工程弹塑性力学

曾祥国 陈华燕 胡益平 主编

四川大学出版社

责任编辑：毕　潜
责任校对：唐　飞
封面设计：墨创文化
责任印制：王　炜

图书在版编目(CIP)数据

工程弹塑性力学 / 曾祥国，陈华燕，胡益平编著.
成都：四川大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-5614-7012-1

Ⅰ.①工… Ⅱ.①曾… ②陈… ③胡… Ⅲ.①工程力学-弹性力学②工程力学-塑性力学 Ⅳ.①TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 162974 号

书名　**工程弹塑性力学**

编　　著　曾祥国　陈华燕　胡益平
出　　版　四川大学出版社
地　　址　成都市一环路南一段 24 号（610065）
发　　行　四川大学出版社
书　　号　ISBN 978　7　5614　7012　1
印　　刷　四川和乐印务有限责任公司
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　　张　15.75
字　　数　423 千字
版　　次　2013 年 7 月第 1 版
印　　次　2013 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　38.00 元

版权所有◆侵权必究

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。
电话：(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请
寄回出版社调换。
◆网址：http://www.scup.cn

前 言

随着科学技术的迅猛发展，机器设备的服役条件越来越苛刻，并朝着高速、高压、高温的极端条件发展。实际工程中，机器零部件在各种复杂载荷作用下常常会进入塑性状态，材料进入塑性状态可分为主动进入（如喷丸处理，使构件表面产生适当的塑性变形以提高材料的疲劳寿命）和被动进入（如镁合金在制造过程中，在材料内部会不可避免地产生缺陷—空洞或微裂纹，构件在外载作用下，在缺陷的附近不可避免地会产生塑性变形），正确计算工程构件或材料的塑性变形的重要意义是不言而喻的。近 20 年来与塑性力学学科相关的高水平杂志在力学界和工程界的影响越来越大，国际上，塑性力学方面的研究非常活跃。在这样的背景下，作为工科力学相关专业的本科生应该掌握弹塑性力学的基本知识，因为对弹塑性力学知识的掌握无论是适应当前工作岗位的要求还是进一步深造，都具有十分重要的意义。

本书是为高等工科院校非力学专业的研究生和力学专业高年级本科生学习弹塑性力学基础知识而编写的一本教学参考书。考虑到力学专业的学生在接触塑性力学之前已经学习了弹性力学课程的实际情况，同时兼顾弹性和塑性的密不可分的联系和本书知识的完整性、系统性，本书有意将弹性部分和塑性部分的内容并列提出加以讨论，适当弱化弹性力学的内容。根据编者长期讲授弹塑性力学课程的体会，这门课具有概念密集、公式繁多、理论性强、初学者难以融会贯通的特点。因此，在本书的编写中，注意组织与选择符合基本要求并与读者对象相适应的学习内容；在内容的阐述中注意讲清基本概念、基本公式和基本解题方法；为了给后续课程打好基础，重视基本公式的推导与控制方程的建立过程。另外，还注意吸取国内外多种弹塑性力学教材的优点，尽量达到“基础扎实、概念准确、方法简明、例题典型”的要求。除了传统的弹塑性力学的内容外，本书增加了基于 VC＋＋面向对象程序设计的方法在塑性力学中的应用，生动再现了螺型位错和刃型位错的运动和冲击载荷作用下应力波的传播，并将相应源程序列于附录中，有兴趣的同学可以在此基础上继续深入研究。

除此之外，考虑到塑性变形的实质是原子尺度原子运动的结果，本书还介绍了塑性变形与失效的分子动力学模拟，并给出了源代码和计算平台的搭建，这部分工作也是作者所在的研究团队在国防基础科研计划重点项目（B1520132013）和国家自然科学联合基金（10776023，金属材料动态响应的多尺度数值模拟研究）支持下取得的部分研究成果，希望这部分内容对于力学及相关专业的本科生、研究生开展毕业论文的工作有所帮助。另外，本书的编写得到了国家重点实验室开放基金（201201，桥梁塑性铰弹塑性地震反应分析的集中

塑性铰模型理论及算法研究）和四川大学立项教材出版基金的大力支持，在此表示感谢。作者对已离开研究小组的赵师平、许书生、李济良、吕大立、刘卫国等表示衷心的谢意，他们与本书的作者在过去三年中的共同研究工作为本书增添了丰富的内容。

由于作者水平有限，缺点在所难免，敬请读者批评予以指正。

编　者

2013 年 7 月

目 录

第 1 章 引 论
1.1 弹塑性力学方法简述
1.2 金属材料的试验结果
1.2.1 单向拉伸试验
1.2.2 影响材料塑性性能的主要因素
1.3 弹塑性简化模型
1.3.1 理想塑性模型
1.3.2 线性强化弹塑性模型
1.3.3 一般加载规律弹塑性模型
1.3.4 幂次强化模型
1.3.5 Ramberg-Osgood 模型
1.4 强化模型
1.5 结构的弹塑性问题
习题 1
附录Ⅰ 塑性变形的位错机制理论
参考文献
第 2 章 应力状态和应变状态
2.1 应力张量
2.1.1 应力张量及其分解
2.1.2 应力不变量
2.2 八面体面上的应力及等效应力
2.2.1 八面体面上的应力
2.2.2 等效应力
2.3 三维空间应力莫尔圆与 Lode 应力参数
2.4 应变张量及其分解
2.4.1 位移与应变的关系
2.4.2 应变张量的分解
2.4.3 应变张量的不变量和等效应变
2.4.4 八面体面上的应变和 Lode 应变参数
2.5 应变率张量及应变分量的增量
2.5.1 应变率张量
2.5.2 应变分量的增量
习题 2

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第 3 章　屈服曲面和加载条件
3.1　初始屈服条件和初始屈服曲面
3.2　屈服曲面
3.3　几个常用的屈服条件
3.3.1　Tresca 屈服准则
3.3.2　Von Mises 屈服准则
3.3.3　两种屈服条件的比较及实验验证
3.4　加载条件（强化条件）及加载、卸载准则
3.4.1　强化条件的含义
3.4.2　加载和卸载准则
3.5　Drucker 公设
3.6　加载面外凸性（Drucker 公设的推论）
习题 3
参考文献
第 4 章　弹塑性本构关系
4.1　概　述
4.2　弹性材料的本构关系
4.2.1　弹性体中能量守恒的表述
4.2.2　应变能密度与材料的本构关系
4.3　线弹性体的本构关系
4.3.1　各向异性材料
4.3.2　具有一个弹性对称面的材料
4.3.3　正交各向异性材料
4.3.4　横观各向同性材料
4.3.5　各向同性材料
4.4　塑性应力应变关系的增量理论（塑性流动理论）
4.5　理想塑性材料的增量型本构关系
4.5.1　与 Von Miscs 屈服条件相关联的流动法则
4.5.2　与 Tresca 条件相关联的流动法则
4.6　Von Mises 加载条件的强化材料增量型本构关系
4.6.1　具有 Von Mises 加载条件的等向强化材料
4.6.2　具有 Von Mises 加载条件的随动强化材料
4.6.3　具有 Von Mises 加载条件的混合强化材料的增量塑性本构关系
4.7　Tresca 加载条件的强化材料增量型本构关系
4.8　全量理论
4.9　岩土力学中的 Coulomb-Mohr 剪破条件和流动法则
4.9.1　岩土塑性力学简介
4.9.2　岩土材料的 Coulomb-Mohr 剪破准则和流动法则
4.9.3　岩土材料的 Drucker-Prager 屈服准则
4.9.4　Drucker-Prager 本构模型
习题 4

附录Ⅱ 岩土材料的 Drucker-Prager 本构模型及其在岩土工程中的应用
参考文献
第 5 章 简单弹塑性问题
5.1 弹塑性力学中的边值问题
5.1.1 全量理论的边值问题
5.1.2 增量理论的边值问题
5.1.3 残余应力和残余变形
5.2 梁的弹塑性弯曲（理想弹塑性材料）
5.2.1 基本关系
5.2.2 弹性阶段
5.2.3 弹塑性阶段
5.2.4 卸载时的残余曲率和残余应力
5.2.5 其他情况
5.3 厚壁圆筒受内压作用
5.3.1 研究对象和基本方程
5.3.2 弹性解
5.3.3 弹塑性解（理想塑性材料）
5.3.4 卸载和残余应力
5.3.5 几何变形对承载能力的影响
5.4 旋转圆盘
5.4.1 等厚度的薄圆盘
5.4.2 弹性解
5.4.3 弹塑性解
5.5 柱体的弹塑性自由扭转
5.5.1 基本方程
5.5.2 弹性扭转和薄膜比拟
5.5.3 全塑性扭转和沙堆比拟
5.5.4 弹塑性扭转和薄膜—玻璃盖比拟
5.5.5 卸载、回弹和残余应力
5.6 薄壁圆筒的弹塑性拉扭组合变形
5.6.1 按增量理论求解
5.6.2 按全量理论求解
5.6.3 算例和比较
参考文献
第 6 章 弹塑性动力学简介
6.1 波动理论基本概念
6.1.1 偏微分方程组的数学基础
6.1.2 细长杆中应力波传播问题的平截面和动态应力应变曲线假定
6.1.3 细长杆中的应力波传播问题的运动方程式
6.1.4 半无限杆的冲击加载过程分析
6.1.5 杆中弹性应力波的传播

6.1.6 简单波及方程式的变换
6.1.7 弹塑性加载波的传播
6.1.8 弹性卸载波的传播
6.1.9 卸载波传播后的残余应变
6.2 弹性波的相互作用
6.2.1 两弹性杆的共轴撞击
6.2.2 两弹性应力波的相互作用
6.2.3 弹性波在固定端和自由端的反射
6.2.4 有限长弹性杆的共轴撞击
6.2.5 弹性波在不同介质界面上的反射和透射
6.3 分离式 Hopkinson 压杆测量工程材料的动态力学性能
6.3.1 Hopkinson 杆发展史简介
6.3.2 分离式 Hopkinson 压杆基本实验原理
6.3.3 弥散修正
6.3.4 Hopkinson 压杆测试镁合金 AZ91 的动态应力—应变曲线
6.4 动态本构关系简介
6.4.1 Bodner-Partom 动态应力应变模型
6.4.2 Johnson-Cook 强化模型
6.4.3 Johnson-Cook 本构模型的数值算例
附录Ⅲ 应力波传播的计算机模拟
附录Ⅳ J-C 模型的程序
附录Ⅴ Hopkinson 压杆实验弥散修正程序
参考文献
第 7 章 金属材料变形与失效的分子动力学模拟
7.1 分子动力学模拟的国内外研究现状
7.2 分子动力学模拟的基本原理
7.2.1 分子动力学简介
7.2.2 势函数
7.2.3 运动方程的数值解法
7.2.4 分子动力学模拟的系综
7.3 Linux 系统及计算平台的搭建
7.3.1 Linux 简介
7.3.2 Lammps 简介
7.4 算例及其分析
7.4.1 ㊥α㊦-Fe 能量最小化的分子动力学模拟
7.4.2 ㊥α㊦-Fe 裂纹扩展的分子动力学模拟
7.4.3 含孔缩纯 Al 失效过程的 MD 模拟
附录Ⅵ 基于 Linux 计算平台的搭建及 Lammps 的安装
参考文献
结束语

第 1 章　引　论

1.1　弹塑性力学方法简述

力学实验表明，变形体材料在逐渐增加的外力作用下，一般会经历变形的发展，最终都要发生不同形式的破坏，材料的变形机制与破坏形式密切相关。在材料受载直至破坏的过程中，存在着一个特定的弹性极限载荷，弹性极限载荷将材料变形分为两个阶段：①当外力小于弹性极限载荷值时，在卸除外力后，变形体将恢复原有的形状和大小，这种变形称为弹性变形，变形体只产生弹性变形的阶段称为弹性阶段；②当外力增加到超过弹性极限载荷值时，变形体内局部应力超过弹性极限，这时即使卸去外力，变形体的变形也不能完全恢复，将产生不可逆的残余变形，这一变形阶段称为塑性阶段。弹性力学和塑性力学是分别研究材料以弹性和塑性变形为主要特征的材料内力（应力）、变形（应变）和位移在材料或构件中的空间分布，以及与之相关的原理、理论和方法的力学行为。大多数材料都同时具有弹性和塑性性质，当外载较小时，材料呈现为弹性；当载荷渐增时，材料将进入塑性变形阶段，即材料的行为呈现为塑性。同一种材料在不同条件下可以主要表现为弹性或塑性。一般情况下，大多数材料往往都同时具有弹性和塑性性质，特别是在塑性变形阶段，变形中既有可恢复的弹性变形，又有不可恢复的塑性变形，在工程中人们又称这种材料为弹塑性材料。

弹性力学的基本出发点是认为材料为理想弹性，基于这一理论的设计观点认为当应力（严格地说是应力的某一函数值）到达一定限值（弹性界限），材料将进入塑性变形阶段，并将失效。结构中如果有一处或一部分材料失效，则认为结构失效。由于一般的结构都处于非均匀受力状态，当高应力区的材料到达弹性界限时，其他的大部分材料仍处于弹性界限之内；而实际上材料在应力超过弹性界限以后并不发生破坏，仍具有一定的继续承受载荷的能力。因此，从破坏强度的角度出发，弹性设计方法不能充分发挥材料的潜力，导致材料的某种浪费。实际上，当结构内的局部材料进入塑性变形阶段时，若继续增加外载荷，结构的内力（应力）分布规律与弹性阶段不再相同，即内力（应力）将重新分布，这种重分布会使内力（应力）分布更趋均匀，降低应力集中，使原来处于低应力区的材料承受更大的应力，从而更好地发挥材料的潜力，提高结构的承载能力。

塑性力学研究变形固体在高于弹性极限载荷作用下，直到破坏失效之前变形体内各单元体应力和应变状态及其演化，进而获得变形体应力应变分布规律，是连续介质力学的一个重要分支。从连续介质力学的角度看，塑性力学的基本方程包括：①应变与位移之间的几何关系；②守恒定律（质量守恒、动量守恒、动量矩守恒和能量守恒）；③描述不同变形体材料的本构方程（或称应力应变关系）。前两类方程与材料的性质无关，是连续介质力学的普适方程和定律。连续介质力学的各个分支（如流体力学、弹性力学、黏弹性力学、黏塑性力学、弹塑性力学、岩土力学等）的主要区别在于材料的本构关系不同，而本构关系由材料的

固有性质决定，反映着材料的个性，也是塑性力学研究的重点内容之一。

近年来由于塑性力学研究领域的不断发展，要准确阐明塑性力学的研究状况和任务已是一个非常困难的课题，一般来说，传统的塑性力学主要研究以下两方面的问题：

（1）基于内变量的热力学理论基础建立现象学的弹塑性本构模型，利用高级材料试验机获得复杂载荷作用下的材料性能试验结果，根据试验结果，采用数学方法确定弹塑性本构关系的材料常数，从而建立既能较好地符合实验结果，又便于计算的弹塑性本构模型。

（2）由于材料在塑性变形过程的复杂性，求解满足塑性力学的边值问题的解析解是非常困难的，因此，寻求数值计算方法是求解各种塑性力学边值问题的主要任务。这些问题大致可分为两类：一类是出于机械加工工艺的需要，要求材料发生永久变形，以得到一定形状的零件，如汽车覆盖件的金属成型、钢铁生产中的拉拔、石油管道生产中采用的卷板成型工艺等。这类问题的塑性变形较大，需要研究怎样的加载方式最为有利，能最好地发挥材料塑性变形的特性。另一类问题是机械或结构等，在受载过程中，由于应力分布的不均匀性，虽然局部区域的应力已超过弹性界限，产生了一定的塑性变形，但整个结构仍具有承载能力，如预应力钢筋混泥土中钢筋在进入塑性变形后的承载能力。这类问题需要探讨如何充分利用材料的潜力，以求最大限度提高结构的承载能力。

学习塑性力学除了需要有一定的数学、物理及力学基础外，还需要有金属材料、物理学的相关知识，这样才能把宏观与微观的研究结合起来。而塑性力学又是金属压力加工、结构极限设计、高温蠕变、爆炸力学、断裂力学以及弹塑性有限元等课程必不可少的基础。

塑性理论的发展历史可追溯到 1864 年，法国工程师屈雷斯加（Tresca H）首先提出了最大剪应力屈服准则，即屈雷斯加屈服准则。1870 年，圣维南（Saint-Venant B）首次利用屈雷斯加屈服准则求解了薄壁圆管受弹塑性扭转和弯曲时的应力分布，随后利用平面应变方程解决了其弹塑性变形的问题。同年，列维（Levy M）基于圣维南的观点提出了三维问题的方程式和平面问题方程式的线性化方法。由于当时工业发展水平对塑性理论的需求相对较低和数学工具的制约，在一段时期内，塑性理论发展相当缓慢，直到 20 世纪初才进入了一个蓬勃发展的时期。1913 年，德国学者米塞斯（Von Mises）从纯数学的角度提出了另一新的屈服准则——米塞斯屈服准则。1923 年，汉基（Hencky H）和普朗特（Prandtl L）论述了平面塑性变形中滑移线的几何性质。1930 年，劳埃斯（Reuss A）根据普朗特的观点提出了考虑塑性应变过程的增量应力应变关系式，这是一个标志性的成果，从此塑性理论的基本理论已经奠定。到 20 世纪 40 年代以后，由于民用工业、汽车工业、航空工业和军事工业提出了很多尖锐的塑性力学问题急需解决，塑性理论在很多发达工业国家中相继发展，利用塑性理论求解塑性成型问题的各种方法陆续问世，塑性成型力学逐渐形成并不断得到充实。值得指出的是，第二次世界大战以来，由于生产实际提出的种种新问题，要求进一步挖掘材料潜力，因而推动了极限设计的发展。特别是近年来计算机被广泛使用，为已建立 100 多年的、但难以实施的增量理论在实践方面的应用开辟了新的途径。而弹塑性有限元的迅速发展又使复杂的边值问题获得了较为满意的解决。

随着现代科学技术的不断发展，大量的试验表明，裂纹的萌生、扩展与材料在局部区域（纳米尺度）的变形机理密切相关。裂纹萌生和扩展规律是一个涉及材料、力学等学科的综合性研究领域。由于裂纹的萌生和扩展实际上是在原子或分子尺度上进行的，新的研究方法和理论都涉及裂纹萌生和扩展的微观特性。用连续介质力学描述这类处于原子、分子状态的固体或液体的动力学特性显然不合适，宏观连续介质力学的理论和传统的实验手段也无法适

应这种微观领域的研究。这就需要应用近代物理、化学和材料学等多学科的研究成果，在原子或分子尺度上研究裂纹萌生和扩展的微观特性，并建立起微观特性与宏观行为的联系，解释裂纹萌生和扩展的内在本质规律。由于分子动力学模拟可以直接模拟裂纹萌生和扩展的过程及其局部塑性变形机理，所以很多国家都开展了此项研究，其中美国和日本的研究工作处于世界领先水平。应该指出，塑性力学目前在继承传统的研究方法解决大量工程实际问题的同时，仍然是一门需要继续深入研究和探索的学科。

1.2　金属材料的试验结果

1.2.1　单向拉伸试验

1. 应力－应变曲线

单向拉伸实验是材料力学性能实验中最基本、最重要的实验。为了使实验结果可以便于相互比较，必须对试件、试验机及实验方法做出明确具体的规定，我国国标 GB228－87“金属拉伸试验方法”中规定对金属拉力试件通常采用圆形和板状两种试件。对于如图 1－1 所示的圆截面试件，规定$\frac{l_0}{d_0}$等于 10 或 5，式中 l_0 表示试件的标距，d_0表示试件直径。

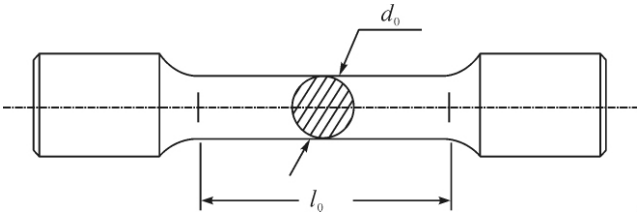


图 1－1　拉伸试件

通过材料力学试验，我们已经得到了具有代表性的软钢拉伸时的应力－应变曲线，如图 1－2 所示。它反映了常温、静载下，材料在受力过程中应力－应变关系的全貌，显示了材料固有的力学性能。

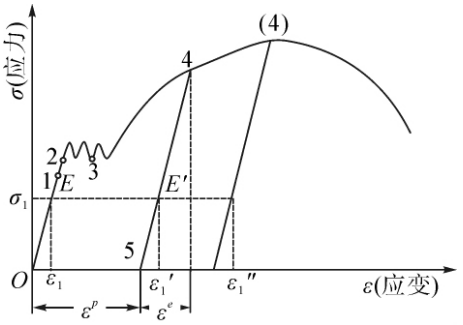


图 1－2　单向拉伸状态下的应力—应变曲线

（1）初始弹性阶段。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

在拉伸的初始阶段，应力和应变成正比，O1 为直线。1 点所对应的应力为比例极限，以 σ_p表示。超过比例极限后，应力－应变之间不再保持线性关系。但从 1 点到 2 点，变形仍是弹性的，即卸除载荷后，变形将完全恢复。这是弹性的基本特征。2 点所对应的应力为弹性极限，以 σ_e表示。由于 1、2 两点非常接近，因此工程上对它们一般不严加区分。通常认为，应力低于弹性极限时，应力与应变成正比，材料服从虎克定律。O1 称为初始弹性阶段。

（2）屈服（流动）阶段。

应力超过 2 点后，将出现一个应力不变而应变显著增加的屈服（流动）阶段。一般金属材料根据其塑性变形性能的不同可分为两类：一类有明显的屈服阶段，如低碳钢、铸钢、某些合金钢等，它们的流动阶段是较长的，其中有的材料应变甚至可达弹性应变的 10～15 倍。通常称初始屈服时的应力为屈服极限，以 σ_s表示。退火软钢及某些铝合金有上、下屈服点。因上屈服点一般不稳定，对试验条件很敏感，故采用下屈服点所对应的应力作为 σ_s，如图 1－2中的 3 点。另一类没有明显的屈服阶段，如中碳钢、某些高强度合金钢及某些有色金属等，则规定与产生 0.2%的残余应变所对应的应力作为名义屈服极限，以 $\sigma_{0.2}$表示。

（3）强化阶段和加载、卸载规律。

经过屈服阶段，材料又恢复了抵抗变形的能力，必须增加载荷才能继续产生变形，这种现象称为材料的强化（或硬化）。如应力到达 4 点后卸除载荷，应力－应变关系将不按加载时的图线退回 O 点，而沿一条与 O1 大致平行的 45°线变化，直到应力降为零。也就是说，卸载按弹性规律，且弹性模量 $E'=E$，如图 1－2 所示。这时留下一段不能恢复的变形，这部分变形称为塑性变形。而变形的不可恢复性正是塑性的基本特征，与弹性阶段相比，材料要产生相同的应变增量，所需要的应力增量要小得多。而且随着变形的增加而逐渐减小，即所谓渐减强化，在 $\sigma-\varepsilon$ 图上表现为一段斜率渐减的曲线，其斜率 E_t叫作切线模量。综上所述，弹性和塑性的主要差别在于卸载后是否存在不可恢复的永久变形，而不在于它的应力－应变关系是否线性。

由图 1－2 可见，4 点的应变由弹性应变 ε^e和塑性应变 ε^p两部分组成，即

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{1.1}$$

在产生了一定的塑性应变以后，如果减小载荷，则应力－应变关系将不按原有的曲线退回原点，而是沿着一条与初始弹性阶段相平行的直线变化，斜率为 E，当载荷完全卸掉之后，应变的弹性部分为

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \tag{1.2}$$

结合式（1.1）和（1.2）得

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \tag{1.3}$$

在加载和卸载过程中，应力和应变服从不同的规律，是材料在塑性阶段的一个重要特点。判别材料是加载还是卸载的准则，称为加载、卸载准则，在简单应力状态下，该准则写成

$$\begin{cases} \sigma d\sigma \geqslant 0，\text{加载} \\ \sigma d\sigma < 0，\text{卸载} \end{cases} \tag{1.4}$$

该表达式也适用于 $\sigma<0$ 的压缩情形，有了这一准则，我们可以把简单拉伸在塑性阶段的应力－应变关系归纳为

$$\begin{cases} d\sigma = E_t d\varepsilon, & \sigma d\sigma \geqslant 0 \\ d\sigma = E d\varepsilon, & \sigma d\sigma < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

注意，在塑性阶段只能写出增量形式的应力－应变关系。

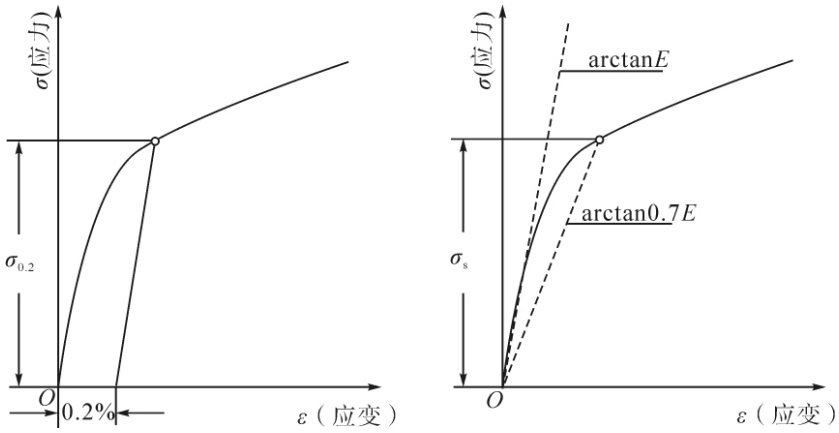
如果从图 1－2 中的 5 点开始重新加载（略去滞回效应），应力－应变关系基本上按 54 线变化。当应力超过 4，才会产生新的塑性变形，所以 4 点是从弹性变形再次进入塑性屈服的分界点，因此与它对应的应力称为后继屈服应力，有时也称为加载应力。试验指出，经过塑性变形后，加载应力比初始屈服应力高，其提高程度与塑性变形的历史有关，或者说与塑性阶段的加载历史有关。因此后继屈服应力可以写成下述函数形式：

$$\sigma = H(\varepsilon^p) \quad 或 \quad \varphi(\sigma, h_\alpha) = 0 \tag{1.6}$$

式中，h_α是记录材料的塑性加载历史的参数，φ 被称为加载函数。

但是后继屈服应力的提高是有限的，如图 1－2 中曲线的最高点（4）所对应的应力 σ_b，称为材料的强度极限，它是材料所能承受的最大应力。这点以后，横截面面积的收缩沿轴向将出现不均匀的现象，工程上称为颈缩。

对于没有明显的屈服阶段的材料，工程上通常采用产生 0.2%的塑性应变对应的应力作为名义屈服应力，并以 $\sigma_{0.2}$表示，如图 1－3（a）所示。或者将拉伸曲线上割线模量为 0.7E 处的应力定义为名义屈服应力，如图 1－3（b）所示。后一种定义方法比前一种更简单，对于一般钢材，两种方法确定的名义屈服应力近似相等。



（a）　　（b）

图 1－3　定义名义屈服应力的示意

从上述试验结果可见，塑性变形阶段的最基本特征是加载和卸载时的应力－应变规律不同，从而使塑性变形阶段具有下列特性：

①在弹性变形阶段，加载和卸载服从同一个应力－应变规律，因此卸载后无残余变形。在塑性变形阶段，由于加载和卸载规律的不同，卸载后就必然存在着残余变形。

②由于加载和卸载规律的不同，引起塑性阶段应力与应变的多值关系。在弹性阶段，若已知应力，就可唯一地确定相应的应变；而在塑性阶段则不存在这种一一对应的关系。由图 1－2 可见，对应于应力 σ_1 的应变，可以是 ε_1 或 ε'_1，也可以是 ε''_1，它与加载历史有关。顺便指出，尽管应力和应变之间不再存在单值关系，但对于某一瞬时，应力增量和应变增量之间的关系仍是确定的。

2. **真应力－应变关系**

通常在材料试验中，应力 σ 和应变 ε 均按试件的原始尺寸计算，这样得到的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线称为名义应力－应变曲线，如图 1－2 所示。实际上，在变形过程中，试件的尺寸不断地在变化，因此，$\sigma-\varepsilon$ 曲线不能真实地反映瞬时的应力－应变关系。在拉伸过程中由于试样任一瞬时的横截面面积 A 和标距 $l(l=l_0+\Delta l)$ 都在变化，而名义应力 σ 和名义应变 ε 是按初始面积 A_0 和标距 l_0 计算的，因此任一瞬时的真实应力 σ_t 和真实应变 ε_t 与相应的 σ 和 ε 之间都存在着差异，进入塑性以后这种差异逐渐增大。在均匀变形阶段，真实应力 σ_t 的定义为

$$\sigma_t = \frac{P}{A} \tag{1.7}$$

式中，P 为拉伸试件受到的轴向拉力。

根据塑性变形体积 V 不变的假设（$V=A_0 l_0=Al$），有

$$\sigma_t = \frac{P}{A} = \frac{Pl}{A_0 l_0} = \frac{\sigma l}{l_0} = \sigma(1+\varepsilon) \tag{1.8}$$

真实应变 ε_t（也叫对数应变）的定义为

$$\varepsilon_t = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = ln(1+\varepsilon) \tag{1.9}$$

将式（1.9）展开得

$$\varepsilon_t = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \cdots \tag{1.10}$$

这说明在均匀变形的范围内，真实应力恒大于名义应力，而真实应变恒小于名义应变。真实应变和工程应变在更大变形范围内的比较如图 1－4 所示，在小变形阶段，ε_t 和 ε 几乎相等，随着应变的增加，两者差别越来越大。当塑性变形较大时，两者才有明显差异。此时应以真应力－应变图来表示应力－应变关系。

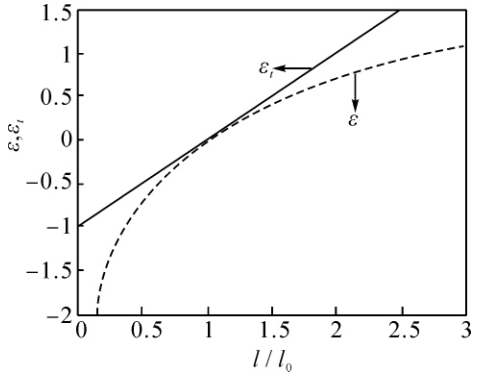


图 1－4　工程应变（ε）与真实应变（ε_t）的比较

实验表明，大多数金属材料的真应力－应变关系可近似用 Hollomon 公式（即幂强化关系）描述如下：

$$\sigma_t = K\varepsilon_t^n \tag{1.11}$$

式中，n 为形变强化指数，是表征材料形变强化能力的一个指标，也是弹塑性疲劳与断裂力学、塑性力学分析计算的重要材料参数；K 为另一个参数。将 Hollomon 公式两端取对数后得

$$ln\sigma_t = lnK + nln\varepsilon_t \tag{1.12}$$

式（1.12）说明幂强化关系在双对数坐标下为一直线，其斜率即为材料的形变强化指数，用线性回归对均匀变形阶段的一组数据进行直线拟合，即可求得 n 值。

在外力作用下，拉伸试件将逐渐由均匀变形向颈缩变形转变，直至最后断裂。试样出现均匀变形阶段的前提是材料具有足够的形变强化能力。在最大载荷处有

$$dP = Ad\sigma_t + \sigma_t dA = 0 \tag{1.13}$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}A}{A}=\frac{\mathrm{d}\sigma_t}{\sigma_t} \tag{1.14}$$

另外按变形过程中体积不变的假设可以写出

$$dV = Adl + ldA = 0, \quad -\frac{dA}{A} = \frac{dl}{l} \tag{1.15}$$

结合式（1.14）和（1.15），有

$$\sigma_t=\frac{\mathrm{d}\sigma_t}{\mathrm{d}\varepsilon_t} \tag{1.16}$$

Hollomon 公式求导以后的关系式为

$$\frac{d\sigma_t}{d\varepsilon_t} = nK\varepsilon_t^{n-1} \tag{1.17}$$

代入式（1.16）可得 $\varepsilon_t=n$，这个关系说明对于真应力－应变关系符合 Hollomon 关系的材料，其最大均匀变形在数值上等于形变强化指数。

在颈缩阶段，虽然载荷下降了，但颈缩区的材料仍在继续强化，换言之，真实应力仍不断提高，变形才有可能继续增加。如图 1－5 所示，颈缩区的几何形状类似于一个环形的缺口，颈缩区中心材料的横向收缩受到周围材料的约束，从而产生三向拉应力状态，使得应力提高。颈缩区的应力可采用 Bridgman 公式进行修正：

$$\sigma_t = \frac{\dfrac{P}{\pi a^2}}{(1+\dfrac{2R}{a})ln(1+\dfrac{2R}{a})} \tag{1.18}$$

式中，P 为拉伸试件受到的轴向拉力，a 为颈缩区最小截面的半径，R 为颈缩区轮廓线的曲率半径。

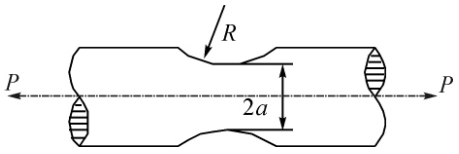


图 1－5　颈缩区示意

3. **压缩试验**

对于一般金属材料，在小变形阶段，拉伸与压缩试验的曲线基本重合（压缩曲线略高于拉伸曲线），但在大变形阶段则有显著差别。一般在应变量不超过 1%时可认为两者一致。但精确的试验发现，某些高强度合金钢的屈服极限 σ_s 和弹性模量 E 在拉伸和压缩的情况下也有不同。因此对于一般金属材料，在变形不大的情况下，用拉伸试验代替压缩试验进行塑性分析是偏于安全的。但对拉伸与压缩曲线有明显差别的材料，如铸铁、混凝土等，则需另

作专门研究。

4. **反向加载的包辛格**（Bauschinger）**效应**

如图 1－6 所示，对于韧性材料，当材料从自然状态分别作拉伸和压缩加载时，在应变不太大的情况下，材料呈现出拉压相同的特性（$\sigma_s^{1\prime}=\sigma_s^1$），在强化后卸载，再进行反向加载（拉伸改为压缩）至屈服，则可发现新的压缩屈服应力较未强化前低，即 $\sigma_s^{2\prime}<\sigma_s^{1\prime}=\sigma_s^1$（各点的屈服应力均指绝对值）。这种材料在强化后引起屈服应力的提高而导致反向屈服应力降低的现象称为包辛格效应。但并非所有材料都如此，有些材料没有包辛格效应，当由于拉伸而提高了屈服应力时，反向加载后，压缩的屈服应力也得到了同样的提高（$\sigma_s^{2\prime\prime}=\sigma_s^2$）。这种强化特性称为各向同性强化。

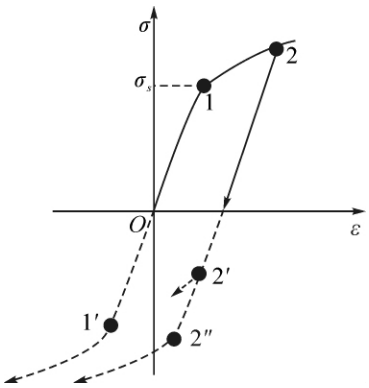


图 1－6　包辛格效应

1.2.2　影响材料塑性性能的主要因素

1. **变形速率**

如果在试验中将加载速率提高几个量级，则材料的屈服应力也会有相应的提高。但材料的塑性变形能力有所下降，对于一般加载速率的情形，可以不考虑应变率效应。但对于冲击碰撞或爆炸加载条件下的材料性能的改变，就需要考虑应变率效应对材料应力－应变关系的影响。

2. **温度**

温度的升高将使材料的屈服应力降低，而塑性变形的能力提高，在高温条件下材料同时会产生蠕变、应力松弛等具有黏性效应的现象，当应力不变时，应变将随时间不断地增长。通常塑性力学不考虑这种与时间相关的黏性变形。

3. **静水压力**

一般情况下，金属材料的塑性变形与静水压力无关。静水压力与材料体积改变近似地服从线性弹性规律。若卸去压力，体积变化可以恢复，没有残余的体积变形，因而可以认为各向均压时体积变化是弹性的。通过对各种钢材的轴向拉伸应力－应变曲线及轴向拉伸与静水压力同时作用下的应力－应变曲线的实验比较，发现各向均压对初始屈服的影响很小，可以忽略不计。因此认为静水压力与塑性变形无关。但对于铸造金属，矿物、岩石及土壤等材料，则静水压力的影响较为显著，不能忽略。

1.3　弹塑性简化模型

在生产实际中应用的金属材料种类很多，它们的性质各有差异。为便于研究，在 1.2 节所述试验观察的基础上，忽略一些次要因素，根据材料的主要性质做出某些假设，将应力－应变关系抽象为理想的简化模型，进一步建立基本理论。但由于材料在塑性状态下，应力－应变关系是非线性的，问题很复杂，因此，即使建立了多种理想的简化模型，也不能解决材料表现出的包罗万象的本构行为。要解决具体问题，还需要根据不同的材料和应用范围进一步建立既符合实际又便于应用的本构模型。

1.3.1　理想塑性模型

对于低碳钢或硬化率较低的材料，在应变不太大的情况下，可以忽略强化效应而简化为如图 1－7 所示的情形。假设拉伸和压缩时屈服应力的绝对值相同，则应力从零作单调变化（不卸载）时，应力应变关系可写为

$$\begin{cases} \varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}, & |\sigma|<\sigma_s \\ \varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}+\lambda\operatorname{sign}(\sigma), & |\sigma|=\sigma_s \end{cases} \tag{1.19}$$

式中，λ 是一个待定的非负的参数；sign 为符号函数，可取为 ±1。

如果用应变表示应力，则有

$$\begin{cases} \sigma=E\varepsilon, & |\varepsilon|\leqslant\varepsilon_s \\ \sigma=\sigma_s\operatorname{sign}(\varepsilon_s), & |\varepsilon|>\varepsilon_s \end{cases} \tag{1.20}$$

式中，$\varepsilon_s=\dfrac{\sigma_s}{E}$。

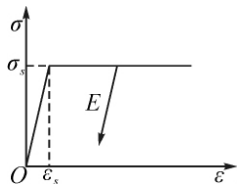


图 1－7　理想塑性模型

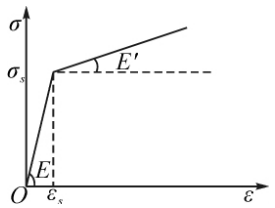


图 1－8　线性强化弹塑性模型

如果总应变较大，则由于弹性应变远小于塑性应变而常常可被忽略。这样的本构模型被称为刚塑性模型。采用这种模型可以使许多问题得到很大简化。

1.3.2　线性强化弹塑性模型

当材料的强化率较高且在一定范围内变化不大时，可以用两条直线来表示原有的正向拉伸或反向压缩实验曲线（如图 1－8 所示）。如果假定拉伸和压缩时屈服应力的绝对值和强化弹塑性模量 E' 相同，则当不卸载时，其本构关系为

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com