

内容主线
主要考点
解题套路
解题观摩
自己动手

复旦大学

上册

陈洪明 主编

高等数学 全程辅导

中国建材工业出版社

同济四版

高等数学全程辅导

(上册)

陈洪明 编

中国建材工业出版社

·北京·

同济四版

高等数学全程辅导

(下 册)

陈洪明 编

中国建材工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程辅导/陈洪明编. —北京:中国建材工业出版社, 2002. 9

ISBN 7-80159-324-3

I. 高… II. 陈… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 067746 号

高等数学全程辅导

中国建材工业出版社出版

新华书店经销

北京奥隆印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 33 字数 846 千字

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷

印数 1-10000 册

ISBN 7-80159-324-3/G·061

全套定价:32.00 元 本册定价:16.00 元

前 言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材,被全国许多院校采用,现在已印刷发行20多年,再版多次。目前使用最多的是第四版。为此,我们专门编写了第四版《高等数学全程辅导》。本书旨在帮助、指导广大读者基本概念和掌握基本解题方法,在此基础上融会贯通。本书的篇幅和内容与相应课程的学时数相适应,例题和练习题都是精心选编的,题型基本而典型,广泛而不重复,与教材紧密衔接,是课堂教学的补充和提高,但又不超出基本要求。本书内容的编排、章节的次序、定义定理的叙述、符号术语的使用均与教材一致。

本套辅导书分为上下两册。上册内容包括函数与极限,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用和空间解析几何与向量代数七个篇章,下册包括多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分和曲面积分,无穷级数和微分方程五个篇章。每章我们采取独特的“内容主线”——“主要考点”——“解题套路”——“解题观摩”——“第一思路”——“自己动手”——“同济四版本章习题及解答”的编排模式,相信读者通过本书,定能巩固所学知识,掌握解题技巧,在考试中取得好成绩。

内容主线 采用图表的形式,把本章节的主要内容和逻辑结构最直观地呈现出来,使学生清晰掌握本章主要内容与逻辑结构。

主要考点 覆盖了所有本章节的主要考试要点,研究生入学考试的考点也覆盖在内。

解题套路 提供本章节涉及题型常用的解题思维模式和解题套路,基本覆盖了本章节所能用到的所有常用解题方法。

解题观摩 通过大量的精典例题,详细说明本章节常用的解题方法和解题技巧。解题观摩的例题覆盖面力求广泛,基本覆盖了所有本章节的主要考点内容。

第一思路 对具体例题的解题方法进行技巧点精。从分析每个具体例题的常用思维入手,同时结合本题的特点和此类题型的解题套路,为学生提供清晰的解题思路。

自己动手 提供了大量练习题,尤其选用了一些研究生入学考试真题,并且在书末附有详细的解答过程。本书力图通过大量的练习题,使学生在“自己动手”,大量实践的基础上深入掌握本章节的内容,强化理解、巩固所学。

同济四版本章节习题解答 本书不仅对《高等数学》(第四版)所附的全部习题进行了解答,而且在解题过程中,着重从解题思路和解题技巧上进行了精练的分析和引导,同时提供详细的解答过程。

本书可供大专院校、电大、职大、夜大等广大学生及即将参加硕士研究生入学考试的学生使用。既适合读者自学,也适合复习巩固。

本书由复旦大学陈洪明主编。在编写的过程中,我们还得到了复旦大学数学系诸多师生的帮助,编者在此深表感谢。由于编者水平,书中错误之处在所难免,恳切希望同行和广大读者批评指正。

编者于北京
2002年9月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
【内容主线】	(1)
【主要考点】	(1)
第一节 函数	(2)
一、函数的定义域	(2)
二、函数的性质(有界性、周期性、单调性、奇偶性)	(5)
三、函数的表达式以及求反函数	(9)
第二节 求极限	(14)
一、函数极限	(14)
二、数列极限	(19)
第三节 函数的连续性	(23)
【同济四版本章习题及解答】	(27)
【同济四版本章总习题及解答】	(65)
【自己动手解答】	(72)
第二章 导数与微分	(79)
【内容主线】	(79)
【主要考点】	(79)
第一节 导数	(80)
一、导数的定义	(80)
二、导数的计算	(85)
三、高阶导数	(95)
第二节 微分	(102)

一、微分的定义与计算	(102)
二、微分在近似计算中的应用	(105)
【同济四版本章习题及解答】	(106)
【同济四版本章总习题及解答】	(133)
【自己动手解答】	(141)
第三章 中值定理与导数的应用	(152)
【内容主线】	(152)
【主要考点】	(152)
第一节 微分中值定理的应用	(153)
一、存在性的命题的证明	(153)
二、不等式的证明	(158)
三、泰勒公式的计算应用	(161)
第二节 罗必达法则求未定式极限	(167)
第三节 利用导数研究函数性态	(170)
一、函数的单调性的判别与证明	(170)
二、函数的凹凸性的判别与证明	(172)
三、极值与最值问题	(174)
四、函数图形的描绘	(177)
五、方程的近似解	(180)
【同济四版本章习题及解答】	(182)
【同济四版本章总习题及解答】	(226)
【自己动手解答】	(239)
第四章 不定积分	(252)
【内容主线】	(252)
【主要考点】	(252)
第一节 不定积分	(252)
一、直接积分法	(252)

二、换元积分法	(258)
三、分部积分法	(266)
四、可化有理函数的积分	(272)
【同济四版本章习题及解答】	(282)
【同济四版本章总习题及解答】	(308)
【自己动手解答】	(320)
第五章 定积分	(333)
【内容主线】	(333)
【主要考点】	(333)
第一节 定积分定义及其性质的应用	(334)
一、利用定积分的定义计算图形面积	(334)
二、利用定积分的定义计算数列极限	(337)
三、积分中值定理的应用	(340)
四、利用定积分的性质证明(不)等式	(343)
五、广义积分的可积性判别	(348)
第二节 定积分的计算(含广义积分)	(352)
一、基本微分公式计算定积分	(352)
二、广义积分计算	(359)
第三节 积分上(下)限函数的函数性质	(361)
一、求函数求导及极值问题	(361)
二、函数的极限与连续性	(365)
三、函数的单调性及不等式证明	(367)
第四节 定积分近似计算	(369)
【同济四版本章习题及解答】	(370)
【同济四版本章总习题及解答】	(403)
【自己动手解答】	(419)

第六章 定积分的应用	(434)
【内容主线】	(434)
【主要考点】	(434)
第一节 定积分的几何应用	(435)
一、求平面图形的面积	(435)
二、求已知截面面积的立体的体积	(442)
三、旋转体的体积和侧面积	(444)
四、求平面曲线的弧长	(448)
第二节 定积分的物理应用	(451)
【同济四版本章习题及解答】	(454)
【同济四版本章总习题及解答】	(470)
【自己动手解答】	(477)
第七章 空间解析几何与向量代数	(486)
【内容主线】	(486)
【主要考点】	(486)
第一节 向量代数	(487)
一、向量及其向量运算	(487)
二、向量性质及其运用	(491)
第二节 平面与直线方程	(497)
一、求平面方程	(497)
二、求直线方程	(507)
第三节 曲面与空间曲线	(504)
一、有关曲面的问题	(504)
二、有关空间曲线的问题	(508)
【同济四版本章习题及解答】	(510)
【同济四版本章总习题及解答】	(541)
【自己动手解答】	(553)

目 录

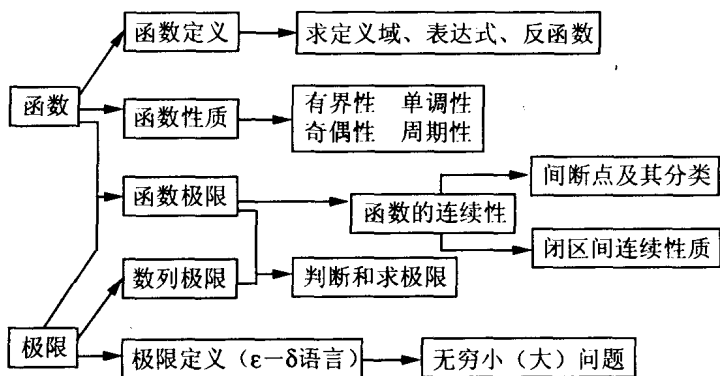
第八章 多元函数微分法及其应用	(563)
【内容主线】	(563)
【主要考点】	(563)
第一节 多元函数的极限与连续性	(564)
一、多元函数的定义	(564)
二、多元函数的极限	(566)
三、多元函数的连续性	(571)
第二节 多元函数的偏导数与微分	(573)
一、多元函数的偏导数	(573)
二、方向导数和梯度	(578)
三、多元函数的全微分	(580)
第三节 多元函数微分的应用	(583)
一、极值及其求法	(583)
二、几何应用	(586)
三、泰勒公式*	(590)
【同济四版本章习题及解答】	(592)
【同济四版本章总习题及解答】	(632)
【自己动手解答】	(643)
第九章 重积分	(650)
【内容主线】	(650)
【主要考点】	(650)
第一节 二重积分	(651)

一、二重积分的定义与性质	(651)
二、二重积分的计算	(655)
第二节 三重积分	(662)
一、三重积分的概念与计算	(662)
二、含参变量的积分*	(666)
第三节 重积分的应用	(670)
一、几何应用	(670)
二、物理应用	(673)
【同济四版本章习题及解答】	(679)
【同济四版本章总习题及解答】	(722)
【自己动手解答】	(732)
 第十章 曲线积分与曲面积分	(744)
【内容主线】	(744)
【主要考点】	(744)
第一节 曲线积分	(745)
一、对弧长的曲线积分及其计算	(745)
二、对坐标的曲线积分及其计算	(749)
三、两类曲线积分的关系及其应用	(752)
四、格林公式	(757)
第二节 曲面积分	(762)
一、对面积的曲面积分及其计算	(762)
二、对坐标的曲面积分及其计算	(766)
三、两类曲面积分的关系及其应用	(770)
四、高斯公式和斯托克斯公式	(772)
【同济四版本章习题及解答】	(776)
【同济四版本章总习题及解答】	(812)
【自己动手解答】	(824)

第十一章 无穷级数	(833)
【内容主线】	(833)
【主要考点】	(833)
第一节 常数项级数	(834)
一、常数项级数的概念与性质	(834)
二、常数项级数的敛散性	(838)
第二节 函数项级数	(843)
一、函数项级数的概念与一致收敛性	(843)
二、幂级数	(846)
三、傅里叶级数	(852)
【同济四版本章习题及解答】	(861)
【同济四版本章总习题及解答】	(888)
【自己动手解答】	(902)
第十二章 微分方程	(912)
【内容主线】	(912)
【主要考点】	(912)
第一节 一阶微分方程	(913)
一、微分方程的基本概念	(913)
二、一阶常微分方程的基本类型及解法	(915)
第二节 高阶微分方程	(929)
一、高阶常微分方程的几种类型及解法	(929)
二、微分方程的幂级数解法	(941)
三、常系数线性微分方程组*	(943)
【同济四版本章习题及解答】	(944)
【同济四版本章总习题及解答】	(1015)
【自己动手解答】	(1030)

第一章 函数与极限

内容主线



主要考点

1. 求函数的定义域
2. 求函数的表达式、反函数
3. 判断或证明函数的一些性质
4. 求函数和数列的极限
5. 判断或证明函数的连续性
6. 区分间断点的类型
7. 利用闭区间上连续函数的性质的证明题

第一节 函 数

一、函数的定义域

解题套路

1. 熟记简单函数的定义域:

$$y = 1/x \rightarrow x \neq 0;$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0;$$

$$y = \log_a x \rightarrow x > 0;$$

$$y = \arcsin x, y = \arccos x \rightarrow |x| \leq 1$$

2. 求复合函数的定义域, 要注意内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内, 即已知函数 $f(x)$ 的定义域分别为 D , 则求函数 $f(g(x))$ 的定义域 $\Leftrightarrow$ 若 $g(x) \in D \Rightarrow x \in D_1$, 则 D_1 是函数 $f(g(x))$ 的定义域;

3. 求复杂函数的定义域, 就是求解各个简单函数的定义域的交集, 即已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域分别为 $D(f), D(g)$, 则函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的定义域为 $D(f) \cap D(g)$;

4. 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集;

5. 通常我们求解函数的定义域的问题都可以归结为由一个已知的函数的定义域来求解另外一个含复合函数的复杂函数的定义域问题, 只不过已知的函数的定义域可能题目中会直接给出, 这时就直接套用解题套路 2, 3 (如例 1 - 2), 若题目中没有直接给出已知某个函数的定义域, 则这个已知的函数的定义域是解题套路 1 中熟记的简单函数的定义域 (如例 1 - 1)

解题观摩

【例 1 - 1】 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$$

$$(2) y = \ln(\sin \frac{\pi}{x})$$

第一思路

这是很明显的求定义域的题,我们需要利用熟悉的简单函数的定义域为已知的定义域,再分别利用复合函数和复杂函数的解题套路3、2很容易得到结果

【解答】

$$(1) \begin{cases} 1-x^2 \neq 0, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \geq -2, \end{cases} D = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup$$

$(1, +\infty);$

$$(2) \ln x \text{ 的定义域为 } x > 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{x} > 0, \text{ 即 } 2n\pi < \frac{\pi}{x} < (2n+1)\pi, (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{当 } n \neq 0 \text{ 时, } 2n < 1/x < (2n+1), \text{ 即 } x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$$

$$\text{当 } n = 0 \text{ 时, } 0 < 1/x < 1, \text{ 即 } x > 1.$$

$$\text{故定义域 } D = \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right) \cup (1, +\infty)$$

【例1-2】 设 $y = h(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 求 $y = h(x+a) + h(x-a)$ ($0 \leq a \leq 1$) 的定义域.

第一思路

这是一个由已知某个函数的定义域求另一个与已知函数有关的复杂函数的定义域,可直接由解题套路3、2解得结果.

【解答】 因为 $-1 \leq x \leq 1$, 所以 $\begin{cases} -1 \leq x+a \leq 1 \\ -1 \leq x-a \leq 1 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} -1-a \leq x \leq 1-a \\ -1+a \leq x \leq 1+a \end{cases}$$

又 $0 \leq a \leq 1$, 所以 $-1 - a \leq -1 + a \leq 1 - a \leq 1 + a$, 故定义域 $D = [a - 1, 1 - a]$.

【例 1-3】 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $f(2x)$ 定义域

第一思路 尽管给出的函数是分段函数, 但同样是由已知

某个函数的定义域求另一个复合函数的定义域; 方法可以简单记为把复合函数的内层函数看作已知函数的自变量, 再利用自变量在已知定义域的不等式关系解不等式方程

【解答】

$$f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq 2x \leq 1 \\ -1, & 1 < 2x \leq 2 \end{cases}$$

即 $f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$, 从而定义域 $D = [0, 1]$

自己动手

【题 1-1】 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}; (2) y = \frac{2x}{x^2-3x+2}.$$

【题 1-2】 设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \lg(x-2)$, 求 (1) $f(x)$ 的定义域; (2) $f(\ln x)$ 的定义域.

【题 1-3】 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 3 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的定

义域是(), $f(0) = ()$.