主编：蒋忠勇 许静妍

赢在思维

初中数学

拉分题

解题思想与方法360题

代数集训篇

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

赢在思维

初中数学

拉分题

解题思想与方法（360题）

代数集训篇

主编：蒋忠勇 许静妍

编委会

王乃芯 郭妍婕 陆娇蕾 瞿美娜
倪佳娣 许静妍 汤婧雯 郭晓云
郭 嫣 黄伊雯 孙璐怡 倪昳雯
蒋忠勇 杜秀红 邵秀秀 应雨亭

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

赢在思维.初中数学拉分题解题思想与方法. 代数集训篇 / 蒋忠勇,许静妍主编.
—上海:华东理工大学出版社,2015.11
ISBN 978-7-5628-4370-2

Ⅰ.①赢… Ⅱ.①蒋… ②许… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解
Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 201635 号

赢在思维
初中数学拉分题解题思想与方法(360 题)(代数集训篇)

主　　编 / 蒋忠勇　许静妍
策划编辑 / 郭　艳
责任编辑 / 刘　婧
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 视界创意
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　　址:上海市梅陇路 130 号,200237
电　　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252174(编辑室)
传　　真:(021)64252707
网　　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟市华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 11
字　　数 / 275 千字
版　　次 / 2015 年 11 月第 1 版
印　　次 / 2015 年 11 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-4370-2
定　　价 / 28.00 元

联系我们:电 子 邮 箱 press@ecust.edu.cn
官 方 微 博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

華東理工大學出版社
客户端扫码进入天猫旗舰店

前　　言

在初中数学学习过程中，对于一些中等以上难度的题目，即拉分题，大部分同学做相同的题型时有时对有时错，很难拿到高分．究其原因，绝大多数是因为对定型的、静态的基础知识理解不够深入，从而无法灵活掌握发展的、动态的数学思想，进而导致虽然进行了大量的训练但仍旧不得要领．解题方法之所以重要，本质原因就是解题思想与方法是数学学习的灵魂．为此，我们编写本套丛书，将初中数学最常见拉分题的解题思想与方法按代数篇和几何篇系统整理归类，依次阐述，旨在读者触类旁通，迅速得其要领，起到事半功倍作用，大大提高学习效率．

本书可配套《赢在思维——初中数学拉分题解题思想与方法全归纳（代数篇）》使用，精选几年来一些优秀试题和自编一些综合性难题，书后附有参考答案与提示，言简意赅揭示解题奥秘，选择方便的解题技巧，提高效率，增强能力．

本书既可作为初中学生（尤其八年级、九年级）学习数学之参考，也可作为初中数学教师在教学中使用．本书对思想方法的归类，对解题技巧规律的总结等系统学习方法的渗透，只要读者能认真对待，把每一题每一类弄懂弄透，数学能力肯定会迅速提高．哪怕在课余时间稍作尝试也能开阔眼界，扩大思路，提高对数学的兴趣．

以下几个关键问题希望读者能特别关注：辅助线的添加形式；综合性、压轴性问题的解答；思维方法和解题方法的应用场合．

授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷．希望读者们能通过本套丛书收获各自想收获的，同时也希望能得到广大读者的建议与批评，使这套丛书日臻完善，不断超越．

目　录

思想方法篇

解题方法篇

思想方法篇

专题 1 分类讨论

(☆☆)【1.1】解方程 $|x-2|+|2x+1|=7$.

(☆☆)【1.2】三个数 a,b,c 的积为负数，和为正数，且 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{|ab|}{ab}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{|cb|}{cb}$，则 ax^3+bx^2+cx+1 的值为多少？

(☆☆)【1.3】已知 a,b,c,d 是有理数，$|a-b|\leqslant 9$，$|c-d|\leqslant 16$ 且 $|a-b-c+d|=25$，试求 $|b-a|-|d-c|$ 的值.

(☆☆)【1.4】已知有理数 a,b,c,d 满足 $\frac{|abcd|}{abcd}=-1$，试求 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}$ 的值.

(☆☆☆)【1.5】五个有理数 a,b,c,d,e 满足 $|abcde|=-abcde$，试求 $S=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}+\frac{|e|}{e}$ 的最大值.

(☆☆☆)【1.6】如图 1-1 所示，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 为 BC 的中点，点 P 为 AB 上一动点，沿 PE 翻折△BPE 得到△FPE，直线 PF 交 CD 边于点 Q，交直线 AD 于点 G. 连接 EQ，延长 EF 交直线 AD 于点 H. 若△CQE 与△FGH 相似，求 BP 的长.

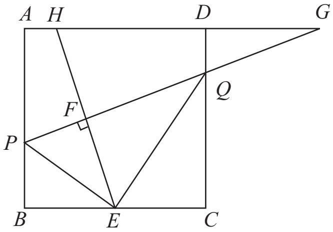

图 1-1

(☆☆☆)【1.7】如图 1-2 所示，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$，点 P 在 AB 上，$AP=2$. 点 E,F 同时从点 P 出发，分别沿 PA,PB 以每秒 1 个单位长度的速度向点 A,B 匀速运动，点 E 到达点 A 后立即以原速度沿 PA 向点 B 运动，点 F 运动到点 B 时停止，点 E 也随之停止. 在点 E,F 运动过程中，以 EF 为边作正方形 $EFGH$，使它与 Rt△ABC 在线段 AB 同侧，设 E,F 运动的时间为 t 秒($t>0$)，正方形 $EFGH$ 与 Rt△ABC 重叠部分面积为 S.

(1) 当 $t=1$ 时，正方形 $EFGH$ 的边长是________；当 $t=3$ 时，正方形 $EFGH$ 的边长是________.

(2) 当 $0<t\leqslant 2$ 时，求 S 与 t 的函数关系式.

(3) 直接答出，在整个运动过程中，当 t 为何值时 S 最大？最大面积是多少？

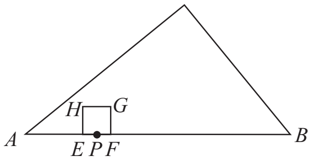

图 1-2

(☆☆☆)【1.8】已知 $AB=2$，$AD=4$，$\angle DAB=90^{\circ}$，$AD\parallel BC$（如图 1-3 所示），E 是射线 BC 上的动点（点 E 与点 B 不重合），M 是线段 DE 的中点.

(1)设 $BE=x$，$\triangle ABM$ 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域.

(2)如果以线段 AB 为直径的圆与以线段 DE 为直径的圆外切，求线段 BE 的长.

(3)连接 BD，交线段 AM 于点 N，如果以 A，N，D 为顶点的三角形与 $\triangle BME$ 相似，求线段 BE 的长.

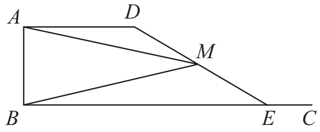

图 1-3

(☆☆☆)【1.9】如图 1-4 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=2$，$AB=5$，$\sin\angle B=\frac{3}{5}$，点 E 是边 BC 上的一个动点（不与点 B，C 重合），作 $\angle AEF=\angle AEB$，使边 EF 交边 CD 于点 F（不与点 C，D 重合），设 $BE=x$，$CF=y$.

(1)求边 BC 的长.

(2)当 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CEF$ 相似时，求 BE 的长.

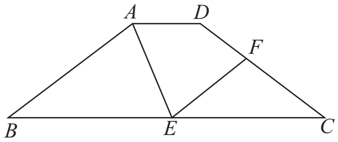

图 1-4

(☆☆☆)【1.10】如图 1-5 所示，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=AC=3\sqrt{2}$，经过这个三角形重心的直线 $DE\parallel BC$，分别交边 AB，AC 于点 D 和点 E，P 是线段 DE 上的一个动点，过点 P 分别作 $PM\perp BC$，$PF\perp AB$，$PG\perp AC$，垂足分别为点 M，F，G. 设 $BM=x$，四边形 $AFPG$ 的面积为 y.

(1)求 PM 的长.

(2)求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域.

(3)连接 MF，MG，当 $\triangle PMF$，$\triangle PMG$ 相似时，求 BM 的长.

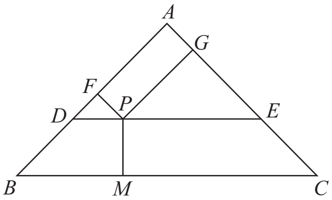

图 1-5

(☆☆☆)【1.11】如图 1－6 所示，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=6$，$AC=8$，点 D 为边 BC 的中点，$DE\perp BC$ 交边 AC 于点 E，点 P 为射线 AB 上的一动点，点 Q 为边 AC 上的一动点，且 $\angle PDQ=90°$.

(1)求 DE，EC 的长.

(2)记线段 PQ 与线段 DE 的交点为点 F，若△PDF 为等腰三角形，求 BP 的长.

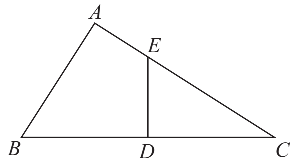

图 1－6

(☆☆☆)【1.12】如图 1－7 所示，已知△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，$AB=6$，O 是 BC 边上的中点，N 是 AB 边上的点(不与端点重合)，M 是 OB 边上的点，且 $MN\parallel AO$，延长 CA 与直线 MN 相交于点 D，点 G 是 AB 延长线上的点，且 $BG=AN$，连接 MG，设 $AN=x$，$BM=y$.

(1)求 y 关于 x 的函数关系式及其定义域.

(2)当△ADN，△MBG 相似时，求 AN 的长.

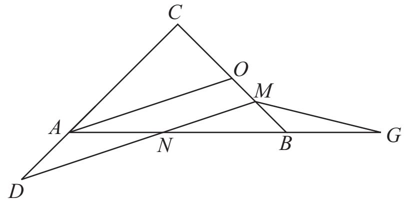

图 1－7

专题 2　方程函数

(☆☆)【2.1】某旅游景点的门票价格是 20 元/人，日接待游客 500 人，进入旅游旺季时，景点想提高门票价格增加利润.经过市场调查发现，门票价格每提高 5 元，日接待游客人数就会减少 50 人.设提价后的门票价格为 x(元/人)($x>20$)，日接待游客的人数为 y(人).

(1)求 y 与 x($x>20$)的函数关系式.

(2)已知景点每日的接待成本为 z(元)，z 与 y 满足函数关系式：$z=100+10y$.求 z 与 x 的函数关系式.

(3)在(2)的条件下，当门票价格为多少时，景点每日获取的利润最大？最大利润是多少？(利润＝门票收入－接待成本)

(☆☆)【2.2】某文具店店主到批发中心选购甲、乙两种品牌的文具盒，预计购进乙品牌文具盒的数量 y(个)与甲品牌文具盒的数量 x(个)之间的函数关系如图 2－1 所示.

(1)求 y 关于 x 的函数解析式(不必写出自变量 x 的取值范围).

(2)该店主用 3 000 元选购了甲品牌的文具盒，用同样的钱选购乙品牌的文具盒.乙品牌文具盒的单价比甲品牌的单价贵 15 元，求所选购的甲、乙品牌文具盒的数量.

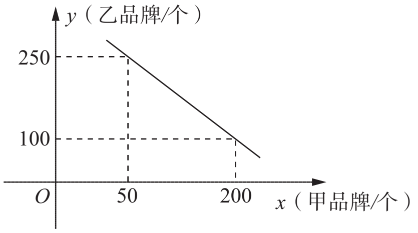

图 2－1

(☆☆)【2.3】我国中东部地区雾霾天气趋于严重，环境治理已刻不容缓.我市某电器商场根据民众健康需要，代理销售某种家用空气净化器，其进价是200元/台.经过市场销售后发现：在一个月内，当售价是400元/台时，可售出200台，且售价每降低10元，就可多售出50台.若供货商规定这种空气净化器售价不能低于300元/台，代理销售商每月要完成不低于450台的销售任务.

(1)试确定月销售量y(台)与售价x(元/台)之间的函数关系式；并求出自变量x的取值范围.

(2)当售价x(元/台)定为多少时，商场每月销售这种空气净化器所获得的利润w(元)最大？最大利润是多少？

(☆☆)【2.4】在对口扶贫活动中，企业甲将经营状况良好的某消费品专卖店，以188万元的优惠价转让给了尚有120万无息贷款还没有偿还的小型福利企业乙，并约定从该店经营的利润中，首先保证企业乙的全体职工每月最低生活费的开支5.6万元后，逐步偿还转让费(不计利息)，维持乙企业的正常运转每月除职工最低生活费外，还需要其他开支2.4万元，从企业甲提供的相关资料中可知，这种热门消费品的进价是每件12元，月销售量Q(万件)与销售量单价P(元)的关系如下表所示：

销售单位 P/元	…	13	14	15	16	17	18	…
月销量 Q/万件	…	7	6	5	4	3	2	…

(1)试确定月销售量Q(万件)与销售量单价P(元)之间的函数关系式.

(2)设月利润为W，则根据题意可得出月利润W与售价P的函数关系式，根据函数性质求出W取最大值时，自变量P的值，从而确定商品的价格.

(3)企业乙脱贫即还清188万元的转让价格和120万元的无息贷款，那么，当月利润最大时，乙能否在3年内脱贫？

(☆☆☆)【2.5】如图 2-2 所示，已知一次函数 $y=-x+7$ 与正比例函数 $y=\frac{4}{3}x$ 的图像交于点 A，且与 x 轴交于点 B.

(1)求点 A 和点 B 的坐标.

(2)过点 A 作 $AC\perp y$ 轴于点 C，过点 B 作直线 $l\parallel y$ 轴. 动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个单位长的速度，沿 O—C—A 的路线向点 A 运动；同时直线 l 从点 B 出发，以相同速度向左平移，在平移过程中，直线 l 交 x 轴于点 R，交线段 BA 或线段 AO 于点 Q. 当点 P 到达点 A 时，点 P 和直线 l 都停止运动. 在运动过程中，设动点 P 运动的时间为 t 秒.

①当 t 为何值时，以 A,P,R 为顶点的三角形的面积为 8？

②是否存在以 A,P,Q 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求 t 的值；若不存在，请说明理由.

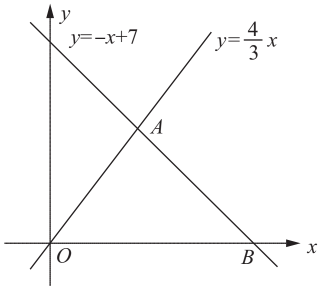

图 2-2

(☆☆☆)【2.6】如图 2-3 所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=m$（m 是大于 0 的常数），$BC=8$，点 E 为线段 BC 上的动点(不与 B,C 重合). 连接 DE，作 $EF\perp DE$，EF 与射线 BA 交于点 F，设 $CE=x$，$BF=y$.

(1)求 y 关于 x 的函数关系式.

(2)若 $m=8$，求 x 为何值时，y 的值最大，最大值是多少？

(3)若 $y=\frac{12}{m}$，要使△DEF 为等腰三角形，m 的值应为多少？

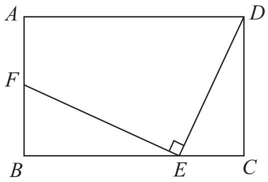

图 2-3

(☆☆☆)【2.7】如图 2－4 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E 是 AB 的中点，过点 E 作 $EF\parallel BC$ 交 CD 于点 F，$AB=4$，$BC=6$，$\angle B=60°$.

(1)求点 E 到 BC 的距离.

(2)点 P 为线段 EF 上的一个动点，过点 P 作 $PM\perp EF$ 交 BC 于点 M，过点 M 作 $MN\parallel AB$ 交折线 ADC 于点 N，连接 PN，设 $EP=x$.

①当点 N 在线段 AD 上时(如图 2－5 所示)，$\triangle PMN$ 的形状是否发生改变？若不变，求出 $\triangle PMN$ 的周长；若改变，请说明理由.

②当点 N 在线段 DC 上时(如图 2－6 所示)，是否存在点 P，使$\triangle PMN$ 为等腰三角形？若存在，请求出所有满足条件的 x 的值；若不存在，请说明理由.

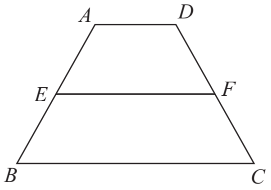

图 2－4

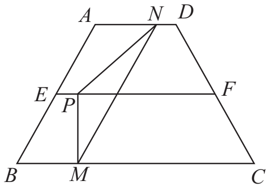

图 2－5

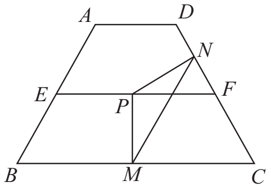

图 2－6

(☆☆☆)【2.8】如图 2－7 所示，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 与 x 轴交于 A，B 两点(点 B 在点 A 的右侧)，与 y 轴交于点 C，连接 BC，以 BC 为一边，点 O 为对称中心作菱形 $BDEC$，点 P 是 x 轴上的一个动点，设点 P 的坐标为$(m, 0)$，过点 P 作 x 轴的垂线 l 交抛物线于点 Q.

(1)求点 A，B，C 的坐标.

(2)当点 P 在线段 OB 上运动时，直线 l 分别交 BD，BC 于点 M，N. 试探究 m 为何值时，四边形 $CQMD$ 是平行四边形，此时，请判断四边形 $CQBM$ 的形状，并说明理由.

(3)当点 P 在线段 EB 上运动时，是否存在点 Q，使$\triangle BDQ$ 为直角三角形？若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

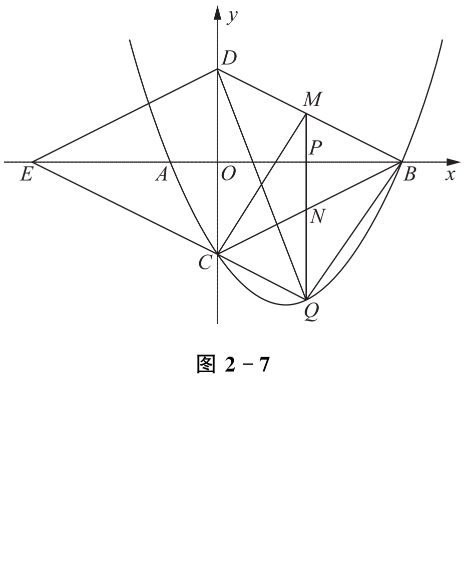

图 2－7

(☆☆☆)【2.9】在平面直角坐标系中,反比例函数与二次函数 $y=k(x^2+x-1)$ 的图像交于点 $A(1,k)$ 和点 $B(-1,-k)$.

(1)当 $k=-2$ 时,求反比例函数的解析式.

(2)要使反比例函数与二次函数都是 y 随 x 增大而增大,求 k 应满足的条件以及 x 的取值范围.

(3)设二次函数的图像的顶点为 Q,当△ABQ 是以 AB 为斜边的直角三角形时,求 k 的值.

(☆☆☆)【2.10】在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=-\frac{m-1}{4}x^2+\frac{5m}{4}x+m^2-3m+2$ 与 x 轴的交点分别为原点 O 和点 A,点 $B(2,n)$ 在这条抛物线上.

(1)求点 B 的坐标.

(2)点 P 在线段 OA 上,从点 O 出发向点 A 运动,过点 P 作 x 轴的垂线,与直线 OB 交于点 E,延长 PE 到点 D,使得 $ED=PE$,以 PD 为斜边,在 PD 右侧作等腰直角△PCD(当点 P 运动时,点 C,D 也随之运动).

①当等腰直角△PCD 的顶点 C 落在此抛物线上时,求 OP 的长.

②若点 P 从点 O 出发向点 A 做匀速运动,速度为每秒 1 个单位,同时线段 OA 上另一个点 Q 从点 A 出发向点 O 做匀速运动,速度为每秒 2 个单位(当点 Q 到达点 O 时停止运动,点 P 也停止运动).过点 Q 作 x 轴的垂线,与直线 AB 交于点 F,延长 QF 到点 M,使得 $FM=QF$,以 QM 为斜边,在 QM 的左侧作等腰直角△QMN(当点 Q 运动时,点 M,N 也随之运动).若点 P 运动 t 秒时,两个等腰直角三角形分别有一条边恰好落在同一条直线上,求此刻 t 的值.

(☆☆☆)【2.11】如图 2－8 所示，已知 A，B 是线段 MN 上的两点，$MN=4$，$MA=1$，$MB>1$. 以 A 为中心顺时针旋转点 M，以 B 为中心逆时针旋转点 N，使 M，N 两点重合成一点 C，构成△ABC，设 $AB=x$.

(1)求 x 的取值范围.

(2)若△ABC 为直角三角形，求 x 的值.

(3)求△ABC 的最大面积.

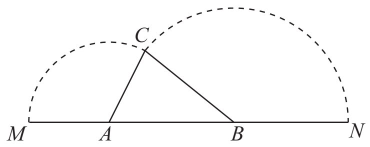

图 2－8

(☆☆☆)【2.12】如图 2－9 所示，直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 和 x 轴，y 轴的交点分别为 B，C，点 A 的坐标是$(-2,0)$.

(1)试说明△ABC 是等腰三角形.

(2)动点 M 从 A 出发沿 x 轴向点 B 运动，同时动点 N 从点 B 出发沿线段 BC 向点 C 运动，运动的速度均为每秒 1 个单位长度. 当其中一个动点到达终点时，它们都停止运动. 设 M 运动 t 秒时，△MON 的面积为 S.

①求 S 与 t 的函数关系式.

②设点 M 在线段 OB 上运动时，是否存在 $S=4$ 的情形？若存在，求出对应的 t 值；若不存在，请说明理由.

③在运动过程中，当△MON 为直角三角形时，求 t 的值.

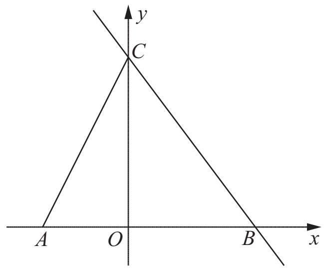

图 2－9

专题 3 转化化归

(☆☆)【3.1】计算 $\left[\left(\frac{4^2}{5^2}+\frac{5^2}{4^2}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{4}\right)\right]\div\left[\left(1+\frac{4}{5}+\frac{5}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^2\right]$.

(☆☆)【3.2】已知 m 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的一个根，求 m^3+2m^2-5m-9 的值.

(☆☆)【3.3】解方程组 $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{2x-y}=3,\\ \frac{3}{x}-\frac{1}{2x-y}=1.\end{cases}$

(☆☆)【3.4】已知 $4a^2+\sqrt{a+2b}+|2b+c|-4a=-1$,求 $\sqrt{a+b+c}$的值.

(☆☆)【3.5】已知$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$,求 x,y,z 的值.

(☆☆☆)【3.6】如图 3-1 所示,在△ABC 中,已知 $AB=AC=2$,点 A 的坐标是$(1,0)$,点 B,C 在 y 轴上.

(1)试判断在 x 轴上是否存在点 P,使△PAB,△PAC 和△PBC 都是等腰三角形.如果存在,这样的点 P 有几个?写出点 P 的坐标;如果不存在,请说明理由.

(2)若 E 在 AB 上,F 在 AC 的延长线上,且 $BE=CF$,EF 交 BC 于点 D,求证:$DE=DF$.

(3)在(2)的条件中,过点 E 作 $EG\perp BC$ 于点 G,试确定 DG 与 BC 的数量关系,并说明理由.

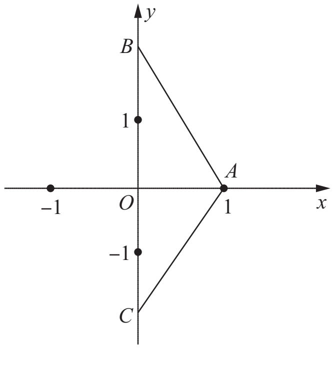

图 3-1