解决这类问题时应注意特殊位置、特殊元素优先考虑的原则,做到不重不漏,如本例 $a_1 > a_2, a_3 > a_2, a_3 > a_4$ 等特殊位置的处理.

2. 转化与数形结合意识

有些非数学化的排列问题可以转化为数学问题后再求解,为了形象直观,可借助树形图.如本例中借助树形图使求解更加形象直观,不重不漏.

学业测试·速达标

放飞激扬的梦想,沙场点兵

检测实效

- 下列选项中,不属于排列问题的是 ()
 - 从六名学生中选三名学生参加数学、物理、化学竞赛,共有多少种选法
 - 有十二名学生参加植树活动,要求三人一组,共有多少种分组方案
 - 从3,5,7,9中任取两个数做指数运算,可以得到多少个幂
 - 从1,2,3,4中任取两个数作为点的坐标,可以得到多少个点
- 从1,2,3中任取两个数字可组成不同的两位数共有 ()
 - 7个
 - 6个
 - 5个
 - 4个
- A,B,C三名同学照相留念,成“一”字形排队,所有排列的方法种数为 ()
 - 3
 - 4
 - 6
 - 12
- 从5个人中选取两个人去完成某项工作,这_____排列问题.(填“是”或“不是”)
- 北京、上海、香港、台北四个民航站之间的直达航线,需要准备多少种不同的飞机票?将它们列出来.

课时提升卷(三)

一课一练日积月累,披坚执锐稳固提能

第2课时 排列与排列数公式

踏着坚实的步伐,稳健启程

自主初探·夯基础

预习新知

自主学习

排列数及排列数公式

排列数定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有 _____ 的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数
排列数表示法	_____
排列数公式	乘积式 $A_n^m =$ _____
	阶乘式 $A_n^m =$ _____
性质	$A_n^n =$ _____, $0! =$ _____
备注	$n, m \in \mathbf{N}^*, m \leq n$

判断: (正确的打“√”,错误的打“×”)

- (1) 对于式子 A_n^x 中的 x 可以取小于或等于 3 的任意整数. ()
- (2) 排列数 A_n^m 是有 n 个因式的乘积. ()
- (3) $0!$ 规定等于 1,但它不能按阶乘的含义来解释. ()
- (4) $(55-n)(56-n) \cdots (69-n) = A_{69-n}^{14} (n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n < 55)$ ()

知识点拨

1. 排列与排列数的区别

“排列”和“排列数”是两个不同的概念,一个排列是指“从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一行”,它不是一个数,而是具体的一个排列(也就是具体的一件事);排列数是指“从 n 个不同的元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数”,它是一个数.

比如从 3 个元素 a, b, c 中取出 2 个元素,按照一定的顺序排成一行,有如下几种: ab, ac, ba, bc, ca, cb , 每一种都是一个排列,共有 6 种,而数字 6 就是排列数,符号 A_3^2 表示排列数,在此例中 $A_3^2 = 6$.

2. 准确理解排列数公式

- (1) 公式中的 n, m 应该满足 $n, m \in \mathbf{N}^*, m \leq n$, 当 $m > n$ 时不成立.
- (2) 排列数有两个公式,第一个公式右边是若干数的连乘积,其特点是:第一个因数是 n (下标),后面的每一个因数都比它前面的因数少 1,最后一个因数为 $n-m+1$ (下标-上标+1),共有 m (上标) 个连续自然数相乘.
- (3) 排列数的第二个公式是阶乘的形式,所以又叫排列数的阶乘式.它是一个分式的形式,分子是下标 n 的阶乘,分母是下标减上标的阶乘,即 $(n-m)$ 的阶乘.
- (4) 特别地,规定 $0! = 1$. 这只是一种规定,不能按阶乘的含义作解释.

点燃智慧的明灯,探究悟道

核心归纳·抓要点

点拨技法

类型一 排列数的计算问题

典型例题

1. 乘积 $m(m+1)(m+2)(m+3) \cdots (m+20)$ 可表示为 ()
A. A_m^2 B. A_m^{21} C. A_{m+20}^{20} D. A_{m+20}^{21}
2. 计算: (1) A_{15}^3 . (2) $\frac{A_9^5 + A_9^4}{A_{10}^6 - A_{10}^5}$.

解题探究

1. 排列数 A_n^m 是几个因式的乘积? 最大、最小数分别是什么?
2. 题 2(2) 中 $A_9^5, A_{10}^6, A_{10}^5$ 能否均用 A_9^4 表示?

自主解答:

互动探究:

在题 1 中,若将乘积改为 $m(m-1)(m-2) \cdots (m-20)$ ($m > 20$),则结果如何?



拓展提升 排列数的计算方法

(1) 排列数的计算主要是利用排列数的乘积公式进行,应用时注意:连续正整数的积可以写成某个排列数,其中最大的是排列元素的总个数,而正整数(因式)的个数是选取元素的个数,这是排列数公式的逆用.

(2) 应用排列数公式的阶乘形式时,一般写出它们的式子后,再提取公因式,然后计算,这样往往会减少运算量.

(3) 当计算的式子中含有多个排列数时,一般先利用阶乘的性质将其他排列数用最小的排列数表示,再计算.

类型二 与排列数有关的方程、不等式及证明问题

典型例题

1. (1) 已知 $A_{2n}^3 = 10A_n^3$, 则 $n =$ _____.

(2) 不等式 $A_8^x < 6A_8^{x-2}$ 的解集为 _____.

2. 求证: $A_{n+1}^m - A_n^m = mA_n^{m-1}$.

解题探究

- 如何利用排列数公式将题 1(1)(2) 中的方程、不等式转化为 n 或 x 的代数方程、不等式求解?
- 如何选择排列数公式由题 2 中待证式左端过渡到右端?

自主解答:

拓展提升

1. 排列数公式阶乘式的应用

公式 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 适用于与排列数有关的恒等式(或不等式)的证明或解有关排列数 A_n^m (当 m 与 n 较接近时) 的方程与不等式.

【提醒】在解有关排列数的方程式或不等式时,应注意排列数中未知数满足的隐含条件“ $n, m \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \leq n$ ”.

2. 排列数的化简与证明技巧

应用排列数公式可以对含有排列数的式子进行化简和证明,化简的过程中要对排列数进行变形,并要熟悉排列数之间的内在联系.解题时要灵活地运用如下变式:

$$\textcircled{1} n! = n(n-1)!; \quad \textcircled{2} A_n^m = nA_{n-1}^{m-1};$$

$$\textcircled{3} n \cdot n! = (n+1)! - n!;$$

$$\textcircled{4} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

【变式训练】1. 解方程: $A_{2x+1}^4 = 140A_x^3$.

2. 求证: $A_n^n = A_n^m \cdot A_{n-m}^{n-m}$.

类型三 利用排列与排列数解简单计数应用题

典型例题

- 从 1, 2, ..., 8 中任取 3 个数组成无重复数字的三位数,共有 _____ 个.
- 一条铁路原有 n 个车站,为了适应客运需要,新增加了 m ($m > 1$) 个车站,客运车票增加了 62 种,问原有多少个车站? 现有多少个车站?

解题探究

- 每一个三位数对应怎样的一个排列? 所求三位数的个数是怎样的一个排列数?
- 每一种车票对应怎样的一个排列?

自主解答:

拓展提升

1. 利用排列与排列数解排列应用题的基本思想



2. 解简单的排列应用题的思路

- 认真分析题意,看能否把问题归结为排列问题,即是否有顺序.
- 如果是的话,再进一步分析,这里 n 个不同的元素指的是什么,以及从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素的一种排列对应的是什么事件.
- 运用排列数公式求解.

【变式训练】有 5 个不同的科研小课题,从中选 3 个由 B (4) 班的 3 个学习兴趣小组进行研究,每组一个课题,共有多少种不同的安排方法?

案例展示·析误区

破译思维的密码,点拨迷津

规避误区

易错误区 忽视排列数中的隐含条件致误

【典例】已知 $3A_8^n < 4A_9^{n-1}$, 则 n 为

- A. 7, 8, 9, 10, 11, 12 B. 8, 9 C. 7, 8 D. 7

【解析】选 C. 由排列数公式得, $3A_8^n < 4A_9^{n-1}$,

$$\text{所以 } \frac{3 \times 8!}{(8-n)!} < \frac{4 \times 9!}{(10-n)!},$$

$$\text{即 } \frac{3 \times 8!}{(8-n)!} < \frac{4 \times 9 \times 8!}{(10-n)(9-n)(8-n)!}$$

$$\text{所以 } 3 < \frac{4 \times 9}{(10-n)(9-n)},$$

化简为 $n^2 - 19n + 78 < 0$, 所以 $6 < n < 13$,

因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n = 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

由排列数的意义, 可知 $n \leq 8$ 且 $n-1 \leq 9$,

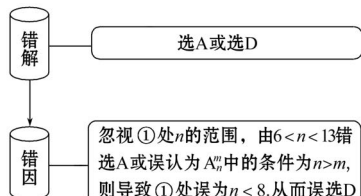
即 $n \leq 8$, 所以 $6 < n \leq 8$.

又 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n = 7$ 或 $n = 8$.

【类题试解】不等式 $A_{n-1}^2 - n < 7$ 的解集为 _____.

()

误区警示



防范措施

1. 隐含条件的挖掘

对题目中的条件要认真分析, 找出一些隐含条件. 如本例中 A_n^m 中, $n, m \in \mathbb{N}^*$ 且 $m \leq n$.

2. 公式的灵活选用

排列数公式有乘积式和阶乘式两种形式, 在求解与证明中要灵活选用以减少运算量和失误. 如本例中选用阶乘式则较简单.

学业测试·速达标

放飞激扬的梦想, 沙场点兵

检测实效

1. 乘积 $5 \times 6 \times 7 \times \cdots \times 20$ 等于 ()

- A. A_{20}^{17} B. A_{20}^{16} C. A_{20}^{15} D. A_{20}^{14}

2. 从 5 本不同的书中选出 2 本送给 2 名同学, 每人一本, 共有多少种给法 ()

- A. 5 种 B. 10 种 C. 20 种 D. 60 种

3. 若 $x = \frac{n!}{3!}$, 则 $x =$ ()

- A. A_n^3 B. A_n^{n-3} C. A_3^n D. A_{n-3}^3

4. 满足 $A_{n-2}^1 > 2$ 的 n 的解集为 _____.

5. 方程 $\frac{A_x^5 + A_x^4}{A_x^3} = 4$ 的解 $x =$ _____.

6. 求证: $\frac{A_{n-1}^{m-1} \cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}} = 1$.

课时提升卷(四)

一课一练日积月累, 披坚执锐稳固提能

第3课时 排列的综合应用

点燃智慧的明灯, 探究悟道

核心归纳·抓要点

点拨技法

类型一 含有“在”与“不在”约束条件的排列问题

典型例题

- 某一天的课程表要排入政治、语文、数学、物理、体育、美术共六节课, 如果第一节不排体育, 那么共有 _____ 种不同的排课程表的方法.
- 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名队员参加比赛, 3 名主力队员安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员中选 2

名安排在第三、四位置上, 那么不同的出场安排有 _____ 种.
3. 用 0 到 9 这十个数字, 可组成多少个没有重复数字的四位偶数?

解题探究

- 题 1 的约束条件是什么? 应如何解决?
- 题 2 的约束条件是什么? 应如何解决?
- 题 3 的约束条件是什么? 应如何解决?