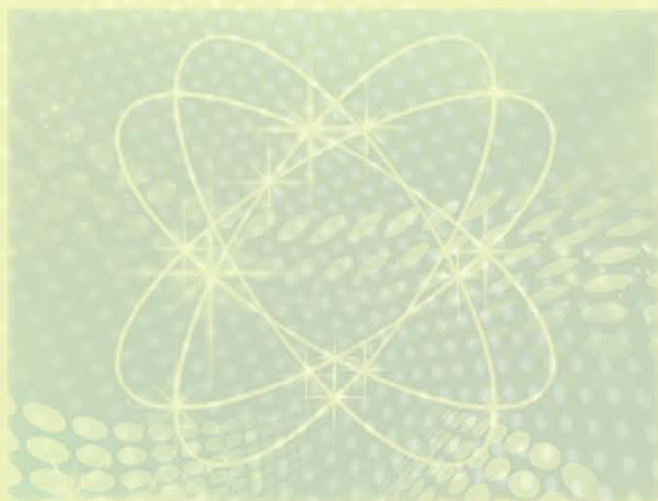


高等数学

李代良 刘丽萍 主编



江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李代良,刘丽萍主编. —南昌:江西高校出版社, 2014. 8

21 世纪高校规划教材

ISBN 978—7—5493—2800—0

I. ①高... II. ①李... ②刘... III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 204622 号

出版发行	江西高校出版社
社 址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮 政 编 码	330046
总编室电话	(0791)88504319
销 售 电 话	(0791)88511423
网 址	www.juacp.com
印 刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照 排	江西太元科技有限公司照排部
经 销	各地新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	22.25
字 数	526 千字
版 次	2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印 数	3000 册
书 号	ISBN 978—7—5493—2800—0
定 价	36.00 元

赣版权登字—07—2014—495

版权所有 侵权必究

目 录

预备知识 函数 /1

任务 1 函数的基本知识 /1

任务 2 初等函数 /5

自我检测 /12

项目一 极限与连续 /15

任务 1 极限的概念与性质 /15

任务 2 函数极限的运算 /21

任务 3 无穷小量与无穷大量 /24

任务 4 两个重要极限 /29

任务 5 函数的连续性 /32

自我检测 1 /37

项目二 导数与微分 /39

任务 1 导数的概念 /39

任务 2 导数的四则运算 /47

任务 3 初等函数的求导 /51

任务 4 隐函数及参数方程所确定的函数的导数 /57

任务 5 高阶导数 /61

任务 6 微分及其运算 /64

自我检测 2 /70

项目三 导数的应用 /73

任务 1 微分中值定理 /73

任务 2 洛必达法则 /77

任务 3 函数单调性的判别 /83

任务 4 函数的极值与最值 /87

任务 5 函数图形的凹凸性与拐点 /92

自我检测 3 /97

项目四 不定积分 /99

- 任务1 不定积分的概念与性质 /99
- 任务2 积分的基本公式和法则 /103
- 任务3 不定积分的积分法 /107
- 自我检测4 /122

项目五 定积分 /125

- 任务1 定积分的概念与性质 /125
- 任务2 微积分的基本公式 /133
- 任务3 定积分的积分法 /137
- 任务4 定积分的应用 /142
- *任务5 广义积分 /148
- 自我检测5 /151

项目六 微分方程 /154

- 任务1 微分方程的基本概念 /154
- 任务2 可分离变量的微分方程 /157
- 任务3 一阶线性微分方程 /161
- 任务4 可降阶的高阶微分方程 /164
- 任务5 二阶常系数齐次线性微分方程 /168
- 任务6 二阶常系数非齐次线性微分方程 /172
- 自我检测6 /177

项目七 向量代数与空间解析几何 /179

- 任务1 向量及其线性运算 /179
- 任务2 向量的乘法运算 /184
- 任务3 平面与直线 /190
- 任务4 曲面与曲线 /197
- 自我检测7 /203

项目八 多元函数微积分 /205

- 任务1 多元函数 /205
- 任务2 偏导数 /209
- 任务3 全微分 /213
- 任务4 复合函数的求导法则 /218
- 任务5 二重积分 /223
- 任务6 二重积分的计算方法 /226

自我检测 8 /231

项目九 级数 /232

任务 1 常数项级数的概念和性质 /232

任务 2 正项级数及其审敛法 /236

任务 3 绝对收敛与条件收敛 /241

任务 4 幂级数 /244

自我检测 9 /249

项目十 线性代数初步 /251

任务 1 行列式的定义和性质 /251

任务 2 矩阵的概念及其运算 /259

任务 3 逆矩阵 /265

任务 4 矩阵的初等变换 矩阵的秩 /270

任务 5 分块矩阵 /273

任务 6 线性方程组 /277

自我检测 10 /285

项目十一 数学软件 Mathematica 应用 /288

任务 1 数、变量与数学函数 /288

任务 2 Mathematica 在方程与图形中的应用 /294

任务 3 Mathematica 在微积分中的应用 /298

任务 4 Mathematica 在线性代数中的应用 /305

任务 5 Mathematica 在统计中的应用 /310

自我检测 11 /312

附录 /313

I 初等数学常用公式 /313

II 常用的曲线与曲面 /317

习题参考答案 /326

参考文献 /347



学习目标

◇ 掌握函数的概念、函数的表示方法和基本性质；掌握复合函数概念及其分解方法.

◇ 熟悉函数定义域、值域的求法和六类基本初等函数的表达式、图形和性质，会建立简单的函数关系式.

◇ 了解初等函数和性质及分段函数的特点.

任务 1 函数的基本知识

【案例 1】 设有初始本金 2 000 元，银行年储蓄利率为 4%.

试求：

(1) 按单利计算，3 年末的本利和是多少？

(2) 按复利计算，3 年末的本利和是多少？

分析问题：要解决案例 1 提出的问题，确定函数关系，需要掌握以下知识点：

1. 函数的定义；

2. 变量、定义域、对应法则.

相关知识

一、函数的定义

定义 设 x 和 y 是两个变量， D 是一给定的非空数集，如果对于任意 $x \in D$ ，按照某一确定的对应法则 f ，总有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$ ，数集 D 称为这个函数的定义域，数集 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域， x 称为自变量， y 称为因变量.

二、函数的两个要素

1. 函数的定义域

确定函数的要素有两个，其一是定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，即能够使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

【例 1】 求 $y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{4-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数 $y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{4-x^2}$ 有意义，

$$\text{必须有} \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 4-x^2 \neq 0. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x \geq -2, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

所以函数 $y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{4-x^2}$ 的定义域为 $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

注 求函数定义域时应遵守以下原则:

- (1) 代数式中分母不能为零.
- (2) 偶次根式内表达式非负.
- (3) 基本初等函数要满足各自的定义要求.
- (4) 对于表示实际问题的解析式, 还应保证符合实际意义.

2. 函数的对应法则

确定函数的另一个要素是对应法则. 函数 $y = f(x)$ 中表示对应法则的记号是 f , 函数 $y = g(x)$ 中表示对应法则的记号是 g . 当同时考察几个不同的函数时, 就需要用不同的函数记号以示区别.

由函数定义可知, 当函数的定义域和函数的对应法则确定后, 这个函数就完全确定了. 因此, 两个函数只有它们的定义域和对应关系完全相同时, 这两个函数才是相同的, 而与变量符号无关. 如 $y = |x|$ 与 $z = \sqrt{v^2}$ 就是相同的函数.

【例 2】 设 $f(x) = 2x^2 - 3$, 求 $f(-1), f(x_0)$.

解 $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 = -1,$
 $f(x_0) = 2(x_0)^2 - 3 = 2x_0^2 - 3.$

三、函数的表示法

【例 3】 我们去银行存钱, 假设一年定期整存整取的年利率为 4.14% , 则存款金额 x 与一年到期时的利息 y 之间的对应关系见表 1.

表 1

存款金额 x / 元	500	1 000	2 000	5 000
一年到期时的利息 y / 元	20.7	41.4	82.8	207

对于本题中的每一个存款金额 x , 都有唯一确定的存款利息 y 与之对应. 因此, 上表给出了一个函数关系.

符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

其定义域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 如图 1 所示.

取整函数

$$y = [x] = n, n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, x 为任意实数, 如图 2 所示.

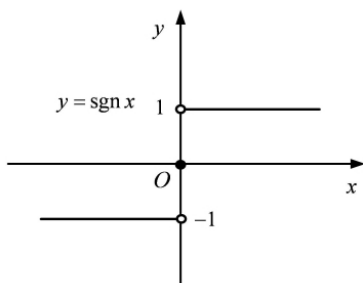


图 1

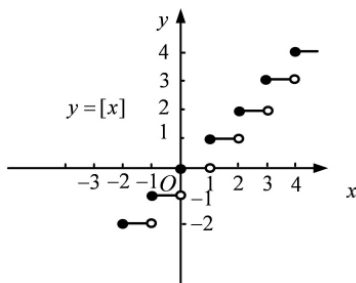


图 2

分段函数

在自变量的不同取值范围内,其对应关系用不同表达式表示的函数,称为分段函数,如

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0, \\ x^2 & 0 \leq x < 2, \\ \ln x & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

就是一个定义在区间 $(-\infty, 5]$ 上的分段函数.

常用的函数表示方法有表格法、图像法、解析法.

(1) 将自变量的值与对应的函数值列成表格以表示函数的方法叫表格法,如三角函数表、对数表及许多的财务报表等.

(2) 用图像来表示自变量值与函数值的关系的方法叫图像法,它的特点是较直观.

(3) 用数学表达式表示自变量和因变量的对应关系的方法叫解析法,如 $y = \sin x$, $y = 2x + 1$ 等,它的特点是便于推理与演算.

四、函数的性质

1. 有界性

如果对属于某一定义区间 I 的任何 x , 总有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 其中 M 是一个与 x 无关的常数, 那么我们称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界; 否则称为无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数, 有界函数的图像夹在直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间.

例如, 函数 $y = \cos x$ 是有界函数, 因为在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内总有 $|\cos x| \leq 1$.

2. 单调性

设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加; 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少, 区间 (a, b) 称为单调区间.

单调增函数的图形表现为自左至右是上升的; 单调减函数的图形表现为自左至右是下降的.

【例 5】 判断 $f(x) = \ln x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

解 设 x_1, x_2 是 $(0, +\infty)$ 上任意两点, 且不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \ln x_1 + x_1 - (\ln x_2 + x_2) = \ln \frac{x_1}{x_2} + (x_1 - x_2)$$

因为

$$0 < x_1 < x_2$$

所以 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1, \ln \frac{x_1}{x_2} < 0, x_1 - x_2 < 0$

因为 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

3. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 定义域 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数; 如果对任意 $x \in D$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数.

偶函数图形关于 y 轴对称, 奇函数图形关于原点对称.

既不是奇函数也不是偶函数的函数, 称为非奇非偶函数.

【例 6】 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = x^4 - x^2 + 8 \quad (2) f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

解 (1) 因为 $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 8 = x^4 - x^2 + 8 = f(x)$, 即 $f(-x) = f(x)$.
所以, $f(x) = x^4 - x^2 + 8$ 是偶函数.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } f(-x) &= \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \text{所以 } f(-x) + f(x) &= \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lg 1 = 0. \end{aligned}$$

所以, $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

4. 周期性

设 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在非零常数 T , 使对于任意 $x \in D, x + T \in D$, 有 $f(x + T) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 是周期函数, 常数 T 为函数 $y = f(x)$ 的周期. 若周期函数存在最小正周期, 则称此最小正周期为基本周期, 也简称周期. 周期函数的图像在每一个周期内是重复出现的.

解决案例 1 提出的问题:

解 补充单利计算和复利计算的区别:

单利计算就是指只有本金计算利息, 例如, 1 200 元于年初存入银行, 在利率是 6% 的情况下, 3 年后会得到 $1\,200 + 1\,200 \times 6\% \times 3 = 1\,416$ 元, 其中利息为 216 元. 复利计算是指不仅本金计算利息, 利息也计算利息, 也就是通常所说的“利滚利”. 例如, 1 200 元于年初存入银行, 在利率是 6% 的情况下, 3 年后会得到 $1\,200 + (1 + 6\%)^3 = 1\,429$ 元, 其中利息为 229 元. 在这个例子中, 本金、利率、期限相同的情况下, 单利和复利利息相差 13 元. 因为在单利计算下, 第二年初本金依然是 1 200 元; 而复利计算下, 本金变为 1 272 元, 第一年所产生的 72 元利息也要计算利息, 所以对于第二年来说本金增加了, 同理第三年本金也增加了, 达到 1 348 元.

(1) 本金 $P = 2\,000$ 元, 年利率 $r = 0.04$, 存期 3 年, 由单利计算公式知

$$S_3 = P(1 + n \cdot r) = 2\,000 \times (1 + 3 \times 0.04) = 2\,240(\text{元});$$

(2) 由复利计算公式 知

$$S_3 = P(1 + r)^n = 2\,000 \times (1 + 0.04)^3 \approx 2\,249.73(\text{元}).$$

习题 1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2}{2x-1};$$

$$(2) y = \sqrt{3x+5};$$

$$(3) y = \ln(x^2 - 3x + 2);$$

$$(4) y = \tan 2x;$$

$$(5) y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x+2};$$

$$(6) y = 2\tan x - \sin 2x.$$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$, 求 $f(0), f(1), f(1+x), f(-x), f(\frac{1}{x})$.

3. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & (x < -2), \\ \sin x & (-2 < x < 2), \\ 1+x & (x > 2). \end{cases}$$

求 $f(-4), f(0), f(4)$.

4. 指出下列函数的奇偶性:

$$(1) y = 2x^4 - 5x^2 + 1;$$

$$(2) y = x \sin x;$$

$$(3) y = \sin x + \tan x;$$

$$(4) y = \lg \frac{1-x}{1+x}.$$

5. 判断下列函数的单调性:

$$(1) y = -x + 2;$$

$$(2) y = 2x^2 (x \geq 0).$$

任务 2 初等函数

【案例 2】 用燃气烧水做饭是必要的,但燃气价格不断上涨,怎样用气才能做到节约呢?某人根据自己家烧开水的情况记录下了表 2 的数据,请帮忙计算怎样烧开水最省燃气?

表 2

旋钮位置	燃气表开始时读数 /m ³	水开时燃气表读数 /m ³	所用燃气量 /m ³
18°	9.080	9.210	0.130
36°	8.958	9.080	0.122
54°	8.819	8.958	0.139
72°	8.670	8.819	0.149
90°	8.498	8.670	0.172

分析问题:要解决案例 2 提出的问题,确定函数关系,需要掌握以下知识点:

1. 函数图形的拟合;
2. 建立函数关系;
3. 函数知识的综合运用.

相关知识

一、初等函数

1. 基本初等函数

常函数: $y = c$ (c 为常数).

幂函数: $y = x^a$ (a 为常数).

指数函数: $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, a 为常数) .

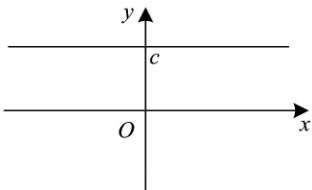
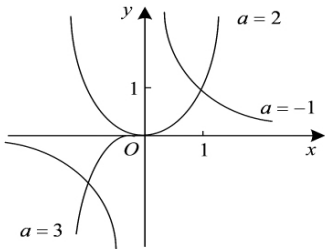
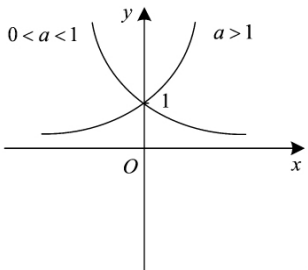
对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, a 为常数) .

三角函数: $y = \tan x, y = \cos x, y = \sin x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x, y = \operatorname{arcsec} x, y = \operatorname{arccsc} x$.

以上六类函数统称为基本初等函数, 为了便于复习, 现将它们的定义域、值域、图像和性质列表, 见表 3.

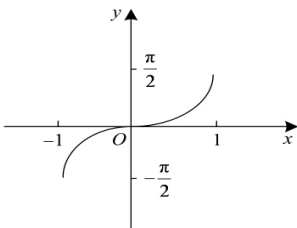
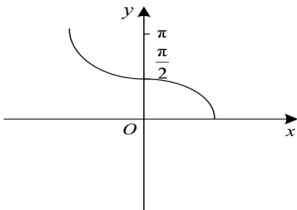
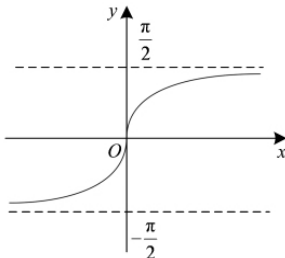
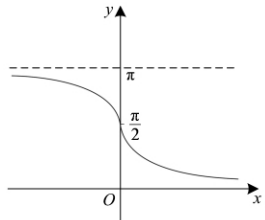
表 3

函数	表达式	定义域与值域	图 像	特 性
常函数	$y = c$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \{c\}$		偶函数
幂函数	$y = x^a$	定义域与值域随 a 的不同而不同		若 $a > 0$, y 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加 若 $a < 0$, y 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y = a^x$ $a > 0, a \neq 1$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		$a > 1$, a^x 单调增加 $0 < a < 1$, a^x 单调减少

续表 3

函数	表达式	定义域与值域	图 像	特 性
对数函数	$y = \log_a x$ $a > 0, a \neq 1$	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		$a > 1, \log_a x$ 单调增加 $0 < a < 1, \log_a x$ 单调减少
正弦函数	$y = \sin x$	$x \in [-\infty, +\infty]$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期 2π , 有界
余弦函数	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期 2π , 有界
正切函数	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π
余切函数	$y = \cot x$	$y \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π

续表 3

函数	表达式	定义域与值域	图 像	特 性
反正弦函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		奇函数, 单调增加, 有界
反余弦函数	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少, 有界
反正切函数	$y = \arctan x$	$y \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数, 单调增加, 有界
反余切函数	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成的并可用一个式子表示的函数, 叫做初等函数. 例如, $f(x) = 2^{x^2+1} + 5\ln^4 x$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{\cot \frac{x}{3}}$ 等都是初等函数. 而 $y = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ 不满足有限次运算, $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$ 不是一个解析式子表示, 因此都不是初等函数.

二、反函数

定义 设函数 $y = f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数, 其值域为 M . 如果对于数集 M 中的每

个 y , 在数集 D 中都有唯一确定的 x 使 $y = f(x)$ 成立, 则得到一个定义在数集 M 上的以 y 为自变量, x 为因变量的函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$, 它叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数. 习惯上用 x 表示自变量, 因此函数 $y = f(x)$ 的反函数可表示为 $y = f^{-1}(x)$, 它的图像与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称 (见图 3). 并非任何函数都存在反函数. 但单调函数一定存在反函数, 且有如下定理.

定理 如果函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 是单调增加 (或减少) 的, 则一定存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, $x \in M$, 且该反函数也是单调增加 (或减少) 的.

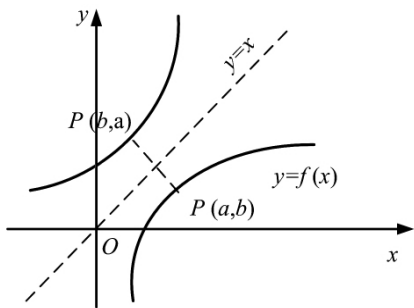


图 3

求反函数的步骤是从 $y = f(x)$ 中解出 x , 得到 $x = f^{-1}(y)$, 再将 x 和 y 互换即可.

【例 1】 求 $y = 2x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 2x + 1$ 得 $x = \frac{y-1}{2}$, 互换字母 x, y , 得所求反函数为 $y = \frac{x-1}{2}$.

三、复合函数

定义 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 如果 $u = \varphi(x)$ 的值域或其部分包含于 $y = f(u)$ 定义域中, 则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数, 称为 x 的复合函数, 记为 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 x 是自变量, u 是中间变量.

【例 2】 设 $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = \arccos x$, 求 $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)} = e^{\arccos x}$
 $\varphi[f(x)] = \arccos f(x) = \arccos e^x$
 $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \arccos \frac{1}{x}$.

【例 3】 指出下列复合函数的复合过程.

$$(1) y = \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (2) y = \ln (\tan e^{x^2 + 2\sin x})$$

解 (1) $y = \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 是由 $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = w^{-\frac{1}{2}}$ 和 $w = x^2 + 1$ 复合而成.

(2) $y = \ln (\tan e^{x^2 + 2\sin x})$ 是由 $y = \ln u$, $u = \tan v$, $v = e^w$, $w = x^2 + 2\sin x$ 复合而成, 其中 $x^2 + 2\sin x$ 是简单函数.

注 并非任何两个函数都可以复合. 例如, $y = \arcsin u$ 和 $u = x^2 + 2$ 就不能复合, 因为 $x^2 + 2 \geq 2$, 而 $y = \arcsin u$ 的定义域是 $[-1, 1]$.

四、建立函数关系举例

为了解决应用问题,先要给问题建立数学模型,即建立函数关系.为此需要明确问题中的因变量与自变量,再根据题意建立等式,从而得出函数关系,再确定函数的定义域.应用问题的定义域,除使函数的解析式有意义外,还要考虑变量在实际问题中的含义.下面就一些简单实际问题,说明建立函数关系的过程.

【例 4】 某市场对西红柿的批发价格作了如下规定:批发量不超过 50kg 为 $1\text{元}/\text{kg}$;批发量不超过 100kg 且超过 50kg 的部分为 $0.8\text{元}/\text{kg}$;批发量超过 100kg 的部分为 $0.5\text{元}/\text{kg}$.设批发量为 $x\text{kg}$,总费用为 $y\text{元}$,试建立 y 与 x 的函数关系.

解 由于批发量的多少决定批发价格,所以,建立函数关系应按批发量分段表示.因此有

$$y = \begin{cases} x & (x \leq 50), \\ 50 + 0.8(x - 50) & (50 < x \leq 100), \\ 50 + 0.8(100 - 50) + 0.5(x - 100) & (x > 100). \end{cases}$$

即

$$y = \begin{cases} x & (x \leq 50), \\ 0.8x + 10 & (50 < x \leq 100), \\ 0.5x + 40 & (x > 100). \end{cases}$$

其图像如图 4 所示.

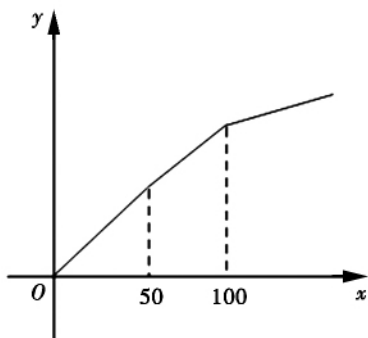


图 4

【例 5】 一物体做直线运动,已知所受阻力 f 的大小与其运动速度 v 成正比,方向相反.设物体的速度为 $100\text{米}/\text{秒}$ 时,所受阻力为 1.98牛顿 ,试建立 f 与 v 的函数关系.

解 因为 f 与 v 成正比,方向相反,所以可设 $f = kv$. 由题设知,当 $v = 100$ 时, $f = 1.98$, 于是

$$1.98 = 100k,$$

得

$$k = 1.98 \times 10^{-2},$$

因此,有函数关系

$$f = 1.98 \times 10^{-2} v.$$

【例 6】 在公共电话亭打市内电话,每 3min 收费 0.4元 ,不足 3min 按 3min 收费,求电话收费与用时 t 的函数关系.

解 为了表达方便,引入取整函数的记号:函数 $y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如 $[0.5] = 0, [1.02] = 1, [3] = 3$, 于是电话收费 S (单位:元) 与用时 t (单位: min) 的函数关系可写成

$$S = \begin{cases} 0.4[\frac{t}{3} + 1] & (t \neq 3k), \\ 0.4 \times \frac{t}{3} & (t = 3k). \end{cases}$$

其中 $t > 0, k = 1, 2, \dots$.

解决案例 2 提出的问题:

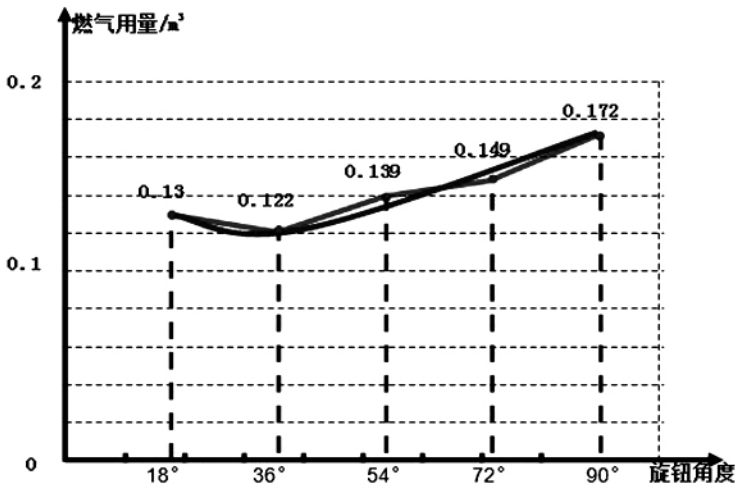
解 方法:

1. 利用数据拟合函数,建立旋钮位置与烧开一壶水燃气用量的函数解析式.
2. 利用函数解析式求最小用量.
3. 对结果的合理性作出检验分析.

基本步骤:

步骤 1:

实验:在直角坐标系上标出旋钮位置与烧开一壶水燃气用量的点.



步骤 2:

拟合函数:根据燃气用量的变化过程,用二次函数近似表示.

设函数式为 $y = ax^2 + bx + c$,

取三点 $(18, 0.130), (36, 0.122), (90, 0.172)$ 代入函数式,

得方程组

$$\begin{cases} 18^2 a + 18b + c = 0.130 \\ 36^2 a + 36b + c = 0.122 \\ 90^2 a + 90b + c = 0.172 \end{cases}$$

解得 $a = 1.903 \times 10^{-5}, b = -1.4722 \times 10^{-3}, c = 1.5033 \times 10^{-1}$.

则函数式为

$$y = 1.903 \times 10^{-5} x^2 - 1.4722 \times 10^{-3} x + 1.5033 \times 10^{-1}.$$

步骤 3:

求最小用气量:燃气用量最少时的旋钮位置,实际上是求函数的最小值点 x_0 .

$$\begin{aligned}x_0 &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-1.4722 \times 10^{-3}}{2 \times 1.9033 \times 10^{-5}} \approx 39^\circ \\y_0 &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\&= \frac{4 \times 1.9033 \times 10^{-5} \times 1.5033 \times 10^{-1} - (1.4722 \times 10^{-3})^2}{4 \times 1.9033 \times 10^{-5}} \\&\approx 0.1218(m^3)\end{aligned}$$

步骤 4:

检验分析:取旋转 39° 的旋钮位置,烧一壶开水,所得实际用气量是不是 $0.1218m^3$.

如果基本吻合,就可以依此作结论;如果相差大,特别是用量大于 0.122 ,最小值点就不是 39° ,说明三个数据取得不好,可以换另外的点重新计算,然后再检验,直至结果与实际比较接近就可以了.

习题 2

1. 求下列函数的反函数:

$$(1)y = 3x + 2; \quad (2)y = e^{x-1};$$

$$(3)y = x^3 + 1.$$

2. 指出下列函数的复合过程:

$$(1)y = \sqrt{\sin(x^2 + 1)}; \quad (2)y = \cos^2(3x + 1);$$

$$(3)y = (\arctan \frac{x+1}{3})^2; \quad (4)y = \sqrt[5]{\ln \sin^3 x}.$$

3. 在半径为 R 的球内做内接圆柱体,试或将圆柱体的体积 V 表示为高 x 的函数.

4. 某市出租车的费用规定:起步价为(五公里)10元,以后为每公里 1.8 元. 试建立出租车费用 y 与行驶里程 x 的函数关系.

5. 有一边长为 a 的正方形铁片,从它的四个角截去相等的小方块,然后折起各边做成一个无盖的小盒子,求它的容积与截去小方块边长之间的函数关系式.

6. 一物体做直线运动,已知阻力 f 的大小与物体运动的速度 v 成正比,但方向相反. 当物体以 $1m/s$ 的速度运动时,阻力为 $1.96 \times 10^{-2} N$,建立阻力与速度之间的函数关系.

7. 某运输公司规定 $1000kg$ 货物的运价为:在 a 千米内(含 a 千米),每千米 k 元;超过 a 千米,每增加 1 千米为 $\frac{4}{5}k$ 元. 试建立 $1000kg$ 货物的运价 y 和运程 s 之间的函数关系.

自我检测

1. 填空题