

总主编◎李朝东



修订版

精讲精练

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，鞣以为轮，其曲中规，虽有槁暴，不复挺者，鞣使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。

吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

积土成山，风雨兴焉；
积水成渊，蛟龙生焉；
积善成德，而神明自得，圣心备焉。故不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。骐骥一跃，不能十步；驽马十驾，功在不舍。锲而舍之，朽木不折；锲而不舍，金石可镂。蚓无爪牙之利，筋骨之强，上食埃土，下饮黄泉，用心一也。用心一也，用心一也，用心一也。



本册主编：高志强 乔胜鑫

学生用书

必修4

高中数学



宁夏人民出版社

总主编◎李朝东



精讲精练

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，揉以为轮，其曲中规，虽有槁暴，不复挺者，揉使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。

吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

积土成山，风雨兴焉；
积水成渊，蛟龙生焉；
积善成德，而圣心备焉。

故圣心备焉，
积善成德，而圣心备焉。

小流，无以成江海；
骞骞，无以成江河。

牙之利，筋骨之强，
所积于学也。



本册主编：高志强 乔胜鑫

学生用书



宁夏人民教育出版社
黄河出版传媒集团

必修4

高中数学

人教 A 版

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练:高中数学. 4:必修 / 李朝东主编. —银川:
宁夏人民教育出版社, 2009.02(2013.1 重印)

ISBN 978-7-80764-079-0

I. ①精… II. ①李… III. ①数学课—高中—教学
参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP 数据核字(2009)第 014618 号

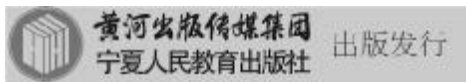
精讲精练——数学 必修 4(人教 A 版)

李朝东 主编

责任编辑 虎雅琼

封面设计 杭永鸿

责任印制 刘 丽



地 址 银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)

网 址 www.yrpubm.com

网上书店 www.hh-book.com

电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com

邮购电话 0951-5014294

经 销 全国新华书店

印刷装订 宁夏报业传媒印刷有限公司

开 本 880mm × 1230mm 1/16 印 张 10.5

印刷委托书号 (宁)0010830 字 数 210 千 印 数 7346 册

版 次 2009 年 2 月第 1 版 印 次 2013 年 1 月第 4 次印刷

书 号 ISBN 978-7-80764-079-0/G·1020

定 价 13.58 元

版权所有 翻印必究 36

目录

CONTENTS

第一章 三角函数

- 1.1 任意角和弧度制 /001
 - 1.1.1 任意角 /001
 - 1.1.2 弧度制 /004
- 1.2 任意角的三角函数 /008
 - 1.2.1 任意角的三角函数 /008
 - 1.2.2 同角三角函数的基本关系 /011
- 1.3 三角函数的诱导公式 /015
- 1.4 三角函数的图象与性质 /019
 - 1.4.1 正弦函数、余弦函数的图象 /019
 - 1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质(一) /022
 - 1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质(二) /025
 - 1.4.3 正切函数的性质与图象 /029
- 1.5 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 /032
- 1.6 三角函数模型的简单应用 /037
- 单元知识整合 /040

第二章 平面向量

- 2.1 平面向量的实际背景及基本概念 /045
- 2.2 平面向量的线性运算 /048
 - 2.2.1 向量加法运算及其几何意义 /048
 - 2.2.2 向量减法运算及其几何意义 /051
 - 2.2.3 向量数乘运算及其几何意义 /055
- 2.3 平面向量的基本定理及坐标表示 /058
 - 2.3.1 平面向量基本定理 /058
 - 2.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示 /058



- 2.3.3 平面向量的坐标运算/061
- 2.3.4 平面向量共线的坐标表示/061
- 2.4 平面向量的数量积/064
 - 2.4.1 平面向量数量积的物理背景及其含义/064
 - 2.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角/067
- 2.5 平面向量应用举例/071
 - 2.5.1 平面几何中的向量方法/071
 - 2.5.2 向量在物理中的应用举例/071
- 单元知识整合/074

■第三章 三角恒等变换

- 3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式/077
 - 3.1.1 两角差的余弦公式/077
 - 3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式/080
 - 3.1.3 二倍角的正弦、余弦、正切公式/083
- 3.2 简单的三角恒等变换/086
- 单元知识整合/091

第一章测试卷/095

第二章测试卷/099

第三章测试卷/103

综合测试卷/107

参考答案/111

第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

——自·主·探·究——

课标导学

kebiaodaoxue

1. 理解正角、负角、零角与象限角的概念.
2. 掌握终边相同角的表示方法.

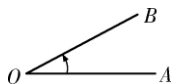
基础梳理

jichushuli

1. 角的概念

(1) 角可以看成是_____绕着它的_____从一个位置_____到另一个位置所成的图形.

(2) 角的表示



顶点: 用_____表示;

始边: 用_____表示, 用语言可表示为_____;

终边: 用_____表示, 用语言可表示为_____.

2. 角的分类

(1) 旋转生成的角, 又常叫做转角. 按旋转方向可将角分为如下三类:

类型	定义	图示
正角	按照_____方向旋转而成的角	

类型	定义	图示
负角	按照_____方向旋转而成的角	
零角	如果一条射线没有作任何旋转, 则称它形成了一个零角	

(2) 象限角

如果角的_____与原点重合, 角的_____与 x 轴非负半轴重合, 这时, 角的_____在第几象限, 就把这个角叫做第几象限的角, 终边落在坐标轴上的角称为轴线角.

3. 终边相同的角

设 α 表示任意角, 所有与角 α 终边相同的角, 包括 α 本身构成一个集合, 这个集合可记为 $\{\beta | \beta = ______\}\}$.

【参考答案】

1. (1) 平面内一条射线 端点 旋转 (2) 端点 O 射线 OA
始边 OA 射线 OB 终边 OB
2. (1) 逆时针 顺时针 (2) 顶点 始边 终边
3. $\alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$

——重·难·点·突·破——

疑难剖析

yinanpoux

1. 任意角的概念

角度的范围不再限于 $[0^\circ, 360^\circ]$, 角的正负、大小与所在的象限无关.

锐角是第一象限角, 但第一象限角并不都是锐角, 也可能是负角等. 不能利用象限角比较角的大小, 如“第二象限角比第一象限角大”是错误的.

2. 终边相同的角

$$S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

(1) α 为任意角.

(2) $k \cdot 360^\circ$ 与 α 之间是“+”号, $k \cdot 360^\circ - \alpha$ 可理解为 $k \cdot 360^\circ + (-\alpha)$.

(3) 相等的角, 终边一定相同, 终边相同的角不一定相等, 终边相同的角有无数个, 它们相差 360° 的整数倍.

(4) $k \in \mathbf{Z}$ 这一条件不能少.

3. 象限角和轴线角的表示

(1) 象限角的表示

第一象限角	$k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$
第二象限角	$k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$
第三象限角	$k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}$
第四象限角	$k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$

(2) 轴线角的表示

①终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;②终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$. $\mathbf{Z}$.

典型题解

dianxingtijie

题型1 有关角的概念问题

例1 下列命题:

- ①第一象限角都是锐角;
- ②锐角都是第一象限角;
- ③第一象限角一定不是负角;
- ④第二象限角大于第一象限角;
- ⑤第二象限角是钝角;
- ⑥小于 180° 的角是钝角、直角或锐角.

其中正确命题的序号为 _____ (把正确命题的序号都写上).

[解析] 本题主要考查角的有关概念问题,掌握象限角、钝角、直角、锐角的概念是解答本题的关键.

① 390° 角是第一象限角,可它不是锐角,所以①不正确.②锐角是大于 0° 且小于 90° 的角,终边落在第一象限,故是第一象限角,所以②正确.③ -330° 角是第一象限角,但它是负角,所以③不正确.④ 120° 角是第二象限角, 390° 是第一象限角,显然 $390^\circ > 120^\circ$,所以④不正确.⑤ 480° 角是第二象限角,但它不是钝角,所以⑤不正确.⑥ 0° 角小于 180° ,但它既不是钝角,也不是直角或锐角,故⑥不正确.

故应填②.

[答案] ②

[点评] 解决此类问题的关键在于正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念.另外需要掌握判断命题真假的技巧,判断命题为真需要证明,而判断命题为假只要举出反例即可.

[借题发挥1] 下列命题是真命题的是 ()

- A. 三角形的内角必是第一、二象限的角
- B. 始边相同而终边不同的角一定不相等
- C. 第四象限角一定是负角
- D. 钝角比第三象限角小

题型2 终边相同的角的问题

例2 已知 $\alpha = -315^\circ$.(1) 把 α 改写成 $k \cdot 360^\circ + \beta$ ($k \in \mathbf{Z}, 0^\circ \leq \beta < 360^\circ$) 的形

式,并指出它是第几象限角;

(2) 求 θ , 使 θ 与 α 终边相同, 且 $-1080^\circ < \theta < -360^\circ$.[解析] 本题主要考查终边相同的角的问题,解答本题(1)用 α 除以 360° ,使余数为正值,商为负数,商即为 k ; (2) 用公式 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$) 列不等式求角.[答案] (1) 用 -315° 除以 360° , 商为 -1 , 余数为 45° , $\therefore k = -1, \beta = 45^\circ. \therefore \alpha = -360^\circ + 45^\circ$, 是第一象限角.(2) 与 -315° 终边相同的角: $k \cdot 360^\circ - 315^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$),令 $-1080^\circ < k \cdot 360^\circ - 315^\circ < -360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$),解得 $-2.125 < k < -0.125$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\therefore k = -2, -1$, 将 k 值代入 $k \cdot 360^\circ - 315^\circ$ 中,即得所求角为 -675° 或 -1035° .[点评] (1) 把任意角化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$ 且 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$) 的形式,关键是确定 k . 可以用观察法(α 的绝对值较小),也可以用竖式除法,要注意:正角除以 360° ,按通常的除法进行;负角除以 360° ,商是负数,使余数为正值.(2) 要求适合某种条件且与已知角终边相同的角,其方法是先求出与已知角终边相同的角的一般形式,再依条件构建不等式求出 k 的值.[借题发挥2] 已知 $\alpha = -1910^\circ$.(1) 把角 α 写成 $\beta + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}, 0^\circ \leq \beta < 360^\circ$) 的形式,指出它是第几象限的角;(2) 求出 θ 的值,使 θ 与 α 的终边相同,且 $-720^\circ \leq \theta < 0^\circ$.

题型3 对称问题

例3 已知角 α 的终边与 -690° 角的终边关于 y 轴对称,求角 α .[解析] 由 $-690^\circ = -720^\circ + 30^\circ$ 得到角 α 的终边与 30° 角的终边关于 y 轴对称,在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内满足条件的角为 150° ,故可由角 α 的终边与 150° 角的终边相同得到角 α .[答案] 可知 $-690^\circ = -720^\circ + 30^\circ$,由题意知,角 α 的终边与 30° 角的终边关于 y 轴对称,故 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}$.[点评] 解决这类问题一般是先把已知角转化到 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内,找到符合条件的角再加上 $k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$ 即可.

[借题发挥3] 已知角 α, β 的终边关于直线 $y=x$ 对称, 则 α, β 之间满足怎样的关系?

题型4 已知角 α 所在象限, 求角 $\frac{\alpha}{n}$ 所在象限

例4 已知角 α 所在象限为第二象限, 求 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}$ 所在象限.

[解析] 本题主要考查角的象限问题. 先写出角 α 的范围, $k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$. 在不等式两边同乘以2, 可得 2α 的范围, 在不等式两边同除以2, 可得 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围. 但注意应对 k 进行分类讨论.

[答案] $\because \alpha$ 为第二象限角,

则 $k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

$\therefore 2k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

$\therefore 2\alpha$ 是第三或第四象限角, 或终边落在 y 轴的非正半轴上的角.

$\therefore k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时, 令 $k=2n (n \in \mathbf{Z})$, 则 $n \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 90^\circ, \frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角;

当 k 为奇数时, 令 $k=2n+1 (n \in \mathbf{Z})$, 则 $n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ, \frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角.

[点评] (1) 本题中 2α 的范围应包括 y 轴的非正半轴, 容易遗漏.

(2) 已知角 α 所在的象限, 求角 $\frac{\alpha}{n} (n \in \mathbf{Z})$ 所在的象限时, 有两种方法.

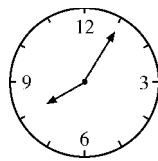
方法一: 分类讨论, 即对 $\frac{k}{n}$ 进行讨论, 令 $k=n \cdot m, n \cdot m+1, n \cdot m+2, \dots, n \cdot m+n-1 (m \in \mathbf{Z})$;

方法二: 已知 α 是第 $m (m=1, 2, 3, 4)$ 象限角, 求 $\frac{\alpha}{n}$ 是第几象限角. 可先将每个象限分成 n 等份, 然后从 x 轴正方向上第一个区域起, 按逆时针方向顺序标上 $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \dots$, 依次循环, 直至填充所有区域, 其中出现数字 m 的区域即为 $\frac{\alpha}{n}$ 的范围.

[借题发挥4] 已知角 α 为第一象限角, 则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角?

题型5 任意角在实际生活中的应用

例5 将钟表上的时针作为角的始边, 分针作为终边, 那么当钟表上显示8点5分时, 时针与分针构成的角度是_____.



[解析] 本题主要考查终边相同角的概念与表示, 应从任意角的概念出发, 研究时针与分针所构成的角, 其中有正角、负角, 共有无穷多个角. 要求这些角, 可根据图先求出负角中绝对值最小的角应为 $-(4 + \frac{55}{60}) \times 30^\circ = -147.5^\circ$. $\therefore$ 所有负角可表示为: $k \cdot 360^\circ - 147.5^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内最小正角为 $360^\circ - 147.5^\circ = 212.5^\circ$. 所有正角可表示为 $k \cdot 360^\circ + 212.5^\circ (k \in \mathbf{Z})$. 综上, 所有角可表示为 $k \cdot 360^\circ + 212.5^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

[答案] $k \cdot 360^\circ + 212.5^\circ (k \in \mathbf{Z})$

[点评] (1) 应从任意角的角度看钟表的时针和分针问题, 多数人可能认为只有 212.5° .

(2) 在解决时针与分针的角度问题时, 要注意在规定时间内它们各转了多少圈.

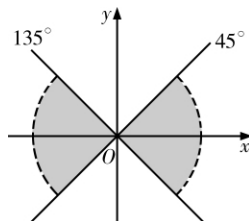
[借题发挥5] 经过5小时又25分钟, 时钟的分针和时针各转过了多少度?

提·升·训·练

- 射线 OA 绕端点 O 逆时针旋转 120° 到达 OB 位置, 由 OB 位置顺时针旋转 270° 到达 OC 位置, 则 $\angle AOC$ 等于 ()
A. 150° B. -150°
C. 390° D. -390°
- 下列命题正确的是 ()
A. 第二象限角比第一象限角大
B. $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{\beta | \beta = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \subsetneq B$
C. 若 $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 则 α 为第一、二象限角
D. 终边在 x 轴上的角可表示为 $k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$
- 下列各角中与 330° 角的终边相同的角是 ()
A. 510° B. 150°
C. -150° D. -390°
- 已知集合 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ\}, B = \{\beta | -180^\circ < \beta < 180^\circ\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{-36^\circ, 54^\circ\}$
B. $\{-126^\circ, 144^\circ\}$
C. $\{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$
D. $(-126^\circ, 54^\circ)$
- 有小于 360° 的正角, 这个角的 5 倍角的终边与该角的终边重合, 这个角的大小是 ()
A. 90° B. 180°
C. 270° D. $90^\circ, 180^\circ$ 或 270°
- 若 α 是第四象限角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是 ()
A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角
- 若 $\alpha = n \cdot 360^\circ + \theta, \beta = m \cdot 360^\circ - \theta, m, n \in \mathbf{Z}$, 则 α, β 终边的位置关系是 ()
A. 重合 B. 关于原点对称

- C. 关于 x 轴对称 D. 关于 y 轴对称
- α, β 两角的终边互为反向延长线, 且 $\alpha = -120^\circ$, 则 $\beta =$ _____.
- 终边在直线 $y = -\sqrt{3}x$ 上的所有角的集合是 _____.
- 已知 $-990^\circ < \alpha < -630^\circ$, 且 α 与 120° 角终边相同, 则 $\alpha =$ _____.
- 自行车大链轮有 48 个齿, 小链轮有 20 个齿, 当大链轮转过一周时, 小链轮转过的角度应该是 _____ (链齿大小相等).
- 已知 $\alpha = 60^\circ$, 角 β 的终边与 α 的终边关于直线 $y = x$ 对称, 求角 β 的集合.

- 已知角 β 的终边在如图阴影所表示的范围内 (包括边界), 试写出角 β 的集合 B .



(第 13 题)

1.1.2 弧度制

自·主·探·究

课标导学

kebiaodaoxue

- 理解弧度的意义, 掌握弧度与角度的换算公式.
- 掌握弧长计算公式与扇形面积公式, 并能运用它们解决一些简单的实际问题.

基础梳理

jichushuli

1. 度量角的单位制

(1) 角度制

用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制, 规定 1

度的角等于 _____.

(2) 弧度制

① 弧度制的定义

长度等于 _____ 的弧所对的 _____ 叫做 1 弧度的角, 用符号 rad 表示, 读作弧度.

以弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.

② 任意角的弧度数与实数的对应关系: 正角的弧度数是一个 _____; 负角的弧度数是一个 _____; 零角的弧度数是 _____.

③ 角的弧度数的计算

如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l , 那么,

角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| =$ _____.

2. 角度制与弧度制的换算

角度化弧度	弧度化角度
$360^\circ =$ _____ rad	2π rad = _____
$180^\circ =$ _____ rad	π rad = _____
$1^\circ =$ _____ rad $\approx$ _____ rad	1 rad = _____ $\approx$ _____

(2) 一些特殊角的度数与弧度数的对应关系

度	0°	1°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

3. 扇形的弧长及面积公式

扇形的半径为 R , 弧长为 l , α ($0 < \alpha < 2\pi$) 为其圆心角, 则:

度量单位 类别	α 为角度制	α 为弧度制
扇形的弧长	$l =$ _____	$l =$ _____
扇形的面积	$S =$ _____	$S =$ _____ = _____

【参考答案】

1. (1) 周角的 $\frac{1}{360}$ (2) ①半径 圆心角 ②正数 负数 0
③ $\frac{l}{r}$
2. (1) 2π 360° π 180° $\frac{\pi}{180}$ 0.017 45 $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$
 57.30°
3. $\frac{\pi R \alpha}{180}$ $R \alpha$ $\frac{\pi \alpha R^2}{360}$ $\frac{1}{2} l R$ $\frac{1}{2} R^2 \alpha$

重·难·点·突·破

疑难剖析

yinanpoux

关于弧度制

(1) 不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

(2) 用弧度为单位表示角的大小时, “弧度”二字可以省略不写, 这时弧度数在形式上虽是一个不名数, 但我们应当把它理解为名数, 如 $\sin 2$ 是指 $\sin(2 \text{ 弧度})$, $\pi = 180^\circ$ 是指 π 弧度 = 180° ; 但如果以度 ($^\circ$) 为单位表示角时, 度 ($^\circ$) 就不能省去.

(3) 用弧度为单位表示角时, 常常把弧度写成多少 π 的形式, 若无特殊要求, 不必把 π 写成小数, 如 $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ 弧度, 不必写成 $45^\circ \approx 0.785$ 弧度, 用弧度表示角时, 不能与角度制混用, 例如 $\alpha = 2k\pi + 30^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\beta = k \cdot 360^\circ + \frac{3}{2}\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 都是不正确的.

典型题解

dianxingtijie

题型1 角度制与弧度制的互化

例1 将下列各角度与弧度互化:

- (1) 22.5° ; (2) $112^\circ 30'$; (3) $\frac{9}{4}\pi$; (4) 2 rad.

解析 本题主要考查角度与弧度的换算, 直接套用公式即可得出结果.

答案 (1) $22.5^\circ = \frac{\pi}{8}$ rad $\times 22.5 = \frac{\pi}{8}$ rad.

(2) $112^\circ 30' = 112.5^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad $\times 112.5 = \frac{5\pi}{8}$ rad.

(3) $\frac{9}{4}\pi = \frac{9}{4} \times 180^\circ = 405^\circ$.

(4) 2 rad $= 2 \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ \times 2 = 114.60^\circ$.

点评 (1) 进行角度换算时, 要抓住关系: π rad = 180° .

(2) 两个换算公式要熟记: 度数 $\times \frac{\pi}{180}$ = 弧度数; 弧度数

$\times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ = 度数.

借题发挥1 将下列各角度与弧度互化:

- (1) $\frac{5}{12}\pi$; (2) $-\frac{7}{6}\pi$; (3) $-157^\circ 30'$.

例2 把下列各角化成 $2k\pi + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$ 且 $k \in \mathbf{Z}$) 的形式, 并指出是第几象限角:

- (1) -1500° ; (2) $\frac{23}{6}\pi$; (3) -4 .

解析 本题主要考查角度与弧度的换算及象限角的判定.

答案 (1) $-1500^\circ = -1800^\circ + 300^\circ = -10\pi + \frac{5}{3}\pi$,

$\therefore -1500^\circ$ 与 $\frac{5\pi}{3}$ 终边相同, 是第四象限角.

(2) $\frac{23}{6}\pi = 2\pi + \frac{11}{6}\pi$, $\therefore \frac{23}{6}\pi$ 与 $\frac{11}{6}\pi$ 的终边相同.

而 $\frac{11}{6}\pi = \frac{11}{6} \times 180^\circ = 330^\circ$, 是第四象限角,

故 $\frac{23}{6}\pi$ 是第四象限角.

(3) $-4 = -2\pi + (2\pi - 4)$,

$\therefore -4$ 与 $2\pi - 4$ 终边相同, 而 $2\pi - 4 = (2\pi - 4) \times$

$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 131^\circ$.

$\therefore -4$ 为第二象限角.

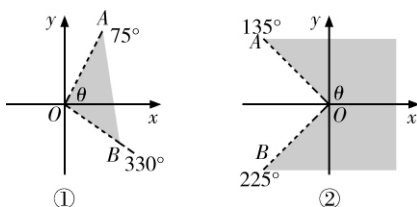
点评 对于 $-1500^\circ = -1500 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{25}{3}\pi = -10\pi +$

$\frac{5}{3}\pi$, 不能写成 $-1500^\circ = -10\pi + 300^\circ$, 即单位制要统一.

【借题发挥2】 设 $0 \leq \alpha < 2\pi$, 将 -1485° 表示成 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的形式.

题型2 用弧度表示区间角问题

【例3】 用弧度表示顶点在原点, 始边重合于 x 轴的非负半轴, 终边落在阴影部分的角的集合(如图, 不包括边界).



【解析】 本题主要考查区间角的弧度表示, 先在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内找到满足条件的角化为弧度, 然后写出与区间角终边相同的角的集合.

【答案】 ①中以 OB 为终边的角为 330° , 可看成 -30° , 化为弧度, 即 $-30^\circ = -30 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{6}$, 而 $75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$.

$\therefore$ 终边落在阴影部分的角的集合为 $\left\{ \theta \mid 2k\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

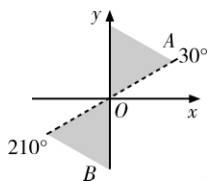
②中以 OB 为终边的角为 225° , 可看成是 -135° , 化成弧度, 即 $-135^\circ = -135 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{3}{4}\pi$, 而 $135^\circ = \frac{3}{4}\pi$,

$\therefore$ 终边落在阴影部分的角的集合为 $\left\{ \theta \mid 2k\pi - \frac{3\pi}{4} < \theta < 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

【点评】 (1) 在表示角时, 一定要使用统一单位, 只能用角度制或弧度制中的一种.

(2) 本题②中易出现错误如: $\left\{ \theta \mid \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

【借题发挥3】 用弧度制表示图中顶点在原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边落在阴影部分的角的集合(不含边界).



题型3 扇形面积、弧长公式的应用

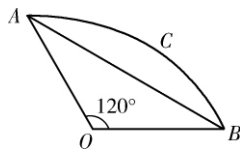
【例4】 一个扇形的面积为1, 周长为4, 求圆心角的弧度数.

【解析】 本题主要考查扇形面积、弧长公式的应用问题, 解答本题可先利用扇形的面积和周长公式求出半径和弧长, 再用弧长公式的变形公式求解.

【答案】 设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 则 $2R + l = 4$, $\therefore l = 4 - 2R$, 根据扇形面积公式 $S = \frac{1}{2}lR$, 得 $1 = \frac{1}{2}(4 - 2R) \cdot R$, $\therefore R = 1$, $\therefore l = 2$, $\therefore \alpha = \frac{l}{R} = \frac{2}{1} = 2$, 即扇形的圆心角为 2 rad.

【点评】 涉及扇形的周长、弧长、圆心角、面积等的计算, 关键是先分析题目已知哪些量求哪些量, 然后灵活运用弧长公式、扇形面积公式直接求解或列方程(组)求解.

【借题发挥4】 如图, 已知扇形 AOB 的圆心角为 120° , 半径长为6, 求弓形 ACB 的面积.



【例5】 若扇形的周长为定值 l , 则该扇形的圆心角为多大时, 扇形面积最大? 并求出最大面积.

【解析】 本题主要考查扇形面积公式, 圆心角及函数最值, 由已知条件列出扇形面积与半径之间的函数关系式, 将其化为二次函数最值问题处理.

【答案】 设扇形半径为 r , 则扇形的弧长为 $l - 2r$,

$\therefore$ 扇形面积 $S = \frac{1}{2}(l - 2r) \cdot r = -r^2 + \frac{1}{2}lr = -(r - \frac{l}{4})^2 + \frac{1}{16}l^2$.

$\therefore$ 当 $r = \frac{l}{4}$ 时, 扇形面积最大, 最大为 $\frac{1}{16}l^2$. 此时, 圆心角 $\alpha = \frac{l - 2r}{r} = 2$.

$\therefore$ 当扇形圆心角为 2 rad 时, 扇形面积最大, 最大面积为 $\frac{1}{16}l^2$.

【点评】 涉及到最值问题时, 往往先建立函数关系, 再求函数的最值, 这种函数思想, 是解决最值问题的基本思想方法.

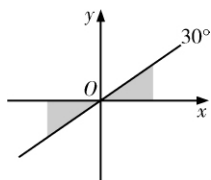
【借题发挥5】 已知扇形的周长为 8 cm.

(1) 若这个扇形的面积为 3 cm^2 , 求圆心角的大小;

(2) 当这个扇形的面积取得最大值时, 求圆心角和弦长 AB 的大小.

提·升·训·练

- 把 -495° 表示成 $2k\pi + \theta$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的形式, 其中使 $|\theta|$ 最小的 θ 值是 ()
A. $-\frac{3\pi}{4}$ B. $-\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{4}$
- 若 $\alpha = -3$, 则角 α 的终边在 ()
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
- 已知集合 $A = \{x | 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{\alpha | -4 \leq \alpha \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\emptyset$
B. $\{\alpha | -4 \leq \alpha \leq -\pi\}$
C. $\{\alpha | 0 \leq \alpha \leq \pi\}$
D. $\{\alpha | -4 \leq \alpha \leq -\pi \text{ 或 } 0 \leq \alpha \leq \pi\}$
- 若 1 弧度的圆心角所对的弦长等于 2, 则这个圆心角所对的弧长等于 ()
A. $\sin \frac{1}{2}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$ D. $2 \sin \frac{1}{2}$
- 扇形圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 半径长为 a , 则扇形内切圆的面积与扇形面积之比为 ()
A. 1:3 B. 2:3 C. 4:3 D. 4:9
- 下图中阴影部分表示的角的集合为_____.



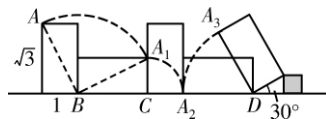
(第6题)

- 圆的一段弧长等于这个圆的内接正三角形的一条边长, 那么这段弧所对的圆心角是_____ rad.
- 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 M, N 之间的关系是_____.
- 已知 $\alpha = -800^\circ$.
(1) 把 α 改写成 $\beta + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}, 0 \leq \beta < 2\pi$) 的形式, 并指出 α 在第几象限;
(2) 求角 γ , 使 γ 与 α 角的终边相同, 且 $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. 解答下列各题:

- 已知扇形的周长为 10 cm, 面积为 4 cm^2 , 求扇形圆心角的弧度数;
- 已知一扇形的圆心角是 72° , 半径等于 20 cm, 求扇形的面积;
- 已知一扇形的周长为 40 cm, 当半径和圆心角取什么值时, 才能使扇形的面积最大? 最大面积是多少?

- 如图, 已知一长为 $\sqrt{3}$ cm, 宽为 1 cm 的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚, 翻滚到第四次时被一小木板挡住, 使木块底面与桌面成 30° 的角, 求点 A 走过的路程及走过的弧度所在扇形的面积.



(第11题)

- 将一条绳索绕在半径为 40 cm 的轮圈上, 绳索的下端 B 处悬挂着物体 W, 如果轮子按逆时针方向每分钟匀速旋转 6 圈, 现想将物体 W 的位置向上提升 100 cm, 需要多长时间才能完成这一工作?

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

———自·主·探·究———

课标导学

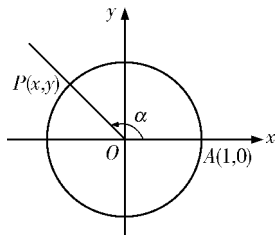
kebiaodaoxue

1. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义.
2. 掌握正弦、余弦、正切函数的定义域和这三种函数值在各象限的符号.
3. 掌握公式一, 会运用它们把求任意角的三角函数值, 转化为求 0 到 2π 角的三角函数值.
4. 掌握正弦线、余弦线、正切线, 并能进行简单的应用.

基础梳理

jichushuil

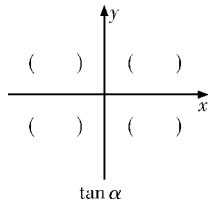
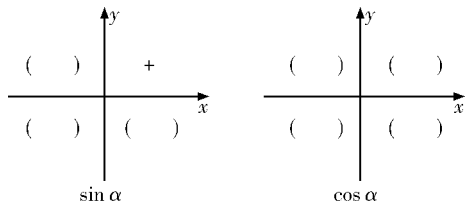
1. 如图, 设 α 是一个任意角, 它的终边与单位圆交于 $P(x, y)$ 点, 那么:



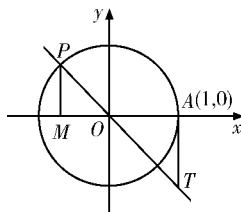
- (1) y 叫做 α 的正弦, 记作 $\sin \alpha$, 即 $y = \sin \alpha$.
- (2) x 叫做 α 的余弦, 记作 $\cos \alpha$, 即 $x = \cos \alpha$.
- (3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan \alpha$, 即 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

当 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, α 的终边在 y 轴上, 此时 x 等于 0, 所以 $\tan \alpha$ 无意义.

2. 三角函数的值在各象限的符号.



3. 如图, 设角 α 的终边与单位圆交于 P 点, 经过 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M ; 过点 $A(1, 0)$ 作单位圆的切线与角 α 的终边或其延长线交于 T 点, 原点为 O , 则有向线段 MP 叫角 α 的 正弦线, OM 叫角 α 的 余弦线, AT 叫角 α 的 正切线, 统称为 三角函数线.



4. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$,
 $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$,
 $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha$ (其中 $k \in \mathbf{Z}$).

【参考答案】

1. (1) $\sin \alpha$ $\sin \alpha = y$
 (2) $\cos \alpha$ $\cos \alpha = x$
 (3) $\tan \alpha$ $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ $y \neq 0$ $\tan \alpha = \frac{y}{x}$
2. $+, -, -, +; +, -, -, +; +, -, +, -$ (按从第一象限到第四象限顺序)
3. 正弦线 余弦线 正切线 三角函数线
4. $\sin \alpha$ $\cos \alpha$ $\tan \alpha$

———重·难·点·突·破———

疑难剖析

yinanpouxi

1. 任意角的三角函数

(1) 任意角的三角函数是在坐标系中定义的, 角的范围

是使函数有意义的实数集.

(2) 任意角 α 的三角函数值只与 α 有关, 而与点 P 的位置无关.

(3) 三角函数记号是一个整体, 离开 α 的 $\sin, \cos, \tan$ 等是没

有意义的,它表示的是一个比值,而不是 $\sin$ 与 α 的乘积.

2. 关于公式一

(1) 终边相同的角同名三角函数值相等.

(2) 当用弧度表示时,必须写成 $k \cdot 2\pi$,而不是 $k\pi$ 的形式,其中 $k \in \mathbb{Z}$.

(3) 由公式一可知,在三角函数中,角和三角函数值的对应关系是多值对应关系,如果给定一个角,其三角函数值是唯一确定的(不存在者除外).反过来,如果给定一个三角函数值,却有无数多个角与之相对应.

3. 三角函数线

在三角函数中, MP 、 OM 、 AT 都是有向线段,当角 α 的终边与 x 轴重合时,正弦线、正切线分别变成一个点,此时角 α 的正弦值和正切值都为 0;当角 α 的终边与 y 轴重合时,余弦线变成一个点,正切线不存在,此时角 α 的正切值不存在.

(拓展) 我们可以利用角 α 终边上任意一点 P 的坐标定义三角函数,如下:

设 α 是一个任意角, α 的终边上的任意一点 $P(x, y)$,它与原点的距离为 $r(r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$,则:

(1) 比值 $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦,记作 $\sin \alpha$,即 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$.

(2) 比值 $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的余弦,记作 $\cos \alpha$,即 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.

(3) 比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切,记作 $\tan \alpha$,即 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

典型题解

dianxingtijie

题型1 三角函数的定义

例1 已知角 α 的终边经过点 $P(-4a, 3a) (a \neq 0)$,求 α 的各三角函数值.

解析 本题主要考查三角函数的定义和分类讨论思想,首先求出点 $P(-4a, 3a) (a \neq 0)$ 到原点的距离 r ,由于含参数 a ,要注意分类讨论.

答案 $r = \sqrt{(3a)^2 + (-4a)^2} = 5|a|$.

若 $a > 0, r = 5a$,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{3a}{-4a} = -\frac{3}{4}.$$

若 $a < 0, r = -5a$,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3a}{-5a} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-4a}{-5a} = \frac{4}{5},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{3a}{-4a} = -\frac{3}{4}.$$

点评 三角函数值的大小与点 P 在角的终边上的位置无关,只与角的大小有关.当角 α 的终边上点的坐标以参数形式给出时,要根据问题的实际需要参数进行分类讨论.

借题发挥1 已知角 α 的终边在直线 $y = -\sqrt{3}x$ 上,求 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 的值.

题型2 三角函数值在各象限的符号及有关问题

例2 求函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域.

解析 本题主要考查三角函数值的问题,分象限讨论各项的值,即可求出值域.

答案 由题意知,角 x 的终边不在坐标轴上.

$$\text{当 } x \text{ 在第一象限时, } y = \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\tan x}{\tan x} = 3.$$

$$\text{当 } x \text{ 在第二象限时, } y = \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{-\cos x}{\cos x} + \frac{\tan x}{-\tan x} = -1.$$

$$\text{当 } x \text{ 在第三象限时, } y = \frac{\sin x}{-\sin x} + \frac{-\cos x}{\cos x} + \frac{\tan x}{\tan x} = -1.$$

$$\text{当 } x \text{ 在第四象限时, } y = \frac{\sin x}{-\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\tan x}{-\tan x} = -1.$$

$$\therefore \text{函数 } y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|} \text{ 的值域为 } \{-1, 3\}.$$

点评 分象限讨论各三角函数值的符号是解决这类问题的基本方法,注意讨论时不重不漏,所有可能情况考虑全面.

借题发挥2 若 $\sin 2\alpha > 0, \cos \alpha < 0$,试确定 α 所在的象限,并判断 $\sin \alpha, \tan \alpha$ 的符号.

题型3 利用公式一化简,求值

例3 求下列各式的值:

$$(1) \cos \frac{25}{3}\pi + \tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right);$$

$$(2) \sin 810^\circ + \tan 765^\circ + \tan 1125^\circ + \cos 360^\circ.$$

解析 本题主要考查公式一的应用,先利用公式一化简,再求值.

$$\text{答案 } (1) \cos \frac{25}{3}\pi + \tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) +$$

$$\tan\left(-4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \text{原式} = \sin(2 \times 360^\circ + 90^\circ) + \tan(2 \times 360^\circ + 45^\circ) + \tan(3 \times 360^\circ + 45^\circ) + \cos(0^\circ + 360^\circ) = \sin 90^\circ + \tan 45^\circ + \tan 45^\circ + \cos 0^\circ = 4.$$

[点评] 利用诱导公式一可把负角的三角函数化为 0 至 2π 间的三角函数,亦可把大于 2π 的角的三角函数化为 0 至 2π 之间的三角函数,即实现了“负化正,大化小”.

[借题发挥 3] (1) 求值: $m \cdot \sin \frac{7}{2}\pi + n \cdot \tan(-4\pi) + p \cdot$

$$\cos \frac{5}{2}\pi;$$

(2) 证明: $\log_2(4\sin 110^\circ) = 1$.

题型4 利用三角函数线解有关问题

例 4 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边.

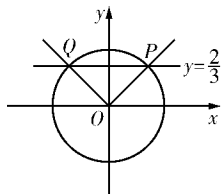
$$(1) \sin \alpha = \frac{2}{3}; (2) \cos \alpha = -\frac{3}{5}; (3) \tan \alpha = 2.$$

[解析] 本题主要考查三角函数线的概念. 对于(1), 设角 α 的终边与单位圆交于 $P(x, y)$, 则 $\sin \alpha = y, \cos \alpha = x$. 所以要作出满足 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ 的角的终边, 只要在单位圆上找出纵坐标为 $\frac{2}{3}$ 的点, 则点与原点的连线即为 α 的终边; 对于(2)(3)可采用同样的方法进行作图.

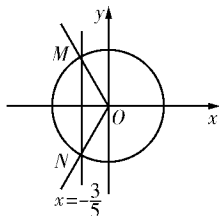
[答案] (1) 作直线 $y = \frac{2}{3}$ 交单位圆于 P, Q 两点, 则 OP 与 OQ 为角 α 的终边. 如图①.

(2) 作直线 $x = -\frac{3}{5}$ 交单位圆于 M, N 两点, 则 OM 与 ON 为角 α 的终边. 如图②.

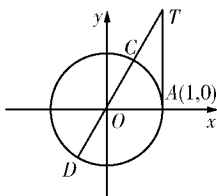
(3) 在直线 $x=1$ 上截取 $AT=2$, 其中 $A(1, 0)$, 设直线 OT 与单位圆交于 C, D 两点, 则 OC 与 OD 为角 α 的终边. 如图③.



①



②



③

[点评] 三角函数线可以用来求出满足形如 $f(\alpha) = m$ 的三

角函数的角 α 的终边, 这是解三角不等式及求三角函数定义域时常用到的.

[借题发挥 4] 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 终边的范围, 并写出角 α 的集合.

$$(1) \sin \alpha = -\frac{1}{2}; (2) \sin \alpha \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

题型5 三角函数的定义域问题

例 5 求下列函数的定义域:

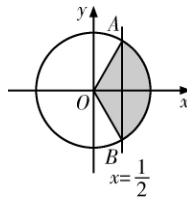
$$(1) y = \sqrt{2 \cos x - 1}; (2) y = \lg(3 - 4 \sin^2 x).$$

[解析] 本题主要考查利用函数线求函数的定义域问题. 解答本题可首先作出单位圆, 然后根据各问题的约束条件用三角函数线画出角 x 满足条件的终边范围.

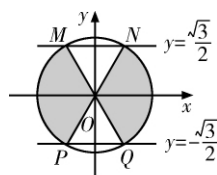
[答案] (1) $\because 2 \cos x - 1 \geq 0, \therefore \cos x \geq \frac{1}{2}$,

角 x 终边如图①所示,

$$\therefore x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right] (k \in \mathbf{Z}).$$



①



②

$$(2) \because 3 - 4 \sin^2 x > 0, \therefore \sin^2 x < \frac{3}{4},$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

角 x 终边如图②所示,

$$\therefore x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \right) (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{即 } x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{3} \right) (k \in \mathbf{Z}).$$

[点评] 求三角函数的定义域时, 一般应转化为求不等式(组)的解的问题, 利用数轴或三角函数线是解三角不等式常用的方法.

[借题发挥 5] 求函数 $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{1 - \tan x}$ 的定义域.

提·升·训·练

- 不论角 α 的终边位置如何,在单位圆中作三角函数线时,下列说法中正确的是 ()
A. 总能分别作出正弦线、余弦线、正切线
B. 总能分别作出正弦线、余弦线、正切线,但有可能不只一条
C. 正弦线、余弦线、正切线都可能不存在
D. 正弦线、余弦线总存在,但正切线不一定存在
- 已知 $\sin \alpha > \sin \beta$, 那么下列命题成立的是 ()
A. 若 α, β 是第一象限角, 则 $\cos \alpha > \cos \beta$
B. 若 α, β 是第二象限角, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$
C. 若 α, β 是第三象限角, 则 $\cos \alpha > \cos \beta$
D. 若 α, β 是第四象限角, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$
- 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$, 则角 2α 所在的象限是 ()
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
- 角 α 的终边经过点 $P(-b, 4)$ 且 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 b 的值为 ()
A. 3 B. -3 C. ± 3 D. 5
- 下列各三角函数值中, 负值的个数是 ()
① $\sin(-660^\circ)$; ② $\tan 160^\circ$; ③ $\cos(-740^\circ)$; ④ $\sin(-420^\circ) \cdot \cos 570^\circ$.
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 在 $(0, 2\pi)$ 内使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()
A. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \pi)$
C. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$
- $\cos \frac{9\pi}{4} + \sin(-\frac{11}{6}\pi) =$ _____.
- 已知角 α 的终边落在直线 $y = -3x (x < 0)$ 上, 则 $\frac{|\sin \alpha|}{\sin \alpha} - \frac{|\cos \alpha|}{\cos \alpha} =$ _____.

- 已知 α 是第三象限角, 则 $\sin(\cos \alpha) \cdot \cos(\sin \alpha)$ 的符号为 _____. (填“正”或“负”)
- (1) 设 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 角 α 的终边上一点 $P(x, \sqrt{5})$, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}x$, 求 $\sin \alpha$ 与 $\tan \alpha$ 的值;
(2) 已知角 θ 的终边上有一点 $P(x, -1) (x \neq 0)$, 且 $\tan \theta = -x$, 求 $\sin \theta, \cos \theta$.

11. 求下列函数的定义域.

- $y = \sqrt{-\cos x} + \sqrt{\sin x}$;
- $y = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}} x} + \tan x$.

- 若 α, β 是关于 x 的二次方程 $x^2 + 2(\cos \theta + 1)x + \cos^2 \theta = 0$ 的两根, 且 $|\alpha - \beta| \leq 2\sqrt{2}$, 求 θ 的范围.

1.2.2 同角三角函数的基本关系

自·主·探·究

课标导学

- 理解同角三角函数的基本关系式.
- 灵活运用同角三角函数的关系解决求值、化简、证明等问题.

基础梳理

- 平方关系: _____, 即 _____ 的正弦、余弦的平方

和等于 _____.

- 商数关系: _____, 即 _____ 的正弦、余弦的商等于 _____.

【参考答案】

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 同一个角 α 1
- $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 同一个角 α 角 α 的正切

重·难·点·突·破

疑难剖析

yinanpoux

1. 同角三角函数的基本关系

(1) 在理解同角三角函数的基本关系时,应突出“同角”两个字,对同角应作广义的理解. 例如 $\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{\pi}{3}$ 、 3α 与 3α 、 $5\beta + \frac{\pi}{6}$ 与 $5\beta + \frac{\pi}{6}$ 也是同角. 另外由公式一可知 $\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{7\pi}{3}$ 等也为同角.

(2) 这些关系式都是对使它们有意义的那些角而言的,如 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, 此时 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(3) 应用同角三角函数基本关系式,根据问题的需要,注意如下变形. 如 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha$ 等.

2. 三角函数式的化简原则及思想方法

化简三角函数式,在题设要求下,首先应合理利用有关公式,还要明确化简的基本要求: 尽量减少角的数量,尽量减少三角函数的种数,尽量化成同角、同名三角函数,能开方的尽量开方,能求出值的尽量求出值等. 常用的思想方法有: 异次化同次、高次化低次、化弦或化切、化和差为乘积、化乘积为和差、特殊角三角函数值与特殊角的互化等.

3. 证明三角恒等式常用的方法

证明恒等式的过程就是通过转化和消去等式两边的差异来促成统一的过程,证明方法常用如下几种:

(1) 从不等式的一边证得它的另一边,一般从比较复杂的一边开始化简到另一边,其依据是等式的传递性.

(2) 综合法: 由一个已知等式或公式恒等变形得到要证明的等式,其依据是等价转化的思想.

(3) 证明左、右两边都等于同一个式子(或值),其依据是等式的传递性.

(4) 差比法: 证明“左边 - 右边 = 0”或“ $\frac{\text{左边}}{\text{右边}} = 1$ (右边 $\neq 0$)”.

典型题解

dianxingtijie

题型1

求三角函数的值

例1 已知 $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, 求 $\sin \alpha, \tan \alpha$ 的值.

解析 本题主要考查已知一个角的三角函数值,求其余的三角函数值. 先利用平方关系求出 $\sin \alpha$ 的值,再利用商数关系求出 $\tan \alpha$ 的值. 在求 $\sin \alpha$ 的值时注意分类讨论.

答案 $\because \cos \alpha = -\frac{8}{17} < 0$,

$\therefore \alpha$ 为第二或第三象限角.

若 α 为第二象限角,

$$\text{则 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{15}{17}}{-\frac{8}{17}} = -\frac{15}{8};$$

若 α 为第三象限角,

$$\text{则 } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{15}{17}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{15}{8}.$$

点评 题中并未指出 α 所在的象限,则需由 $\cos \alpha$ 推断 α 所在的象限,再分情况解答.

借题发挥1 已知 $\tan \alpha = m$ ($m \neq 0$), 求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$.

例2 已知 $\tan \alpha = 3$, 求下列各式的值.

$$(1) \frac{4\sin \alpha - \cos \alpha}{3\sin \alpha + 5\cos \alpha}; (2) \frac{\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{4\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha};$$

$$(3) \frac{3}{4}\sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\cos^2 \alpha.$$

解析 本题主要考查同角三角函数的基本关系式. (1) 分子、分母同除以 $\cos \alpha$; (2) 分子、分母同除以 $\cos^2 \alpha$; (3) 将分母看成“1”,代换成 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$,然后再将分子分母同除以 $\cos^2 \alpha$ 即可.

答案 (1) 原式分子、分母同除以 $\cos \alpha$ ($\cos \alpha \neq 0$),

$$\text{原式} = \frac{4\tan \alpha - 1}{3\tan \alpha + 5} = \frac{4 \times 3 - 1}{3 \times 3 + 5} = \frac{11}{14}.$$

(2) 原式的分子、分母同除以 $\cos^2 \alpha$ ($\cos^2 \alpha \neq 0$),

$$\text{原式} = \frac{\tan^2 \alpha - 2\tan \alpha - 1}{4 - 3\tan^2 \alpha} = \frac{9 - 2 \times 3 - 1}{4 - 3 \times 3^2} = -\frac{2}{23}.$$

$$(3) \text{原式} = \frac{\frac{3}{4}\sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{3}{4}\tan^2 \alpha + \frac{1}{2}}{\tan^2 \alpha + 1} \\ = \frac{\frac{3}{4} \times 9 + \frac{1}{2}}{9 + 1} = \frac{29}{40}.$$

点评 关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的齐次式就是式子中的每一项都是关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的式子且它们的次数之和相同,设为 n 次,解题时,可将分子、分母同除以 $\cos \alpha$ 的 n 次幂,其式子可化为关于 $\tan \alpha$ 的式子,再解决就简单多了.

借题发挥2 已知 $\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} = -1$, 求下列各式的值:

$$(1) \frac{\sin \alpha - 3\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}; (2) \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 2.$$