高等数学

（上册）

林育青 余壁芬 主编

湖北科学技术出版社

高 等 数 学

（上　册）

主　编　林育青　余壁芬
副主编　黄达光　洪伟龙　曾瑞海
编　委　（以姓氏笔画为序）
陈岱婉　余壁芬　林育青　洪伟龙
黄达光　曹　蓉　童细心　曾瑞海

湖北科学技术出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教育部关于“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革研究计划”的通知精神，根据高等职业技术教育中理科、工科、人文、经管类学生的知识结构、专业特点及数学的基本需求编写而成。全书分上、下两册，上册包括一元函数微积分、常微分方程、线性代数、概率与统计等内容。本书对传统高等数学的内容作了大胆的取舍。本书编排合理，突出基础性、应用性和发展性，文字叙述直观形象、通俗易懂，同时也保留数学的特点。

本书可作为高等师范专科学校各专业、高等职业技术学院理科类、工科类、人文、经管类等高等数学的教材，也可作为其他有关专业的教材或参考书。

前　言

进入21世纪，数学的作用日见凸现。一方面，高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学；另一方面，随着计算机科学的迅猛发展，作为“皇冠”的数学已越来越广泛地渗透到各门学科、各个专业以及人们的日常生活之中。作为大学教育的“高等数学”不仅为高级工程技术人才所必需，而且已成为各类高级人才所必需的一种基本素养，成为社会上衡量各类高级人才的一个标准。

本书是根据国家教育部关于“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革研究计划”的通知精神，遵循“以应用为主，必须和可发展相结合”的原则，吸收了编者在教学中积累的一些有益经验编写而成。

全书对传统的“高等数学”内容作了大胆的增减处理，并作了重新编排。在内容的编排上，一方面要确保数学的科学性、严谨性，另一方面要考虑到高等职业技术教育的特点，还要注意到方便读者在相邻课程和后续课程中的应用，因此，对于基本概念的叙述力求深入浅出，清晰准确；对于基本理论的论证力求通俗易懂，推导严谨；对于基本方法的介绍从历史背景、具体形象入手，力求阐明思想方法的本质和应用技巧；对于例题的选取力求典型、基础，既具有启发性，又具有广泛应用性。

为了适应不同学校不同专业的学生，本书在习题的选择上也做了不少努力。全书配有足够数量的各种习题，每章按节设置了满足基本要求的习题，各章后面还配置了具有综合性的复习题，这样便于教师从中选出合适的题目供教学使用，也便于读者自己选用合适的习题以进行自我检查。

本书由林育青副教授、余壁芬高级讲师主编，黄达光、洪伟龙、曾瑞海副主编，全书由林育青统稿和定稿。第一、六章由余壁芬、黄达光编写，第二、三章由余壁芬、洪伟龙编写，第四、五章由余壁芬、曾瑞海编写，第七章由余壁芬、陈岱婉编写，第八章由林育青、曹蓉编写，第九章由林育青、童细心编写，第十章由洪伟龙编写，第十一章由黄达光编写，第十二、十三章由曾瑞海编写，全书由林育青修改，童细心、曹蓉参与校对和编排。

本书在编写过程中，参考了相关教材和著作，并且从中摘取了一些例题和习题等，在此统表谢意！

在编写与出版过程中，得到汕头职业技术学院唐晓鸣院长、张加炳副院长、赵一生处长、杜联穆副教授以及王茂春主任、翁泽群主任、林洪彬主任、庄文耀主任等领导的大力支持，得到同行专家学者的关心，如郑长和副教授、林旭群副教授、扬秋子高级讲师和陈彦讲师等对本书提出了宝贵的意见，借此机会向他们表示衷心感谢。此外还要感谢本书的封面设计者何汉阳老师。

编写同时适应于各类学校不同专业的高等数学教材是一个新的探索，虽然我们做了很多努力，但由于水平所限，不妥或谬误之处在所难免，恳请同行专家、读者提出宝贵意见。

编　者

2005年5月30日

第二版前言

本书出版后，在使用过程中，我们收到了读者、任课教师和学生对本书提出的许多宝贵意见。特别是对印刷与编写的一些错漏，进行了指正。借此再版之时，向关心和支持我们工作的广大师生和读者表示深切谢意。

本书是根据国家教育部关于“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革研究计划”的通知精神，遵循“以应用为主，必须和可发展相结合”的原则，吸收了编者在教学中积累的一些有益经验编写而成。

全书对传统的“高等数学”内容作了大胆的增减处理，并作了重新编排。在内容的编排上，一方面要确保数学的科学性、严谨性，另一方面要考虑到高等职业技术教育的特点，还要注意到方便读者在相邻课程和后续课程中的应用，因此，对于基本概念的叙述力求深入浅出，清晰准确；对于基本理论的论证力求通俗易懂，推导严谨；对于基本方法的介绍从历史背景、具体形象入手，力求阐明思想方法的本质和应用技巧；对于例题的选取力求典型、基础，既具有启发性，又具有广泛应用性。

为了适应不同学校不同专业的学生，本书在习题的选择上做了不少努力。全书配有足够数量的各种习题，每章按节设置了满足基本要求的习题，各章后面还配置了具有综合性的复习题，这样便于教师从中选出合适的题目供教学使用，也便于读者自己选用合适的习题以进行自我检查。

此次修订，我们特别组织了一些使用本书的任课教师对错漏进行了仔细的更正。在内容和体例原则上不作大的变动，并保持本书通俗易懂的特点，便于高职院校选用。

编写同时适应于各类学校不同专业的高等数学教材是一个新的探索，虽然我们做了很多努力，但限于编者的水平，不妥或谬误之处在所难免，欢迎同行专家、广大师生、读者批评指正。

编　者

2011年3月30日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

（上　册）

1　函数、极限与连续 …… 1

1.1　函数 …… 1

1.1.1　集合　常量与变量 …… 1

1.1.2　函数的概念 …… 3

1.1.3　建立函数关系举例 …… 6

1.1.4　常用经济函数 …… 7

1.1.5　函数的基本性态 …… 7

1.1.6　反函数、复合函数 …… 8

1.1.7　初等函数 …… 10

习题 1.1 …… 13

1.2　极限的概念 …… 15

1.2.1　数列的极限 …… 15

1.2.2　函数的极限 …… 21

习题 1.2 …… 24

1.3　极限运算 …… 25

1.3.1　无穷小量 …… 25

1.3.2　无穷大量 …… 27

1.3.3　极限的运算法则 …… 28

习题 1.3 …… 31

1.4　极限存在准则　两个重要极限 …… 31

1.4.1　极限存在准则 …… 31

1.4.2　两个重要极限 …… 32

习题 1.4 …… 35

1.5　无穷小量的比较 …… 35

习题 1.5 …… 37

1.6　函数的连续性 …… 37

1.6.1　连续函数的概念 …… 37

1.6.2　连续函数的基本性质 …… 39

1.6.3　闭区间上连续函数的性质 …… 41

1.6.4　函数的间断点及其分类 …… 42

习题 1.6 …… 43

复习题 …… 44

2　导数与微分 …… 47
2.1　导数的概念 …… 47
2.1.1　瞬时速度　切线斜率 …… 47
2.1.2　导数的定义 …… 48
2.1.3　可导与连续的关系 …… 50
习题 2.1 …… 51
2.2　求导公式与求导法则 …… 52
2.2.1　几个基本初等函数的导数公式 …… 52
2.2.2　导数的四则运算法则 …… 53
2.2.3　反函数的导数 …… 55
2.2.4　复合函数的导数 …… 56
习题 2.2 …… 58
2.3　高阶导数 …… 59
习题 2.3 …… 61
2.4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 62
2.4.1　隐函数的导数 …… 62
2.4.2　参数方程所确定的函数的导数 …… 63
习题 2.4 …… 65
2.5　微分及其在近似计算中的应用 …… 65
2.5.1　微分的概念 …… 65
2.5.2　基本初等函数的微分公式与运算法则 …… 67
2.5.3　微分在近似计算中的应用 …… 68
习题 2.5 …… 70
2.6　导数在经济分析中的应用 …… 71
2.6.1　边际概念 …… 71
2.6.2　边际成本 …… 71
2.6.3　边际收益 …… 72
习题 2.6 …… 73
复习题 …… 73
3　中值定理与导数的应用 …… 76
3.1　中值定理 …… 76
习题 3.1 …… 80
3.2　罗比达法则 …… 81
3.2.1　$\frac{0}{0}$ 型未定式 …… 81
3.2.2　$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 …… 82
3.2.3　其他类型的未定式 …… 83
习题 3.2 …… 85

3.3 函数的单调性与极值 …… 85
3.3.1 函数增减性的判别法 …… 85
3.3.2 函数的极值与判别法 …… 87
习题 3.3 …… 90
3.4 函数的最大值和最小值 …… 91
习题 3.4 …… 92
3.5 曲线的凹向及拐点 函数作图 …… 93
3.5.1 曲线的凹向与拐点 …… 93
3.5.2 曲线的渐近线 …… 94
3.5.3 函数作图 …… 95
习题 3.5 …… 97
复习题 …… 97
4 不定积分 …… 99
4.1 不定积分的概念与性质 …… 99
4.1.1 微分法的逆问题 …… 99
4.1.2 原函数与不定积分 …… 99
4.1.3 不定积分的性质 …… 101
4.1.4 基本积分公式 …… 102
习题 4.1 …… 105
4.2 换元积分法 …… 105
4.2.1 第一换元法 …… 106
4.2.2 第二换元法 …… 108
习题 4.2 …… 111
4.3 分部积分法 …… 112
习题 4.3 …… 114
4.4 积分表的使用 …… 114
4.4.1 可以直接从表中查到结果 …… 115
4.4.2 先进行变量代换,然后再查表求得积分 …… 115
4.4.3 利用递推公式在积分表中查到所求积分 …… 115
习题 4.4 …… 116
4.5 附积分表 …… 117
复习题 …… 125
5 定积分 …… 127
5.1 定积分的概念 …… 127
5.1.1 引例 …… 127
5.1.2 定积分的定义 …… 128
习题 5.1 …… 130
5.2 定积分的性质 …… 130
习题 5.2 …… 133

5.3 定积分与不定积分的联系 …… 133
习题 5.3 …… 135
5.4 定积分的计算 …… 136
5.4.1 定积分的换元积分法 …… 136
5.4.2 定积分的分部积分法 …… 138
习题 5.4 …… 139
5.5 广义积分 …… 140
5.5.1 无穷区间的广义积分 …… 140
5.5.2 无界函数的广义积分 …… 141
习题 5.5 …… 143
5.6 定积分的应用 …… 143
5.6.1 平面图形的面积 …… 144
5.6.2 旋转体的体积 …… 145
5.6.3 平面曲线的弧长 …… 146
5.6.4 变力所做的功 …… 146
5.6.5 液体压力 …… 147
5.6.6 平均值 …… 148
5.6.7 定积分在经济问题中的应用 …… 149
习题 5.6 …… 151
复习题 …… 152
6 微分方程 …… 154
6.1 微分方程的基本概念 …… 154
习题 6.1 …… 157
6.2 一阶微分方程 …… 157
6.2.1 可分离变量的一阶微分方程 …… 158
6.2.2 齐次微分方程 …… 159
6.2.3 一阶线性微分方程 …… 160
6.2.4 伯努里方程 …… 161
习题 6.2 …… 162
6.3 二阶微分方程 …… 163
6.3.1 二阶线性微分方程 …… 163
6.3.2 二阶常系数线性微分方程 …… 165
6.3.3 $y''=f(x,y')$ …… 170
6.3.4 $y''=f(y,y')$ …… 171
习题 6.3 …… 171
复习题 …… 173
7 线性代数 …… 174
7.1 行列式 …… 174
7.1.1 行列式定义、性质及计算 …… 174

7.1.2 克拉默法则 …… 179
习题 7.1 …… 180
7.2 矩阵 …… 181
7.2.1 矩阵的概念 …… 182
7.2.2 矩阵的运算 …… 183
7.2.3 逆矩阵 …… 187
7.2.4 矩阵的初等变换、初等矩阵 …… 189
7.2.5 矩阵的秩 …… 191
习题 7.2 …… 193
7.3 n 维向量和线性方程组 …… 194
7.3.1 n 维向量的概念 …… 195
7.3.2 向量组的线性相关性 …… 196
7.3.3 极大线性无关组与向量组的秩 …… 200
7.3.4 齐次线性方程组 …… 203
7.3.5 非齐次线性方程组 …… 206
习题 7.3 …… 209
7.4 特征值与特征向量 …… 210
7.4.1 特征值与特征向量 …… 210
7.4.2 矩阵的相似与矩阵的对角化 …… 213
7.4.3 向量的内积 …… 215
7.4.4 实对称矩阵的相似对角矩阵 …… 218
习题 7.4 …… 220
7.5 二次型 …… 220
7.5.1 二次型及其矩阵 …… 220
7.5.2 用正交变换化二次型为标准形 …… 221
7.5.3 正定二次型 …… 223
习题 7.5 …… 224
复习题 …… 224
8 概率与统计 …… 227
8.1 事件与概率 …… 227
8.1.1 随机事件及其概率 …… 227
8.1.2 有限等可能概型 —— 古典概型 …… 231
8.1.3 全概率公式 …… 233
8.1.4 事件的独立性及伯努利概型 …… 236
习题 8.1 …… 239
8.2 随机变量及其分布 …… 241
8.2.1 随机变量及其分布函数 …… 241
8.2.2 离散型随机变量与连续型随机变量 …… 243
习题 8.2 …… 248

8.3 随机变量的数字特征 …… 249
8.3.1 随机变量的数学期望 …… 249
8.3.2 随机变量的方差 …… 252
习题 8.3 …… 255
8.4 统计估计 …… 256
8.4.1 数理统计的基本概念 …… 256
8.4.2 参数的点估计 …… 260
8.4.3 参数的区间估计 …… 264
习题 8.4 …… 266
8.5 假设检验 …… 267
8.5.1 假设检验的基本思想 …… 267
8.5.2 均值的假设检验 …… 269
8.5.3 方差的假设检验 …… 271
习题 8.5 …… 271
8.6 附表 …… 273
附表一 二项分布表(累积概率) …… 273
附表二 泊松分布表(单项概率) …… 279
附表三 泊松分布表(累积概率) …… 282
附表四 正态分布函数 $N(0,1)$ 的数值表 …… 284
附表五 t 分布表 …… 286
附表六 χ^2 分布表 …… 288
复习题 …… 290

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1　函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 极限方法则是研究变量的一种基本方法，本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

1.1　函　　数

1.1.1　集合　常量与变量

1.1.1.1　集合

集合是数学中的一个基本概念，我们通过例子说明这个概念. 比方说，一个书柜中的书构成一个集合，一个教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等. 一般地，所谓**集合**(或简称**集**)是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 凡事物 a 是集合 M 的元素记作 $a \in M$(读作 a 属于 M)；事物 a 不是集合 M 的元素记作 $a \notin M$(读作 a 不属于 M).

具有某种特征 $p(x)$ 的 x 全体所组成的集合 M，常记为

$$M = \{x \mid P(x)\}.$$

例如，xoy 平面上坐标适合方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 M，可记作

$$M = \{(x,y) \mid x,y \text{ 为实数}, x^2 + y^2 = 1\}$$

这个集合 M 实际上就是 xoy 平面上以原点 O 为中心，半径为 1 的圆周上的点的全体组成的集合.

以后用到的集合主要是数集，即元素为数的集合. 如果没有特别说明，以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必 $x \in B$，就说 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subset B$(读作 A 包含于 B，或 B 包括 A). 这样上述常用数集之间有这样的包含关系：$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**. 例如：$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\}$ 是空集. 空集记作 $\varnothing$，且规定空集是任何集合的子集.

区间是用得较多的一类集合. 设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

a 和 b 称为开区间的端点. 这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

a 和 b 也称为闭区间的端点. 这里 $a\in[a,b]$, $b\in[a,b]$.

类似地,可定义:

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

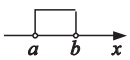
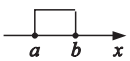
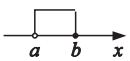
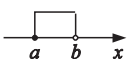
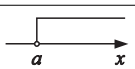
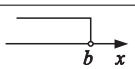
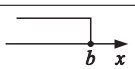
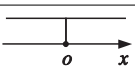
$[a,b)$, $(a,b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**. 此外还有所谓的无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间.

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$$

其他的无限区间同样可加以描述,列表如下(表 1.1):

表 1.1

记号	等价集合	名称	图形
(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	
$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	
$(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开区间	
$[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	
$(a,+\infty)$	$\{x\mid x>a\}$	无限区间	
$[a,+\infty)$	$\{x\mid x\geqslant a\}$	无限区间	
$(-\infty,b)$	$\{x\mid x<b\}$	无限区间	
$(-\infty,b]$	$\{x\mid x\leqslant b\}$	无限区间	
$(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid-\infty<x<+\infty\}$	无限区间	

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,数集

$$\{x\mid\mid x-a\mid<\delta\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**,记为 $U(a,\delta)$. 点 a 称为邻域中心,δ 称为邻域半径.

邻域 $U(a,\delta)$ 在数轴上是一个以 a 为中心,2δ 为长度的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为**点 a 的去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\mid x-a\mid<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

1.1.1.2 常量与变量

在观察自然现象或技术过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,也就是保持一定的数值,这种量叫做**常量**;还有一些量在过程中是变化着的,也就是可以取不同的数值,这种量叫做**变量**.

例如，把一个密封容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力在变化，则是变量，它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,t 等表示变量.

任何一个变量都有一定的变化范围. 变化范围可用我们前面介绍的集合、区间、邻域等表示.

1.1.2 函数的概念

在同一自然现象或技术过程中往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 例如圆的面积 S 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道，它们之间的关系由公式：$S=\pi r^2$ 给定. 当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 S 的相应一个数值.

定义 设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其变化范围内每取一个确定的值，变量 y 按照一定的规则总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 并称 x 为自变量，y 为因变量. 变量 x 的变化范围，称为 $y=f(x)$ 的**定义域**，记为 D.

当 x 取 $x_0\in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 当 x 遍取 D 内的所有值时，对应的函数值全体的集合 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

函数记号 $f(x)$ 中的字母“f”反映自变量与因变量的对应规则，即函数关系. 对应规则也常常用“g”，“h”，“φ”等表示，而函数也可记为

$$y=g(x),y=h(x),y=\varphi(x),\cdots\cdots$$

有时也可简记作 $y=y(x)$，此时等号左边的 y 表示函数值，右边的 y 表示对应规则.

给定一个用算式表达的函数，函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{4-x^2}$，

(1) 写出它的定义域；(2) 求 $x=2$ 时的函数值.

解 (1) 定义域为 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2,\text{且 } x\neq 0\}$；

(2) $f(2)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{4-2^2}=\dfrac{1}{2}$

如果考虑自变量和因变量的实际意义，那么函数的定义域就是自变量所能取的使函数有意义，且又符合实际意义的一切实数值.

例如前面介绍过的函数 $S=\pi r^2$，求它的定义域，除了考虑函数式本身，自变量可以取一切实数，但是，r 表示圆的半径，考虑它的实际意义，所以应有：$r>0$. 故圆面积函数 $S=\pi r^2$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

关于函数概念，还必须注意：确定函数的要素是对应法则和定义域. 在函数的定义中，包含着三个因素，即定义域、对应法则和值域. 在这三个因素中，定义域和对应法则确定了，那么，对

于定义域中每一个自变量的取值，都可得到对应的函数值，从而函数值的范围（值域）就完全确定了. 所以，确定函数的要素就是定义域和对应法则.

因此，如果有两个函数，它们的定义域相同，对应法则也完全一致，那么这两个函数是同一个函数.

例 2　研究函数 $y=\lg x$ 与函数 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$，它们是不是相同的函数？

解　函数 $y=\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，而 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，如图 1.1 与图 1.2 所示. 所以 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 是定义在不同区间上的两个不同的函数.

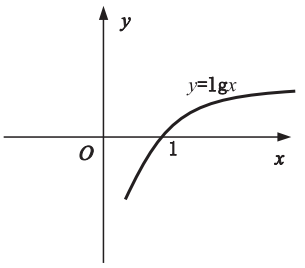


图 1.1

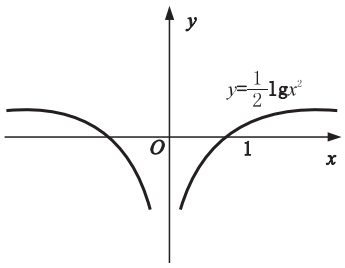


图 1.2

例 3　函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数？

解　函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，但是当 $x\in(-\infty,0)$ 时，函数 $y=x$ 的函数值小于零，而函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的函数值大于零，如图 1.3 与图 1.4 所示.

所以 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是定义域相同，函数关系不同的两个不同的函数.

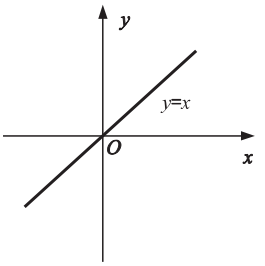


图 1.3

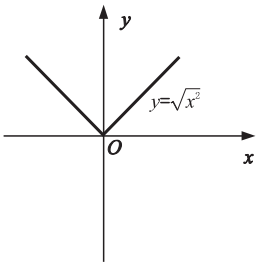


图 1.4

例 4　求函数 $y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\sqrt{25-x^2}$ 的定义域，并求 $f(0)$ 与 $f(1)$.

解　要使算式有意义，必须

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1 \quad \text{且} \quad 25-x^2\geqslant 0$$

即　$|x-1|\leqslant 5$　且　$|x|\leqslant 5$

即　$-4\leqslant x\leqslant 6$　且　$-5\leqslant x\leqslant 5$

因此，有　$-4\leqslant x\leqslant 5$

于是函数的定义域为 $[-4,5]$.

因为 $0 \in [-4,5]$，$1 \in [-4,5]$，所以 $f(0) = -\arcsin\dfrac{1}{5} + 5$，$f(1) = 2\sqrt{6}$

在平面直角坐标系中，自变量 x 在横轴上变化，因变量 y 在纵轴上变化，则平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为定义在 D 上的**函数 $y = f(x)$ 的图形**.

函数有三种表示方法即公式法、表格法和图形法.

例 5　说明函数 $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 是用什么方式表示的，并求其定义域和值域.

解　这是用公式法表示的 y 是 x 的函数，它的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$.

例 6　某城市一年里各月的电视机零售量（单位：百台）如表 1.2 所示.

表 1.2

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 S	10	15	7	8	8	7	5.5	7	8	8	9	9.5

表 1.2 表示了该城市电视机零售量 S 随月份 t 而变化的函数关系，它的定义域为

$$D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

例 7　在气象观测站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，即图 1.5 所示的曲线. 根据这个图就能知道，这一天内时间 t 从 0 到 24 点气温的变化情况. 图 1.5 是用图象表示 T 是 t 的函数，其定义域为 $[0,24]$，值域为 $[15,30]$.

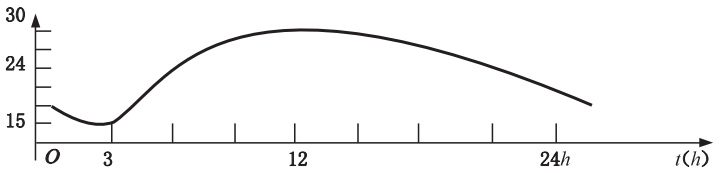


图 1.5

下面再举几个函数的例子.

例 8　函数 $y = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，如图 1.6 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：$x = \operatorname{sgn}x \cdot |x|$

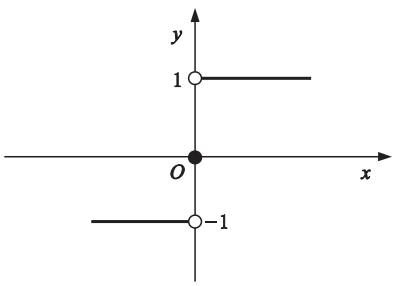


图 1.6

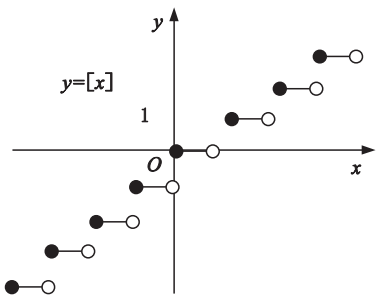


图 1.7

例 9　设 x 为任一实数，函数 $y=[x]$ 称为取整函数，对每个 x，函数值是不超过 x 的最大整数. 例如，$[4.87]=4$，$[-2.1]=-3$ 等. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数集 Z，如图 1.7 所示.

例 10　求函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & \text{当}\ |x|<1\\ x^2-1, & \text{当}\ 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$ 的定义域，并求 $f(0)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$，作出函数图象.

解　函数的定义域为 $\{x\mid |x|<1\}\cup\{x\mid 1<|x|\leqslant 2\}$，即 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$.

$f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{5}{4}$. 如图 1.8 所示.

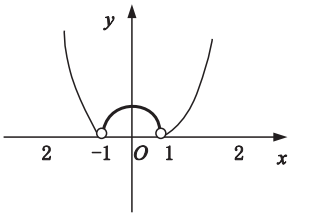


图 1.8

从例 8、例 9 和例 10 看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种在定义域的不同区间内，对应法则用不同式子表示的函数称为**分段函数**. 应特别注意，分段函数是用几个式子合起来表示的一个函数，而不是表示几个函数. 其定义域是每个式子自变量取值范围的并集，如例 10.

1.1.3　建立函数关系举例

为了解决实际问题，一般先要建立函数关系. 为此，先要确定自变量和因变量，再根据问题本身，寻找自变量和因变量之间所满足的等式，再将因变量表示为自变量的函数，这就是要求的函数关系. 下面举几个建立函数关系的例子.

例 11　有一个倒立的圆锥形蓄水器，口径与深度都是 8m. 如果以每分钟 6m^3 的速度往容器里注水，求容器内水深与注水时间的关系.

解　设注水时间为 t，即 $t=0$ 时开始注水. 当时间经过 t 分钟时，注入的水为 $6t(\text{m}^3)$. 设此时容器内水深为 $h(\text{m})$，则水面半径为 $\frac{1}{2}h(\text{m})$，如图 1.9 所示. 由题设，有

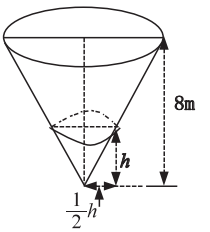


图 1.9

$$6t=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

解之得

$$h=\sqrt[3]{\frac{72t}{\pi}}$$

这就是水深 h 与注水时间 t 的函数关系，由于容器高为 8m，因此水深 h 的最大值为 8m，故函数的定义域为 $\{t\mid 0\leqslant t\leqslant\frac{64}{9}\pi\}$，值域为 $[0,8]$.

例 12　某产品每日产量不超过 1 000 件，产量为 x 件时，产品总成本为 $C(x)=\frac{1}{2}x^2+50x+50$，每件售价 $P(x)=80-\frac{1}{4}x$，求每日的利润 L（设产量等于销售量）.

解　由每件售价 $P(x)=80-\frac{1}{4}x$，得总收益 $R(x)=P(x)\cdot x=\left(80-\frac{1}{4}x\right)x$，又由总成本 $C(x)=\frac{1}{2}x^2+50x+50$，得每日利润 $L=R(x)-C(x)=-\frac{3}{4}x^2+30x-50$，其定义域为 $[0,1\ 000]$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com