普通高等教育“十三五”规划教材

材料物理数理基础

THE MATHEMATICAL BASIS OF MATERIALS PHYSICS

王疆瑛　张景基　编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

材料物理数理基础

王疆瑛　张景基　编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

材料物理数理基础 / 王疆瑛,张景基编. —上海:华东理工大学出版社,2016.12

ISBN 978-7-5628-4893-6

Ⅰ.①材… Ⅱ.①王… ②张… Ⅲ.①材料科学-物理学 Ⅳ.①TB303

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 003915 号

内容简介

本书是作者根据多年授课讲义编写而成。全书共 11 章,第 1 章至第 4 章主要包括数学物理方程的定解问题、行波法与积分变换法、分离变量法和特殊函数等数学物理方程;第 5 章至第 9 章主要包括量子力学基本观念、薛定谔方程和波函数、量子力学中的数学表示、量子力学的近似方法、自旋与全同粒子等量子力学的基本原理;第 10 章与第 11 章主要介绍经典统计力学基础、量子统计力学基础等统计力学的基本原理。

本书可作为高等院校工科类材料专业及相关专业本科教材,也可作为教师参考用书。

策划编辑 / 周　颖
责任编辑 / 崔婧婧
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地址:上海市梅陇路 130 号,200237
电话:021-64250306
网址:www.ecustpress.cn
邮箱:zongbianban@ecustpress.cn
印　　刷 / 江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本 / 787mm×1092mm　1/16
印　　张 / 19.25
字　　数 / 479 千字
版　　次 / 2016 年 12 月第 1 版
印　　次 / 2016 年 12 月第 1 次
定　　价 / 58.00 元

前言 PREFACE

当前一般材料专业的物理知识体系的课程是由数学物理方法、量子力学基础、统计物理学基础、固体物理、材料物理性能等课程组成的，以上课程均单独开设，知识涵盖面广且信息量大，涉及的理论知识比较抽象，学时较多，知识点分散，学生学起来会感觉难度较大。编者根据工科材料类专业中对物理知识体系的需求，针对工科大学生的特点，参阅了大量的教材，以“数学物理方法、量子力学、统计物理学”等内容为基础进行编写，希望通过对本书的学习能为后续专业课程如固体物理基础、磁性材料、固体发光基础等的学习奠定基础。教材内容涉及数学物理方程的建模、数学物理方程的解题方法、量子力学基本理论的建立、量子力学基本理论的应用以及统计物理基础等知识，基本上涵盖了材料类专业所需物理体系基本理论数理基础的核心内容。本教材的特点是突出物理基本原理和数学方法，启迪学生科学思维，提高学生运用数学方法和基本原理解答习题的能力，提高解决实际问题的能力。

全书共 11 章，第 1 章到第 4 章主要内容为数学物理方程。主要包括三类典型数学物理方程、定解条件和定解问题等的建立，使读者了解从材料物理、力学以及工程技术问题中抽象出数学问题，建立数学物理方程的基本方法。还介绍了两种求解无界区域内定解问题的方法：行波法与积分变换法。以及直角坐标系、极坐标系、球坐标系和柱坐标系等典型数学物理方程有界区域的分离变量法。使读者了解复杂的偏微分方程如何简化为多个单变量的常微分方程，锻炼读者分析、运算以及解决问题的能力。第 5 章至第 9 章主要包括量子力学基本概念、薛定谔方程和波函数、量子力学中的数学表示、量子力学的近似方法、自旋与全同粒子等量子力学的基本原理，使读者了解量子力学的基本原理及其应用，体会创新思想在科学研究中的重要性和数学物理方程如何应用于解决量子力学问题。第 10 章与第 11 章主要介绍了经典统计力学基础、量子统计力学基础等统计力学的基本原理，使读者了解如何运用统计方法由体系的微观状态推引出体系的宏观性质及规律性。本书的附录提供了有关常微分方程和高等数学的常用数学公式，便于读者学习。

本教材每章后都留有一定量的习题，这些习题是为了巩固每章知识点和检验知识掌握程度而设置的。为了便于教师的讲授和学生自我检查，本教材给出了习题的最终答案。

受学时的限制，书中带有 * 号的内容建议选修，对于本教材未涉及的内容，有兴趣的读者可查阅相关的参考书。

限于作者的知识水平，不当之处在所难免，敬请广大读者不吝指正。

编者

目录

CONTENTS

第1章 数学物理方程的定解问题

所谓数学物理方程(简称数理方程)是指从物理学和工程科学与技术中导出的反映客观物理量在各个地点、各个时刻相互之间制约关系的一些偏微分方程(有时也包括常微分方程和积分方程)。这些偏微分方程是人类在对很多物理现象进行研究,总结出相应的物理规律,并将物理规律转化为数学形式而得到的。例如,在材料物理、材料力学中有一类所谓的振动或波的现象,如弹性体的振动、光波、电磁波等,它们虽各自有其特殊的物理现象,但都有一个共性——波动,因此在数学上均能用波动方程来描述它们的运动规律。物理规律反映了同一类物理现象的共同规律,物理规律用偏微分方程表达出来,叫作数学物理方程,简称数理方程。就物理现象而言,各个具体问题的特殊性在于研究对象所处的特定条件,即初始条件和边界条件。在数学上,初始条件和边界条件合称为定解条件。在给定的定解条件,求解数学物理方程,叫作数学物理定解问题,简称定解问题。对于数学物理方程,需要讨论各种典型问题的解,通过和实验或观测结果比较,来检验相关的物理理论,从而加深人们对有关自然规律的认识,甚至预言新的现象。

本章主要讨论偏微分方程的基本概念,通过物理学的一些定律,从一些材料物理现象归结出三类典型数学物理方程、定解条件和定解问题等,使读者了解从材料物理、力学以及工程技术问题中抽象出数学问题,建立数学物理方程的基本方法。

1.1 基本概念

1.1.1 偏微分方程的相关概念

含有自变量、未知函数及其导数的方程称为微分方程。自然科学和工程技术中许多规律都可以用微分方程来描述。当方程中的未知函数含有两个以上自变量时,称此方程为偏微分方程,如:

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right)=0 \tag{1-1}$$

式中,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量;u 为未知函数;$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$。

1. 方程的阶

出现在方程中未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程的阶数。如式(1-1)就是一个 m 阶偏微分方程。

2. 线性和非线性微分方程

如果一个偏微分方程对于未知函数及它的所有偏导数来说都是线性的，且方程中的系数都仅依赖于自变量，那么这样的偏微分方程就称为线性偏微分方程，否则称为非线性偏微分方程。例如，一个含有变量 x,y 的未知函数，满足的方程为

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C(x,y)=f(x,y) \tag{1-2}$$

式(1-2)就是一个二阶线性偏微分方程。

3. 齐次和非齐次方程

方程中不含未知函数及其导数的项称为自由项，当自由项为零时，称方程为齐次方程，否则称为非齐次方程。式(1-2)中 $f(x,y)$ 就是自由项，当 $f(x,y)=0$ 时，方程为二阶线性齐次方程，否则为非齐次方程。

1.1.2 数学物理方程的一般性问题

用数理方程研究物理问题的步骤是以材料科学、物理学与工程技术中的具体问题作为研究对象，简单地说，是把对物理问题的研究“翻译”为对数学问题的研究。为了使这个“翻译”及其研究工作做得既完整又准确，一般需要三个步骤：首先求出该问题所服从的数理方程，其次要正确写出该问题的定解条件，最后求出数理方程满足定解条件的解。所谓定解条件，即系统所处的环境，以及研究对象的特定历史，又分别称为边界条件和初始条件。定解问题的适定性包括：①有解；②唯一；③稳定。

1. 确定定解问题

在材料科学或物理学中，经常需要研究某个物理量（如位移、温度、浓度以及电势分布等）在空间某个区域的分布和随时间变化的规律。数学物理方程是从物理问题中导出反映客观物理量在各个地点、各个时刻相互之间制约关系的数学方程。换言之，是物理过程的数学表达，如牛顿定律、胡克定律、热传导定律、浓度扩散定律、热量守恒定律、电荷守恒定律、高斯定律、电磁感应定律等。

从物理规律角度来分析，需考虑研究区域物理问题，才能确定反映物理规律的数学物理方程。数学物理方程描述的是同一类物理现象的共同规律，反映了物理量变化的最本质关系。要解决具体的物理问题必须考虑研究区域所处的物理状态，即确立具体问题在研究区域所满足的约束边界条件和时间初值条件，也就是所谓的“定解条件”。简而言之，定解问题的确定就是将研究的物理问题利用数学语言对应翻译为数学问题，同时利用物理规律，确定能够恰当反映物理规律的数学方程（泛定方程）和定解条件的过程。

2. 求解定解问题

提出了定解问题，实际上就完成了将物理问题“翻译”成数学语言的解释工作，下面紧接着面临的，就是对所提出的定解问题进行求解，数理方程的求解方法大致可归纳为以下几种：

(1) 行波法（或达朗贝尔解法）；

(2) 分离变量法；

(3) 积分变换法；

(4) 格林函数（或积分公式）法；

(5) 保角变换法；

(6) 变分法。

此外，对于有些具体问题，当无法得到其解析解（或不需要得到其解析解）时，还可采用近似方法求解。

3. 解的适定性

用数理方程研究物理问题，仅仅求出解答当然是不够的，还必须分析解的物理含义并论证解在数学上的存在性、唯一性和稳定性。至于物理含义，显然，不同的问题有不同的物理意义。而存在性是指验证所求得的解是否满足方程。唯一性是指讨论在什么样的定解条件下，对于哪一类方程的解是唯一的。通过对唯一性问题的研究，可以明确，对于一定的方程，需要多少以及哪些定解条件才能唯一地确定一个解。稳定性是指讨论当定解条件有微小改变时，解是否也只有微小的变化。若是，则解是稳定的。对于这个问题的讨论尤为重要，因为在把一个物理问题表示成数学问题时，一般都作了一些简化或者理想化的假定，与真实情况有一定出入。稳定性问题的研究，可以对解的近似程度作出估计。

一个定解问题，若其解是存在、唯一而且是稳定的，就称该定解问题是适定的（即在物理上是适当而确定的）。

1.2　数学物理方程的导出

所谓的“导出”，就是用数学语言把物理规律表达出来。数学物理方程的导出步骤大致可以归为：

① 变量选择——确定所要研究的物理量（关于时间和空间的未知函数）；

② 微元分析——选取某个微元作为代表，利用微元之间相互作用所遵循的物理规律，写出微元所满足的方程；

③ 近似处理，写出方程——进行必要的近似和简化处理，整理得到物理量所满足的泛定方程。

根据典型物理过程，本节主要讨论三类常见的数学物理方程：波动方程、输运方程和稳定场方程。

(1) 波动方程主要描述波动过程（机械波和电磁波）。

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f$$

式中，$u=u(x,y,z;t)$代表坐标为(x,y,z)的点在 t 时刻的位移（未知函数）；a 是波的传播速度；$f=f(x,y,z;t)$是与振源有关的函数；$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$；$u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。

(2) 输运方程主要描述输运过程（热传导过程和扩散过程）。

$$u_t=D\Delta u+f$$

式中，$u=u(x,y,z;t)$表示扩散物质的浓度（或物体的温度）；D 是扩散（或热传导）系数；$f=f(x,y,z;t)$是与扩散源有关的函数；$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$。

(3) 稳定场方程主要描述平衡状态的稳定场分布（势场分布，平衡温度场分布）。

$$\Delta u = -h$$

式中，$u=u(x,y,z)$表示稳定现象的物理量，如静电场中的电势等；$h=h(x,y,z)$表示与源有关的已知函数。

从三类方程来看，其特点主要是：关于未知函数的偏导数最高阶是二阶的，都是二阶线性偏微分方程。这三类方程都是关于空间的二阶偏导数，而时间分别是二阶、一阶偏导数或与时间无关。这三类方程在数学上是三类不同的方程。

以下具体讨论三类典型数学物理方程的建立。从这些例子可以学习如何把物理问题转化为数学问题，换言之，如何进行数学建模。

1.2.1 波动方程的导出

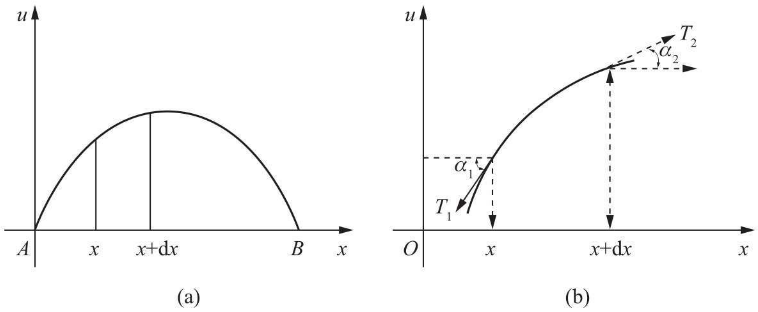

图 1-1 弦的横振动示意图

1. 均匀弦的横向振动方程

如图 1-1 所示，设有一根细长而柔软的弦线，紧绷于 A、B 两点之间，在平衡位置 AB 附近产生振幅极为微小的横向振动，求这根弦上各点的运动规律。

(1) 变量选择

以弦的平衡位置为 x 轴，研究弦上任意一点 x 在任意时刻 t 的沿垂直于 x 方向的位移，用 $u(x,t)$来表示。

(2) 微元分析

把弦分为许多小段，以区间上的小段 $\mathrm{d}x$ 为代表加以研究，分析受力。

假设弦线没有重量且柔软，即 $\rho(x,t)=\rho(t)$，且只受到邻段的拉力 T_1 和邻段的拉力 T_2。

根据牛顿第二定律 $F=ma$(其中 F 为外力；m 为质量；$a=u_{tt}$，为加速度)，小段 $\mathrm{d}x$ 的纵向和横向运动方程分别为：

$$\begin{cases} T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0, \\ T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = (\rho\mathrm{d}s)u_{tt} \end{cases} \tag{1-3}$$

(3) 近似处理，写出方程

因为是微小振动，$|u_x| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，$(u_x^2 \approx 0)$，所以 α_1，α_2 为微小量，于是有 $\cos\alpha_1 \approx 1$，$\cos\alpha_2 \approx 1$，$\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = u_x|_x$，$\sin\alpha_2 \approx \alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = u_x|_{x+\mathrm{d}x}$

弦的伸长可以略去 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}u)^2} = \sqrt{1+(u_x)^2}\,\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x$

于是，小段 dx 的运动方程(1－3)简化为：

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = 0, \\ T_2 u_x\big|_{x+dx} - T_1 u_x\big|_x = \rho u_{tt}\,dx \end{cases} \tag{1-4}$$

$T_1 = T_2$，所以张力与位置无关；根据胡克定律，弦上的张力正比于弦的拉伸长度，而由于弦的长度 $ds \approx dx$，不随时间而变，所以张力与时间无关。因此张力为常数，记为 T，从而有：

$$T(u_x\big|_{x+dx} - u_x\big|_x) = \rho u_{tt}\,dx$$

利用偏导数定义，有 $u_x\big|_{x+dx} - u_x\big|_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}dx = u_{xx}\,dx$

于是，弦作微小横向振动的运动方程为：

$$\rho u_{tt} - T u_{xx} = 0$$

通常记 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$，上述方程改写为：

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{1-5}$$

式(1－5)称为弦的自由振动方程。

如果弦在振动过程中还受到外加横向力的作用，设每单位长度弦所受横向力为 $F(x,t)$，则

$$T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 + F(x,t) = (\rho\,dx)u_{tt}$$

弦作微小横向振动的运动方程可改写为：

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{1-6}$$

式(1－6)称为弦的受迫振动方程。其中，$f(x,t) = F(x,t)/\rho$，称为力密度，为作用于单位质量上的横向外力。可以看到，弦的微小横向振动方程是一维的波动方程。

2. 均匀薄膜的微小横振动方程

把柔软的均匀薄膜张紧，静止薄膜所在的平面记为 xy 平面，如图 1－2 所示，求薄膜在垂直于 xy 平面方向上做微小横振动时所满足的运动规律。

首先对薄膜的运动做数学抽象：

(1) 研究的物理量为横位移 $u(x,y;t)$；

(2) 薄膜是“柔软”的，即在膜的横截面内不存在切应力；

(3) 膜是均匀的，$\rho(x,y;t) = \rho(t)$；

(4) 振动是微小的，张力的仰角 $\alpha = 0$；

(5) 张力 T 与空间坐标无关，为常量。

将薄膜分为小方块，考虑 $x:x+dx$ 和 $y:y+dy$ 区域。

① 考虑 x 方向的情况，$x:x+dx$ 之间所受的横向作用力满足：

$$\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x\right)dy = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\,dy \tag{1-7}$$

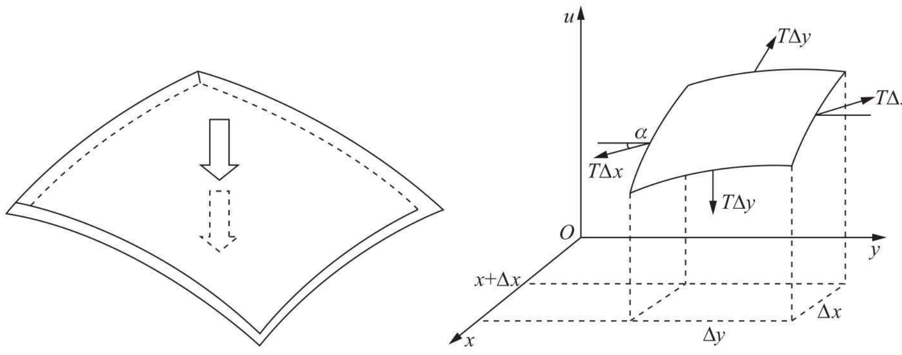

图 1－2 薄膜微小横振动示意图

② 考虑 y 方向的情况，$y:y+\mathrm{d}y$ 之间所受的横向作用力满足：

$$\left(T\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\mathrm{d}y}-T\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y}\right)\mathrm{d}x=T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-8}$$

根据牛顿第二定律，小块膜的横向运动方程为：

$$(\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y)u_{tt}=Tu_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Tu_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Rightarrow u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})=a^2\Delta u \tag{1-9}$$

式中，$a^2=T/\rho$，为膜上振动的传播速度；$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$。

如果膜上有横向外力作用 $f(x,y;t)$，其运动规律满足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y;t) \tag{1-10}$$

式中，$u(x,y;t)$ 表示在 t 时刻，膜在 (x,y) 点处的位移；$f(x,y;t)$ 为作用于单位质量上的横向外力。

3. 传输线方程（电报方程）*

无线通信的微波信号在金属导体传输线中传输的物理现象分析。在一般的电路分析中，所涉及的网络都是集总参数的，即所谓的集总参数系统。电路的所有参数，如阻抗（R）、容抗（C）、感抗（L）都集中于空间的各个点上，即各个元件上。各点之间的信号是瞬间传递的。集总参数系统是一种理想化的模型。它的基本特征可归纳为：

（1）电参数都集中在电路元件上；

（2）元件之间连线的长短对信号本身的特性没有影响，即信号在传输过程中无畸变，信号传输不需要时间；

（3）系统中各点的电压或电流均是时间且只是时间的函数。

集总参数系统是对实际情况的一种理想化近似。

微波信号在金属导体传输线中传输的实际情况是各种参数分布于电路所在空间的各处，当这种分散性造成的信号延迟时间与信号本身的变化时间相比已不能忽略的时候，就不能再用理想化的模型来描述网络。这时，微波信号是以电磁波的速度在信号通道上传输的，信号通道（或者说是信号的连线）是带有电阻、电容、电感的复杂网络，是一个典型的分布参数系统。作为一个分布参数系统，传输线的基本特征可以归纳为：

（1）电参数分布在其占据的所有空间位置上；

（2）信号传输需要时间，传输线的长度直接影响着信号的特性，或者说可能使信号在传输过程中产生畸变；

（3）信号不仅仅是时间(t)的函数，同时也与信号所处位置(x)有关，即信号同时是时间(t)和位置(x)的函数。

为了研究信号在传输线上随时间、位置变化的情形，即电压 $u(x,t)$ 和电流 $i(x,t)$ 的变化规律，以平行双线为例引入分布参数的概念，求解导线上的电压 $u(x,t)$ 和电流 $i(x,t)$ 变化规律所满足的方程——电报方程。此处假设传输线是均匀的，即构成传输线的两导体的距离，其截面形状以及介质的电特性和磁特性沿着整个长线保持不变。选取这样的平行双线的一小段进行研究，小段长度为 Δx，如图 1-3(a)所示。虽然传输线是一个分布系数系统，但仍可先用一个集中参数的模型来描述，如图 1-3(b)所示。显然，Δx 越小，就越接近传输线的实际情况。当 $\Delta x \to 0$ 时，该模型就逼近真实的分布参数系统。

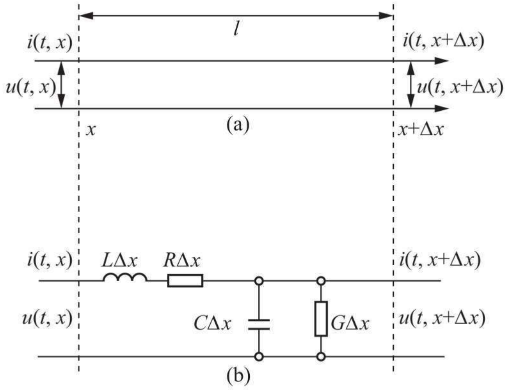

图 1-3　高频传输线的等效电路示意图

选取传输线起点为坐标原点，再分析距原点为 x 到 $x+\Delta x$ 处的情况，设 L 为单位长度上的分布电感，R 为单位长度上的分布电阻，C 为单位长度上的分布电容，G 为单位长度上的分布电导(介质漏电引起)。在 x 处的电压为 $u(x,t)$，电流为 $i(x,t)$，而在 $x+\Delta x$ 处的电压则为 $u(x+\Delta x,t)$，电流则为 $i(x+\Delta x,t)$[注意：此处电压 u 及电流 i 是时间(t)和位置(x)的二元函数]。

传输线上电压和电流分布满足的基本原理是基尔霍夫(Kirchhoff)电流电压定律。

第一定律：汇合在节点的电流的代数和为零(规定流入节点的为正，流出节点的为负)，即 $\sum\limits_{k=1}^{n} i_k = 0$。

第二定律：沿任一回路的电势增量的代数和为零(规定沿回路顺时针方向的电动势和电流都为正，反之为负)，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\Delta u_k + \varepsilon_k) = 0$($\varepsilon_k$ 为电动势)。

从传输线的 x 到 $x+\Delta x$ 段，应有：

$$u(x,t)=u(x+\Delta x,t)+L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+R\Delta x i(x,t)$$

$$i(x,t)=i(x+\Delta x,t)+C\Delta x\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial t}+G\Delta x u(x+\Delta x,t)$$

对上述两式分别取 $\Delta x \to 0$ 的极限，则有：

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=i(x,t)G+C\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \tag{1-11a}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}=u(x,t)G+C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{1-11b}$$

式(1-11a)和式(1-11b)称为电报方程，为简单起见，在下面的分析中，将用变量 u 和 t 分别代替 $u(x,t)$ 和 $i(x,t)$。

由于式(1-11a)和式(1-11b)中都含有两个因变量 u 和 i，因此可用消元法来获得两个分别只含 u 和 i 的偏微方程。对式(1-11a)两边进行$\frac{\partial}{\partial x}$，对式(1-11b)两边进行$\frac{\partial}{\partial t}$，则得到：

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=L\frac{\partial i}{\partial x\partial t}+R\frac{\partial i}{\partial x} \tag{1-12}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x\partial t}=C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1-13}$$

把式(1-11b)和式(1-13)代入式(1-12)后可以消去含有 i 的项，经整理得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(RC+LG)\frac{\partial u}{\partial t}+RGu \tag{1-14}$$

同样对式(1-11a)两边进行$\frac{\partial}{\partial x}$，对式(1-11b)两边进行$\frac{\partial}{\partial t}$，并按代入消元原理可得到：

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(RC+LG)\frac{\partial i}{\partial t}+RGi \tag{1-15}$$

下面以理想导线来进一步简化上述方程，即假定这条导线是无损耗线，因而有 $R=0, G=0$。式(1-14)和式(1-15)则可被简化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=LC\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2}\end{cases} \tag{1-16}$$

从数学上讲，这是波动方程。要解这组方程，必须给出具体的初始条件和边界条件，这由具体情况来定。

4. 电磁场方程

变化的电场和变化的磁场之间存在着耦合，这种耦合以波动的形式存在于空间中。这种变化的电磁场以波动的形式存在，通常称为电磁波。电磁波的存在，意味着在空间中有电磁场的变化和电磁能量的传播。光波、无线电波等都是电磁波，它们在空间上不需借助任何媒质就能传播。

一般情况下，电磁场的基本方程是麦克斯韦方程组，即

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{cases}\tag{1-17}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为电位移；$\boldsymbol{E}$ 为电场强度；$\boldsymbol{J}$ 为电流密度；ρ 为电荷密度；$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度；$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度。设空间满足各向同性、线性、均匀媒质，考虑 $\rho=0$，$\boldsymbol{J}=0$，则电磁场基本方程组可写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{1-18}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\tag{1-19}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0\tag{1-20}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\tag{1-21}$$

对式(1－18)两边分别求旋度

$$左边=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})-\nabla^2\boldsymbol{H}$$

$$右边=\nabla\times\left(\sigma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\sigma\nabla\times\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\sigma\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

利用式(1－20)有

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\sigma\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0\tag{1-22}$$

同理对式(1－19)两边取旋度，再利用式(1－18)，可推出

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\sigma\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\tag{1-23}$$

称式(1－22)和式(1－23)为电磁波动方程(它们是一般性的波动方程)。

1.2.2　输运方程的导出

1. 热传导方程

根据热学规律，由于温度不均匀导致热量从温度高的地方向温度低的地方转移，这种现象叫热传导。材料的热传导性能在大功率电子器件、LED 器件及计算机 CPU 等散热方面起到重要作用。

热传导的起源是温度的不均匀。令 $u(\boldsymbol{r},t)$ 表示温度，Q 表示热量。温度不均匀的程度可用温度梯度 $\nabla u(\boldsymbol{r},t)$ 表示。热传导的强弱可用热流强度 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)$ 来表示，即单位时间通过单位横截面积的热量。由实验可知，热流强度 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)$ 与温度梯度 $\nabla u(\boldsymbol{r},t)$ 成正比，即