俞海东◎编著

高中 Mathematical Thinking Trainer
数学思维自学课程

【2017年核心版本】

数学是让人聪明的！数学学习是让人愉悦的！
否则，你走错了路！

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

俞海东◎编著

高中 数学思维自学课程

Mathematical Thinking Trainer

【2017年核心版本】

数学是让人聪明的！数学学习是让人愉悦的！
否则，你走错了路！

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学思维自学课程/俞海东编著. —上海：华东理工大学出版社，2016.7

ISBN 978-7-5628-4714-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①俞… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 138153 号

策划编辑 / 陈月姣
责任编辑 / 纪冬梅
装帧设计 / 戚亮轩
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地址：上海市梅陇路 130 号，200237
电话：021-64250306
网址：www.ecustpress.cn
邮箱：zongbianban@ecustpress.cn
印　　刷 / 虎彩印艺股份有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 8
字　　数 / 179 千字
版　　次 / 2016 年 7 月第 1 版
印　　次 / 2016 年 7 月第 1 次
定　　价 / 32.80 元

前　言

要成为数学解题的高手，不能光看数学本身，因为理解题目跟其他知识是不可分的，没有基本的语文知识，没有逻辑方面的基础知识，没有很强的推理能力，不可能懂得解难题．所以数学思维不先教解题，而是先做解题理论的传授，其次，进入解题世界的第一步，是理解题目的本身，这种理解不只依靠知识的积累，也常常依靠直觉的反应．

如果把这个命题往深的方面想，也可以引发更多的思索，一是学习任何学科进而成为高手都不是容易的事，必须经过长时期地训练．二是在成为高手之前，需要基础教育，如果要成为解题高手，就要对语文的知识、逻辑学的知识有基本的掌握，否则光是懂一些普通的数学知识有何意义？三是成为高手的基本准则是掌握迪卡尔思维四准则：(1)怀疑，凡是我没有清楚的认识到的想法，我绝不把它当成真的；(2)分析，当面对难题时要把难题分成一个个小的部分，以便一一思考与解决；(3)综合思考时要按照先易后难的次序从最容易了解的想法开始，一点点逐步组合，慢慢深入最复杂的问题；(4)验证，在任何情况下，都要尽可能全面考察问题，反复验证，确认毫无疏漏为止．就如手中的刀，庖丁凭直觉就知道如何解牛，这才可以说是进入数学世界的第一步了．

当然，这世界上任何有价值的智慧，都不是老师可以一一传授的，完全要依靠自己地体会，老师教授给我们的数学思维方式，能不能用来解难题，却是要靠自己的．解难题不仅靠思维，也靠数学感觉，每个人都有自己的思维，只是有些没有被开发，还有些没有跟数学合拍．数学思维课程的传授，就是让学员通过观察、实验、推理这套思考的程序，把学员的个人原有思维，带到数学思维轨道上来．

所以，每天把自己的思维悟了又悟，久而久之，不但能形成自己的思维，也能发现别人的思维，甚至看见整个数学世界．

《高中数学思维自学教程》是在学生基本掌握数学知识的基础上，针对目前学生对于数学概念、数学方法、数学思想、数学思维薄弱的现状而开发的课程，以数学解题程序理论、波利亚解题理论为总纲，配合观察函数、方程、不等式，然后进行实验、推理的思维流程，对解三角形、立体几何、不等式、数列、圆锥曲线五大专题采用统一集中处理的模式，让

高中学生轻松有效的面对高考，大幅度提升学生的思维品质.

本人毕业于浙江师范大学数学系，大学深入研究过数学建模，并与同学一起创立了浙江师范大学数学建模协会，参加工作后，自诩为数学思维师，创思维之法，努力实践“数学是思维的体操”这一理念，培养学生学会观察、实验、推理的认识思维模式，优化高中生的思维结构，为高考数学服务，为数学的应用推广服务，在本书里的很多东西来自前辈的指导和阅读的书籍，还有一些是自己十多年的思考，不当之处，请多指教.

嵊州中学　俞海东

2016 年 7 月于剡溪湖畔

目　录

第一章　绪论 …… **1**

第一节　数学及数学思维介绍 / 1

第二节　G. 波利亚理论介绍 / 2

第三节　解题的一般程序 / 3

第二章　G. 波利亚解题理论的具体实践 …… **4**

第一节　G. 波利亚解题理论 / 4

第二节　运用解题表来解题 / 5

第三章　解三角形的思维 …… **21**

第四章　解立体几何的思维 …… **30**

第五章　解不等式的思维 …… **51**

第六章　解数列的思维 …… **69**

第七章　解圆锥曲线的思维 …… **94**

第一章　绪论

第一节　数学及数学思维介绍

数学：作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美意境的追求. 它的基本要素是：逻辑和直观、分析和构作、一般性和特殊性. 虽然不同的传统可以强调不同的侧面，然而正是这些互相对立的力量的相互作用以及综合起来的努力才构成了数学科学的生命、用途和它的崇高价值.（如果需要加深对数学本质的理解，可以读一读 R. 柯朗 · H. 罗宾的《什么是数学》）

数学思维：是指学生在对数学感性认识的基础上，运用归纳、类比、演绎、证明等思维的基本方法，理解并掌握数学内容而且能对具体的数学问题进行推论与判断，获得对数学知识本质和规律的认识能力. 在数年的教学实践中我发现许多学生的这种思维能力存在缺陷，制约了学生的进一步发展.

一般的数学思维程序的前三步为：观察、实验、推理.

（1）观察是有目的、有计划地通过视觉器官去认识数学对象、性质以及相互关系的活动. 观察过程是对数学思维材料的接收，或称数学思维信息的输入过程.

（2）实验就是人们根据数学研究的需要，人为地、有目的地、模拟地创设一些有利于观察的数学对象，并对其实行观察和研究的一种方式. 什么是数学实验？美国著名数学家和数学教育家 G. 波利亚曾指出：“学习任何东西，最好的途径是自己去发现”. 数学学习也是如此，数学实验就是为了探究某种数学理论，验证某种数学猜想而进行的操作或思维过程，在特定的环境下，实验者运用某些物质手段进行一些数学探究活动，这就是数学实验. 波利亚说，数学上的实验往往是思想上的实验，即思想上的假设. 我们对某一数学概念、公式、定理每使用一次，就是对其进行一次实验.

（3）推理是由一个或几个已知的判断（前提），推导出一个未知的结论的思维过程，推理是形式逻辑，是研究人们思维形式及其规律和一些简单的逻辑方法.

数学之道，在于理解表达，在于结构分析，在于逻辑判断，在于观察、实验、归纳、推理. 而学习数学，提高自己的数学水平，不在于你以前懂多少数学，而在于你自己了解自己懂多少，不懂的缺口在哪里. 通过本书的帮助打开“数学之道”，然后形成自己崭新的数学体系，你的自学就成功了.

第二节　G.波利亚理论介绍

G.波利亚，是美籍匈牙利数学家、教育家.他十分重视解题在数学学习中的重要作用，数十年如一日对解题方法进行研究，凝聚成一张“解题表”.（见第二章第一节介绍）

这张表提供了解决数学问题的一般方法与模式，为解决问题指明了方向，并揭示了解题中的思维过程和思维方法.悉心体会这张表中层层递进的各个问题，相信会对我们的数学学习有所启迪.

G.波利亚对数学解题的过程进行了深入的研究，认为整个解题过程分为四个阶段，即：弄清问题、拟订计划、实现计划、反思回顾，并给出了具有启发性的“解题表”.

第一阶段：弄清问题.

1. 已知是什么？未知是什么？
2. 条件是什么？结论是什么？
3. 作图，并引入适当的符号.

第二阶段：拟订计划.

1. 见过这道题或与之类似的题吗？能联想起有关的定理或公式吗？
2. 换一个方式来叙述这道题，再看看未知条件.
3. 回到定义看看.
4. 先解决一个特例试试，这个问题的一般形式是什么？
5. 你能解决问题的一部分吗？
6. 你用了全部条件吗？

第三阶段：实现计划.

1. 实现你的解题计划并检验每一步.
2. 证明你的每一步都是正确的.

第四阶段：反思回顾.

1. 检查结果并检验其正确性.
2. 换一个方法做做这道题.
3. 尝试把你的结果和方法用到其他问题上去.

在这四个阶段中“实现计划”较为容易，需要的只是解题者的耐心和认真；“弄清问题”则是成功解决问题的前提；“反思回顾”是最容易忽视的一个环节，通过回顾所完成的解答，通过重新考虑和重新检查这个结果和得出这一结果的思路，解题者可以巩固他们的知识和发展他们的解题能力，进一步形成认知能力.“拟订计划”才是解决问题的关键所在.

G.波利亚指出“最糟糕的情况是：没有理解问题就进行演算或作图，一般来说，在尚未看到主要联系或者尚未作出某种计划的情况下，去处理细节是毫无用处的.”

在这里提醒两点：一是一定要画图，并标上符号和数字；二是一定要重视“回顾”这一步，只有经历这一步才能从题海中解放出来，最终做到：虽然只做了有限的题目，但能够解

无限的问题.

第三节　解题的一般程序

数学思维师对学生进行训练，就是在学生原来的数学认知结构基础之上，将数学知识结构用文字、符号和图像的形式展示给学生，并在学生头脑里构建知识、方法、思想和思维四个维度的数学知识结构，高效地指导解题.

（一）解题程序化操作

经过规范化而形成可操作的解题过程，它是解题的最终形式，也是思想与实践的连接点.

1. 读题、审题、转化条件

首先弄清楚题目用到了哪些知识（或方法），先用哪些，后用哪些，哪个与哪个作了配合，最后组成一个怎么样的逻辑结构？学会对解题过程做结构分析，是提高解题能力的有效途径.

2. 一般性解决

在策略水平上的解决，以明确解题的大致范围和总体方向，这是对思考做定向调控.

3. 功能性解决

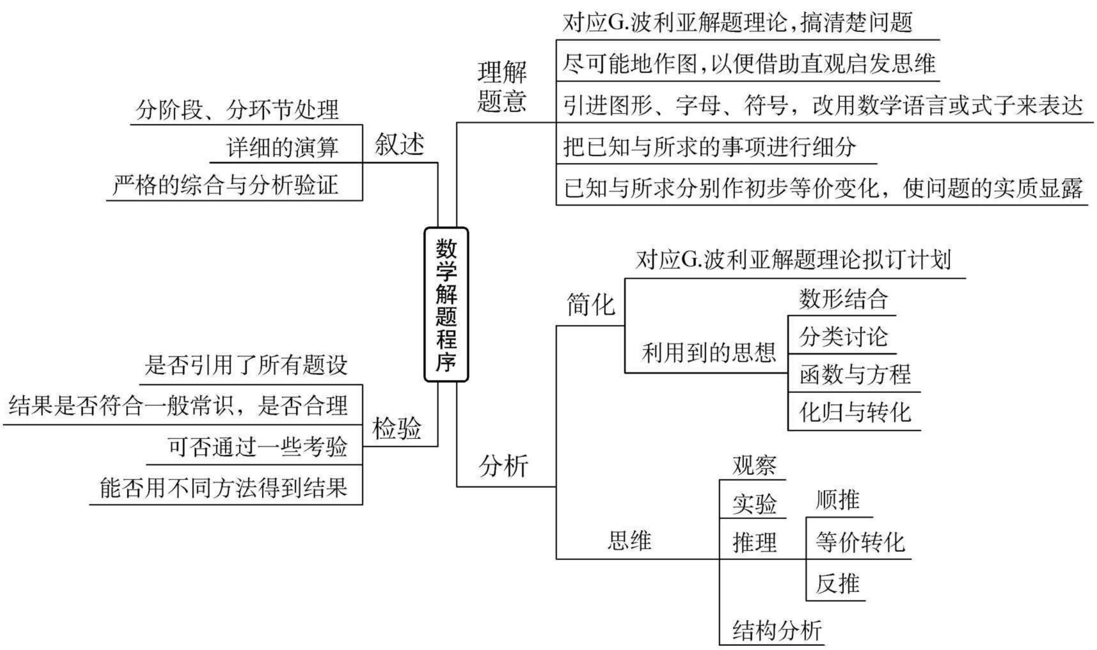
在数学方法上的解决，以明确具有解决功能的解题手段，这是对解决方法进行选择.

4. 特殊性解决

在数学技能水平上的解决，以进一步缩小功能性解决的途径，明确运算程序或推理步骤，这是对细节做实际完成.

（二）解题程序总纲

下表根据福建师范大学卢正勇教授的解题程序改编：

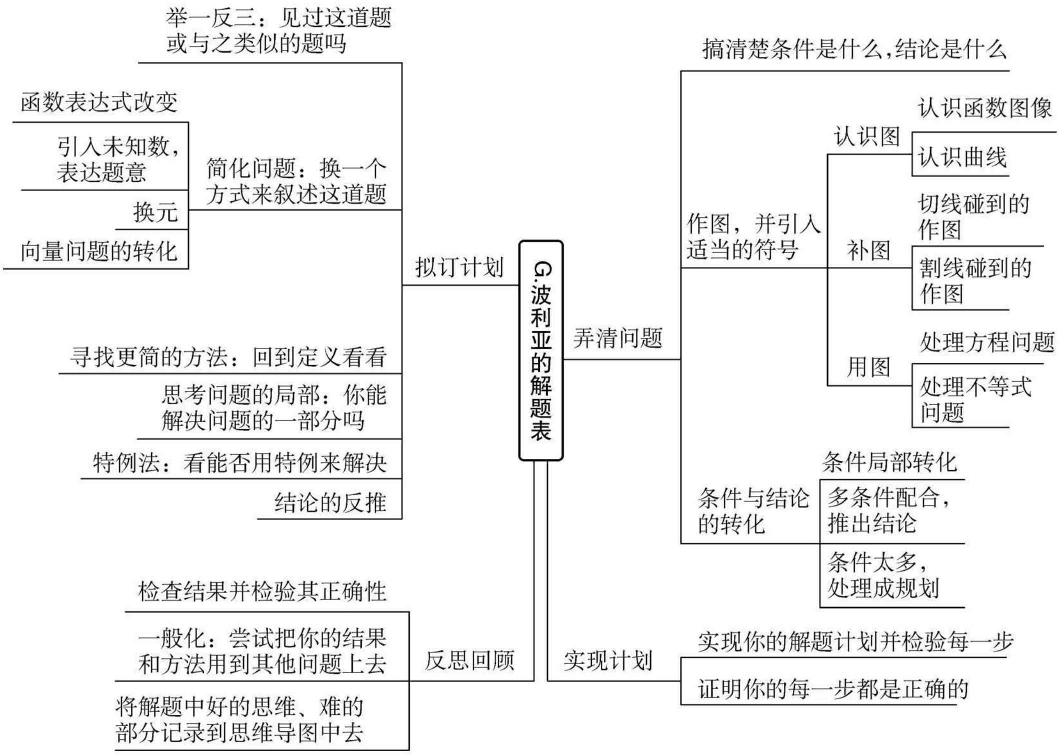


第二章　G. 波利亚解题理论的具体实践

第一节　G. 波利亚解题理论

G. 波利亚是美籍匈牙利数学家、教育家，他十分重视解题在数学学习中的重要作用，数十年如一日地对解题方法进行研究，凝聚成一张“解题表”. 这张表提供了一套解决数学问题的一般方法与模式，为解决问题指明了方向，并揭示了解题中的思维过程和思维方法. 悉心体会这张表中层层递进的各个问题，相信会对我们的数学学习有所启迪.

G. 波利亚的解题表：



从思维角度分析，在解题过程中思维活动主要表现为动员和组织，即从记忆中把有关条款抽出来或者把有关条款有目的地联系起来，进行丰富的联想，这依赖于解题者完善的

认知结构和优良的思维品质.资源充足和组织良好的知识仓库是解题者的重要资本,良好的知识结构成为数学学习者的落脚点.

第二节 运用解题表来解题

一、弄清问题

"观察、观察、再观察"(巴甫洛夫语),观察能导致发现.解数学题也应有观察到发现的过程,只有对问题中的数、式、形做认真地观察,得到条件和结论具有的特征,才有可能较快地获得解题途径.

1. 已知是什么? 未知是什么? 条件是什么? 结论是什么?

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{bx+c}{ax^2+1}$($a, c\in \mathbf{R}, a>0, b$ 是自然数)是奇函数,$f(x)$ 有最大值$\dfrac{1}{2}$,且 $f(1)>\dfrac{2}{5}$.求函数 $f(x)$ 的解析式.

分析 本题条件较多,搞清楚每个条件,就是将条件转化为关于 a, b, c 的限制条件,求解析式就是求 a, b, c.

解 $\because f(x)$是奇函数,

$\therefore f(-x)=-f(x)$,即$\dfrac{-bx+c}{ax^2+1}=-\dfrac{bx+c}{ax^2+1}$, $\therefore -bx+c=-bx-c$, $\therefore c=0$.

$\therefore f(x)=\dfrac{bx}{ax^2+1}$.由 $a>0$, b 是自然数,得,当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant 0$;

当 $x>0$ 时,$f(x)>0$. $\therefore f(x)$ 的最大值在 $x>0$ 时取得,且 $b>0$.

$\therefore x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{bx}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}}$,当且仅当$\dfrac{a}{b}x=\dfrac{1}{bx}$.

即 $x=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ 时,$f(x)$ 有最大值$\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore \sqrt{\dfrac{a}{b^2}}=1$, $\therefore a=b^2$ ①

又 $f(1)>\dfrac{2}{5}$, $\therefore \dfrac{b}{a+1}>\dfrac{2}{5}$, $\therefore 5b>2a+2$ ②

把①代入②得 $2b^2-5b+2<0$,解得$\dfrac{1}{2}<b<2$,又 $b\in\mathbf{N}$, $\therefore b=1$, $a=1$,

$\therefore f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

点评 审题是解题的第一步.未知数是什么? 已知数据(已知数、已知图形和其他已知事项)是什么? 满足条件是否可能? 要确定未知数,条件是否充分或不充分? 条件是否多余或是相互矛盾?

搞清楚已知是什么,关键在于能否将已知条件转化出来,例如:

可推出$x=1$时，$f(1)+f(-1)=0$ —— $y=f(x)$是奇函数 ——
- 等价于对任意x，$f(x)+f(-x)=0$
- 等价于$y=f(x)$图像关于原点对称
- 可推出$x=0$时，$f(0)=0$

2. 作图，并引入适当的符号

很多时候，我们在条件与结论之间无法找到直接的联系，这个时候数形结合是个不错的方法，所以就有了画草图、引入适当的符号、计算可以推导的量这个环节.

例 2 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左，右焦点，P 为双曲线右支上一点，满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$，直线 PF_1 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切，则双曲线的离心率为________.

分析与解 如图 1 所示，画一个双曲线图形，取 P 为双曲线右支上一点，所以 $|PF_1|=|PF_2|+2a=2c+2a$①，因为 $|PF_2|=|F_1F_2|$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，设 PF_1 的中点为 Q，连接 QF_2，运用等腰三角形中线即高 $QF_2\perp PF_1$，因为直线 PF_1 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切，设 PF_1 与圆相切于点 M，连接 MO，得到 $OM\perp PF_1$，这里 O 为 F_1F_2 的中点，$OM\,/\!/\,QF_2$ 就想到中位线 OM 为 QF_2 的一半，得到 $|F_1M|=\dfrac{1}{4}|PF_1|$，又因为在直角三角形 F_1MO 中，$|F_1M|^2=|F_1O|^2-a^2=c^2-a^2=b^2$，所以 $|F_1M|=b=\dfrac{1}{4}|PF_1|$②，结合双曲线中 $c^2=a^2+b^2$③，由 ①②③ 得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，所以 $e=\dfrac{5}{3}$.

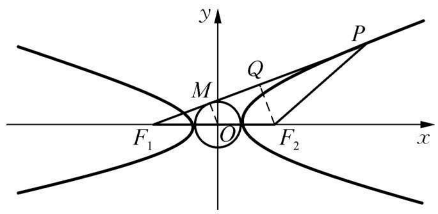


图 1

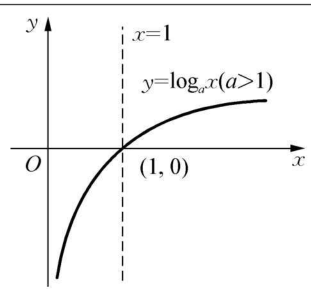
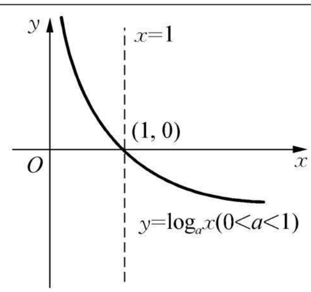
点评 很多时候，题目的条件与条件之间的衔接不是很紧密，条件与结论的关联不是很直接，这是导致学生解题无法进行的关键. 将题目的条件与结论用图形表达出来，是找到它们之间联系最为有效的方法.

作出的图像如何识图、如何补图、如何用图是这个环节中的三个关键.

(1) 认识图像

① 通过一个函数的图像，可以看出其定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性和特殊点上的函数值. 以对数函数图像为例列表表明，如表 1 所示.

表 1

	$a>1$	$0<a<1$
图像		

续表

	$a>1$	$0<a<1$
性质	定义域：$(0, +\infty)$	
	值域：$\mathbf{R}$	
	过点$(1, 0)$，即当$x=1$时，$y=0$	
	当$a>1$时，在$(0, +\infty)$上是增函数	当$0<a<1$时，在$(0, +\infty)$上是减函数

② 从一幅曲线图中，可以看出它的最低点、最高点、对称轴、对称中心、渐进线等，以双曲线图像为例说明，如图 2 所示.

(2) 如何补图：在数学中很多辅助图形的添加其实是固定的. 在立体几何中辅助线该如何添加呢？这里先介绍一段口诀："有了中点配中点，两点相连中位线；等腰三角形出现，顶底中点相连线；有了垂面作垂线，水到渠成理当然".

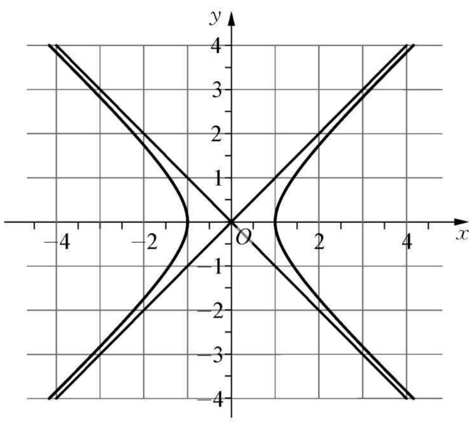


图 2

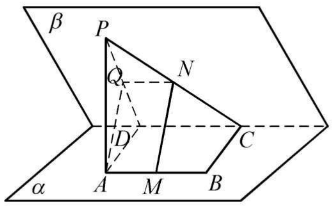


图 3

例 3　如图 3 所示，在二面角 $\alpha-l-\beta$ 中，A、$B\in\alpha$，C、$D\in l$，$ABCD$ 是矩形，$P\in\beta$，$PA\perp\alpha$，且 $PA=AD$，M，N 依次是 AB，PC 的中点. 求证：MN 是异面直线 AB 和 PC 的公垂线.

分析　要证明此题，必须添加适当的辅助线. 根据题设条件中的 N 点是 PC 的中点，可考虑利用"有了中点配中点，两点相连中位线"的辅助线的作法.

证明　选取 PD 的中点 Q，连接 QN、QA，则 QN 是 $\triangle PDC$ 的中位线，$QN\parallel DC$，且 $QN=\frac{1}{2}DC$. 因为 $ABCD$ 是矩形，M 是 AB 的中点，所以 $AM\parallel DC$，且 $AM=\frac{1}{2}DC$，所以 $QN \underline{\parallel} AM$，所以四边形 $AMNQ$ 为平行四边形，所以 $AQ\parallel MN$. 由 $\begin{cases}PA\perp\alpha,\\AB\perp AD,\end{cases}$ 易证 $AB\perp$ 平面 PAD，$CD\perp$ 平面 PAD，所以 $AB\perp AQ$，所以 $AB\perp MN$，因为 $AQ\perp PD$. 又 $CD\perp AQ$，所以 $AQ\perp$ 平面 PCD，即 $AQ\perp$ 平面 β，所以 $AQ\perp PC$，故而，$MN\perp PC$，所以 MN 是异面直线 AB 和 PC 的公垂线.

点评 补图的技巧

① 在三角形中，碰到中点，立即补上某一边的中点，形成中位线(如图 4)；

② 在圆的问题里，碰到切线，就立即作出圆心与切点的连线(如图 5)；

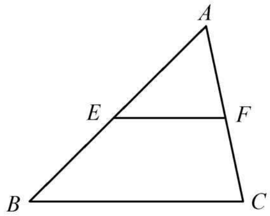


图 4

常用恒等式 $\begin{cases} EF \parallel BC \\ EF = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$

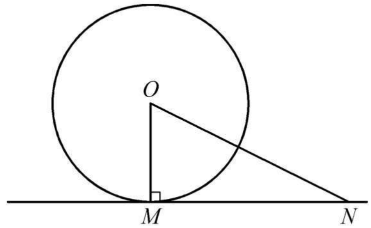


图 5

常用恒等式 $|ON|^2 = |MN|^2 + |OM|^2$

③ 碰到割线，立即连接弦中点与圆心的连线，得到垂直关系(如图 6)；

④ 碰到等腰三角形，就立即作出底边中线，三线合一(如图 7)；

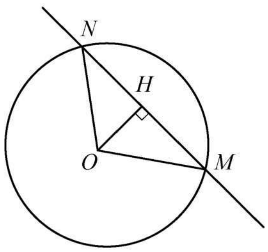


图 6

常用恒等式 $|OM|^2 = \dfrac{1}{4}|MN|^2 + |OH|^2$

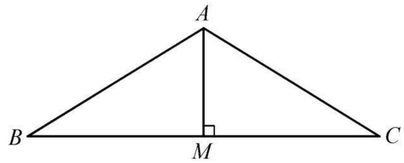


图 7

常用恒等式 $\begin{cases} |BM| = |MC| \\ |AC|^2 = |AM|^2 + |MC|^2 \end{cases}$

⑤ 碰到等腰梯形，立即过上顶点作出底边上的高(如图 8)；

⑥ 碰到三角形的重心，补上中线，交点就是重心，重心到顶点的距离是它到对边中点距离的 2 倍；重心分中线比为 1∶2(如图 9)；

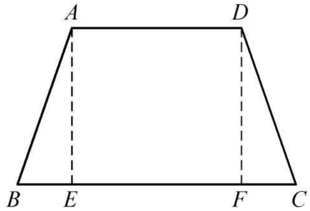


图 8

常用恒等式 $\begin{cases} AD = EF \\ |AB|^2 = |BE|^2 + |AE|^2 \end{cases}$

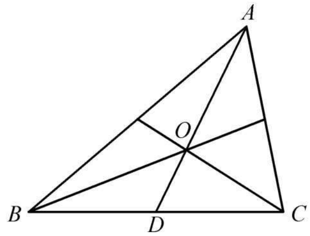


图 9

常用恒等式 $4AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$

⑦ 碰到三角形内心,补上角平分线,交点就是内心(如图 10);

⑧ 碰到三角形外心,补上垂直平分线,交点就是外心(如图 11);

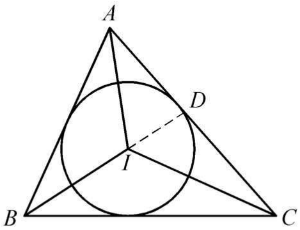


图 10

常用恒等式 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$

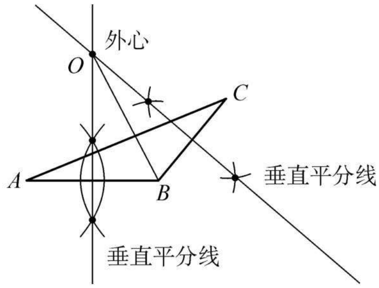


图 11

常用恒等式 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$

⑨ 碰到三角形的垂心,补上高线,交点就是垂心(如图 12);

⑩ 碰到菱形,补上对角线,对角线互相垂直平分(如图 13).

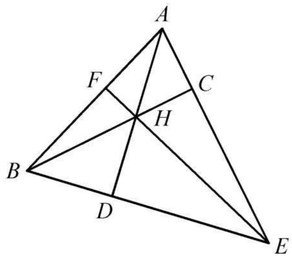


图 12

常用恒等式 $AB^2-BD^2=AE^2-DE^2$

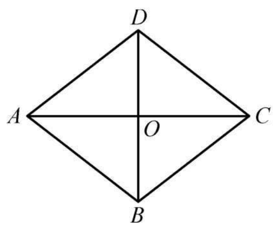


图 13

常用恒等式 $\begin{cases}AC\perp BD\\OD=OB\\AO=OC\end{cases}$

(3) 如何用图:在数学中,数与形乃逻辑与形象,相辅相成.比如抛物线就是二次函数的图形,将数与形结合在一起学习是很有趣的.对于平面图形、空间图形,想象能力很重要.

① 借助函数图像解决方程问题:如果使用一般的求方程的方法来解决方程无济于事时,可以考虑用数形结合的方法来解决.

例 4　已知方程 $|x|=ax+1$ 有一个负根而没有正根,那么 a 的取值范围是(　　).

A. $a>-1$　　B. $a>0$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a=1$

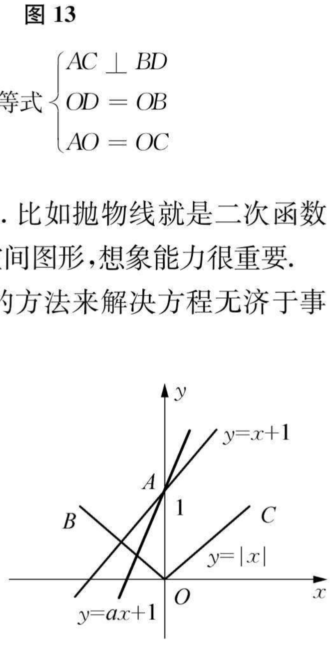


图 14

分析与解　本题可转化为函数 $y=|x|$ 与 $y=ax+1$ 的图像有唯一交点且落在第二象限内.如图 14 所示,可知函数 $y=|x|$ 的图像是第一、二象限坐标轴夹角的平分线,函数

$y=ax+1$ 的图像是经过点 $A(0,1)$ 的直线，从 $y=x+1$ 开始，绕点 A 按逆时针方向旋转到与 y 轴重合前，该直线与 $y=|x|$ 的图像都有唯一交点在 OB 上（即在第二象限内），在其余情况下，两个函数的图像都会有交点在 OC 上，所以斜率 a 的取值范围为 $a\geqslant 1$，故选 C.

点评 若用数形结合的方法，根据问题的具体情形，把数量关系的问题转化为图形性质的问题，结合图形研究，可以避免复杂的讨论，化繁为简.

② 利用图像研究不等式成立的情况.

例 5 若关于 x 的不等式 $x^2<2-|x-t|$ 只有负数解，求实数 t 的取值范围.

分析与解 原不等式可变为 $2-x^2>|x-t|$，分别画出 $y=2-x^2$ 和 $y=|x-t|$ 的图像，如图 15 所示，其中 $y=|x-t|$ 的图像可以由 $y=|x|$ 的图像向左（$t<0$）或向右（$t>0$）平移得到的. 由图可知 $-\frac{9}{4}<t\leqslant -2$.

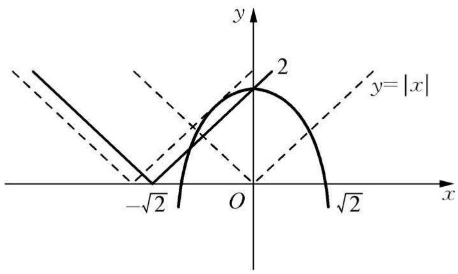


图 15

点评 当一元不等式 $f(x)>g(x)$，左右两边函数容易作图时，此方程根的情况适合用数形结合解决；当二元不等式 $f(x)>ax+b$，左边函数容易作图时，此方程根的情况适合用数形结合解决.

3. 条件与结论的转化

弄清题意的最后一步是能够将条件与结论都转化出来，在这个过程中，挑选什么样的参数来表达题意很重要.

(1) 题目条件局部处理，局部转化

例 6 若对于给定的正实数 k，函数 $f(x)=\frac{k}{x}$ 的图像上总存在点 C，使得以 C 为圆心，1 为半径的圆上，有两个不同的点，到原点距离为 2，则 k 的取值范围是______.

分析与解 根据函数 $f(x)=\frac{k}{x}$ 的图像上存在点 C，设 $C\left(x_0,\frac{k}{x_0}\right)$，则以 C 为圆心，1 为半径的圆为 $(x-x_0)^2+\left(y-\frac{k}{x_0}\right)^2=1$. 由条件，到原点距离为 2 的轨迹为圆 $x^2+y^2=4$，画图 16，将此条件集中转化为 $\begin{cases}(x-x_0)^2+\left(y-\frac{k}{x_0}\right)^2=1,\\ x^2+y^2=4,\end{cases}$ 存在两交点即两圆相交，由此 $1=R-r<\sqrt{x_0^2+\frac{k^2}{x_0^2}}<R+r=3$ 有解，等价转化为 $\begin{cases}x_0^2+\frac{k^2}{x_0^2}>1,\\ x_0^2+\frac{k^2}{x_0^2}<9\end{cases}$ 有解，再将二元不等式分离变量得

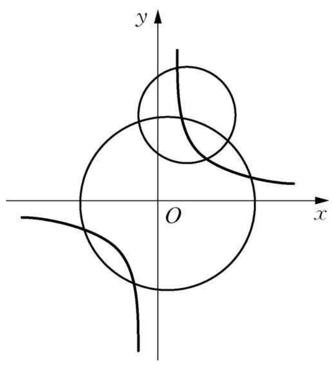


图 16

$\begin{cases}k^2>(1-x_0^2)x_0^2,\\k^2<(9-x_0^2)x_0^2\end{cases}$有解，即$\begin{cases}k^2>[(1-x_0^2)x_0^2]_{\min},\\k^2<[(9-x_0^2)x_0^2]_{\max},\end{cases}$由此得 $k^2<\dfrac{81}{4}$，即 $0<k<\dfrac{9}{2}$.

点评 题目中条件转化时，各层意思转化要到位，择机选择采用等式或不等式计算.

(2) 注意多条件的配合，推出结论

例 7 已知点 $A(-1,0)$ 与点 $B(1,0)$，C 是圆 $x^2+y^2=1$ 上一动点，连接 BC 并延长至 D，使得 $|CD|=|BC|$，求 AC 与 OD 交点 P 的轨迹方程.

分析 如图 17 所示，条件 O 为 AB 中点，C 为 BD 中点，两条件结合，所以 P 为 $\triangle ABD$ 的重心，此题目中的条件转化非一对一进行，是由两个条件转化为一个结论.

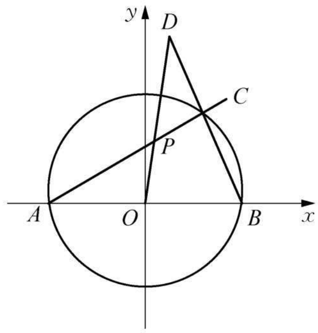


图 17

解 设动点 $P(x,y)$，$C(x_0,y_0)$，则 $D(2x_0-1,2y_0)$. 列方程 $x=\dfrac{2x_0-1}{3}$，$y=\dfrac{2y_0}{3}$，$x_0^2+y_0^2=1$ 消元化简，$x_0=\dfrac{3x+1}{2}$，$y_0=\dfrac{3}{2}y$，得 $(3x+1)^2+(3y)^2=4(y\neq 0)$.

点评 在求轨迹方程的问题中，设的未知数个数总比列的方程多一个.

(3) 条件太多的时候，可处理成规划问题

例 8 设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 l 过 F，且与抛物线 C 交于 M、N 两点，已知当直线 l 与 x 轴垂直时，$\triangle OMN$ 面积为 2(O 为坐标原点).

(Ⅰ)求抛物线 C 的方程；(Ⅱ)是否存在直线 l，使得以线段 MN 为对角线的正方形的第三个顶点恰好在 y 轴上，若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

分析与解 (Ⅰ) 当直线 l 与 x 轴垂直时，$|MN|=2p$，$S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}2p\cdot\dfrac{p}{2}=\dfrac{p^2}{2}=2$，$\therefore p=2$，$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=4x$.

(Ⅱ) 如图 18 所示，设正方形的第三个顶点为 $P(0,y_0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$. 由已知可得 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，即 $(x_1,y_1-y_0)\cdot(x_2,y_2-y_0)=0$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2=0$，$|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PN}|$，即 $x_1^2+(y_1-y_0)^2=x_2^2+(y_2-y_0)^2$. 由 M、N、F 三点共线得：$\dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{y_2}{x_2-1}$，再由 M、N 在抛物线上，$\therefore y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$，将上述等式写成规划问题.

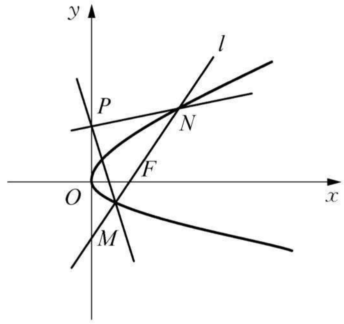


图 18

$$\begin{cases}y_1^2=4x_1 & ①\\ y_2^2=4x_2 & ②\\ \dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{y_2}{x_2-1} & ③\\ x_1x_2+y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2=0 & ④\\ x_1^2+(y_1-y_0)^2=x_2^2+(y_2-y_0)^2 & ⑤\end{cases}$$