探索未知

费马猜想

北京未来新世纪教育科学发展中心　编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社

探索未知

费马猜想

北京未来新世纪教育科学发展中心　编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社

图书在版编目(CIP)数据

探索未知/王卫国主编.—乌鲁木齐:新疆青少年出版社;喀什:喀什维吾尔文出版社,2007.6

ISBN 978-7-5373-1464-0

Ⅰ.探… Ⅱ.王… Ⅲ.自然科学—青少年读物 Ⅳ.N49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 097778 号

探索未知

费马猜想

北京未来新世纪教育科学发展中心　编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社 出版

(乌鲁木齐市胜利路二巷 1 号　邮编:830049)

廊坊市华北石油华星印务有限公司 印刷

开本:787mm×1092mm　32 开

印张:300　字数:3000 千

2007 年 7 月修订版　2007 年 7 月第 1 次印刷

印数:1-3000

ISBN 978-7-5373-1464-0

前　言

在半年之前，本编辑部曾推出过一套科普丛书，叫做《科学目击者》，读者反应良好。然而，区区一部丛书怎能将各种科学新知囊括其中？所未涉及者仍多。编辑部的同仁们也有余兴未尽之意，于是就有了这套《探索未知》丛书。

《科学目击者》和《探索未知》可以说是姊妹关系，也可以说是父子关系。说它们是姊妹，是因为它们在方向设定、内容选择上不分彼此，同是孕育于科学，同为中国基础科普而诞生。说它们是父子，则是从它们的出版过程考虑的。《科学目击者》的出版为我们编辑本套丛书提供了丰富的经验，让我们能够更好的把握读者们的需求与兴趣，得以将一套更为优秀的丛书呈献给读者。从这个层面上讲，《科学目击者》的出版成就了《探索未知》的诞生。

如果说《科学目击者》只是我们的第一个试验品，那么《探索未知》就是第一个正式成品了。它文字精彩，选

题科学，内容上囊括了数学、物理、化学、地理以及生物五个部分的科学知识，涵盖面广，深度适中。对于对科学新知有着浓厚兴趣的读者来说，在这里将找到最为满意的答复。

有了《科学目击者》的成功经验，让我们得以取其优、去其短，一直朝着尽善尽美的目标而努力。但如此繁杂的知识门类，让我们实感知识面的狭窄，实非少数几人所能完成。我们在编稿之时，尽可能地多汲取众多专家学者的意见。然而，百密尚有一疏，纰漏难免，如果给读者您的阅读带来不便，敬请批评指正。

编　者

目　录

费马猜想的来源

认识费马

什么是费马猜想呢?这对于未接受丰富数学基础知识的读者很难说清楚。要说清这个问题,我们得简单地回忆一下它的历史。

费马是17世纪最卓越的数学家之一,1601年8月20日出生在法国南部土鲁斯附近的博蒙-德洛马涅。父亲是一位皮革商,1665年1月12日逝世于土鲁斯或卡斯特。

费马在大学里专攻法律,学成后回到家乡——土鲁斯市做律师,以法律知识渊博、做事清廉而著称。他还是土鲁斯议会议员,终身职业是律师,做了土鲁斯议会的30年法律顾问。

费马不仅是一位博览群书、见多识广的学者,又是精通多种文字的语言学家。业余时间喜欢恬静生活,几乎

全部精力花费在钻研数学和物理问题上。只是偶尔用希腊文、拉丁文和西班牙文写诗作词，自我朗诵消遣。

虽然费马直到年近三十才认真注意数学，但他对数论、几何、分析和概率等学科都做过深入的研究，并做出了重大的贡献。他给出素数的近代定义，并且提出一些重要命题；他又同笛卡儿分享着创立解析几何的荣誉；他被公认为数学分析的先驱之一；他和帕斯卡等同是概率论的开拓者。因此，他被誉为“业余数学家之王”，与同时代的数学大师笛卡儿、莱布尼茨等齐名。现在，他的名字几乎与数论是同义语。

费马谦虚谨慎、鄙薄名利，生前很少发表著作，他的远见卓识出于他与同时代学者的信件和一批以手稿形式传播的论文。他的崇拜者常常催促他发表著述，但都遭到拒绝。他的很多论述，特别在数论方面的论述，从没有正式发表过。费马死后，很多论述遗留在故纸堆里，或阅读过的书的页边空白处，书写的年月无从查考；还有的保留在他给朋友们的书信中。他的儿子 S. 费马将遗稿进行了整理，汇编成册，共分两卷，分别于 1670 年和 1679 年在土鲁斯出版。第一卷有丢番图的《算术》，带有校订和注解；第二卷包括抛物形求面积法、极大极小及重心的论述以及各类问题的解答——这些内容后来成为微积分的一部分，还有球切面、曲线求长等。另外，还有他和同时代的许多数学家和物理学家笛卡儿、帕斯卡和惠更斯等的通讯函件。费马猜想以这种方式公布于世。

费马猜想的提出

人们对于方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解的研究要追溯到遥远的古代。

长期以来，中外许多数学家各自做出了不同的贡献。但直到 17 世纪初期，数学家才开始寻找方程 $x^3+y^3=z^3$，$x^4+y^4=z^4$ 等的正整数解。

古希腊数学家丢番图著《算术》一书，1621 年，数学家巴切将《算术》从希腊文译成拉丁文，在法国出版。费马买到了它，对于其中的数论问题产生浓厚的兴趣。业余之时，他对希腊数学家的一些问题进行研究和推广。当他读到第Ⅱ卷第八命题“将一个平方数分为两个平方数”时，灵感大发——他想到了更一般的问题。于是，他在页边空白处用拉丁文写了如下一段话：“将一个立方数分为两个立方数，一个四次幂分为两个四次幂，或者一般地将一个高于二次的幂分为两个同次的幂，这是不可能的。关于此，我确信已发现一种奇妙的证法，可惜这里的空白太小，写不下。”这段叙述用现代数学语言来说，就是当整数 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$（现将其称为式(1)）没有正整数解，这就是费马猜想。

写着这段笔录的书丢失了，但在 1670 年由他儿子 S. 费马出版的费马著作中有此记载。迪克森的《数论

史》第Ⅱ卷中说，费马的断言大约产生在1637年。理由是费马家的皮革厂(1883年)提到费马给梅森的信，信中写到，他希望找到两个立方数的和是一个立方数，两个四次幂的和是一个四次幂。这封信的日期是1638年6月。费马于1640年和1657年将同样内容推荐给一些数学家，但都没有提到他找到的奇妙的证明。

费马猜想，又叫做费马问题，但更多地叫做费马最后定理，我们把它简记为FLT。中国为了区别费马小定理，一般把它叫做费马大定理。

从费马研究丢番图的书到他逝世有30年的时间，在这种情况下，方程 $x^n+y^n=z^n$ 的解的定理无疑不是他的最后定理。为什么这样叫呢？数学家们解释说，名字的来源很大可能是费马提出很多数论命题，后来的数学家经过长期努力，证明大部分是正确的，只有一个是错误的。到1840年左右，只剩下FLT没有被人证明，因此称为最后定理。

费马猜想的难处

因为丢番图的《算术》仅论及有理数，所以费马的意思是不存在有理数 x、y、z 使式(1)成立。

如果 x、y、z 可以取无理数，那么对于数对 x、y，得到 $z=\sqrt[n]{x^n+y^n}$，即容易证明FLT不成立。但是，如果式

(1)存在有理数解，那么式(1)存在整数解，这是十分清楚的。众所周知，如果有理数 x、y、z 适合方程式(1)，d 是它们分母的最小公倍数，那么 xd,yd,zd 都是整数，并且

$$(xd)^n+(yd)^n=(x^n+y^n)d^n=(zd)^n$$

因此，整数 zd 的 n 次幂是两个整数 xd 与 yd 的 n 次幂的和。

此外，丢番图和费马都论及正数(在费马时期，负数和零仍被怀疑)。因此，x 或 y 为零的情况不言而喻也被排除(例如，$2^5+0^5=2^5$ 自然与 FLT 相违)。当式(1)的解 x,y,z 中有零时，则称此解为平凡解。

现在，我们对方程式(1)做一些讨论。如果 $(x,y)=d$，那么 z 能被 d 整除。

设 $x=dx_1$，$y=dy_1$，$z=dz_1$，则式(1)可写成

$$(dx_1)^n+(dy_1)^n=(dz_1)^n$$

约去 d^n，得

$$x_1{}^n+y_1{}^n=z_1{}^n$$

其中 x_1，y_1，z_1 是正整数，并且 $(x_1,y_1)=(x_1,z_1)=(y_1,z_1)=1$。其中，括号表示其中两数的公约数，例如 $(8,6)=2$。因此，在式(1)中可假设 x,y,z 两两互素。式(1)的两两互素解，称为原始解。

如果对于正整数 m 定理成立，并且 $n=lm$，其中 l 是正整数，那么对于 n 定理也成立。否则，如果 x,y,z 是非零整数，并且 $x^n+y^n=z^n$，那么 $(x^l)^m+(y^l)^m=(z^l)^m$，同假设矛盾。

设 n 是一个大于 2 的整数。当 n 为奇数时，n 一定

能被一个奇素数整除。

当 n 为偶数时，则 $n=2m$，其中 m 是正整数；若 m 是奇数，m 必被一个奇素数整除，若 m 是偶数，则 $n=2m$ 被 4 整除。由上述讨论可以得出结论：任何一个大于 2 的整数 n，或是 4 的倍数，或是一个奇素数的倍数。

因此，证明 FLT，实际上只需证明：

$$x^4+y^4=z^4 \text{ 和 } x^p+y^p+=z^p,$$

其中 p 是奇素数。若是两式都没有正整数解便可。前者无解是容易证明的，后者无解的证明却是异常困难的。

为了证明的方便，经常把 FLT 分为下列两种情形：

第一种情形对于素指数 p，不存在整数 x，y，z，使 xyz 能被 p 整除，且 $x^p+y^p=z^p$。

第二种情形对于素指数 p，不存在整数 x，y，z，使 xyz 能被 p 整除，且 $x^p+y^p=z^p$。

300 多年过去了，费马猜想仍没有最后得到解决，它难住了所有数学家，成为数学著名难题之一。

最初的尝试

费马的错误

费马的遗著发表了，人们很想从中知道费马是怎样证明 FLT 的，但查遍了他所有的著作，结果使人们大失所望。关于他的“奇妙的证明”，人们有各种猜测：有人认为他根本没有给出证明；相反，有人却认为他给出过证明，不过证明中有错误。前者认为，长期实践证明，用费马时期的数学知识没法给出证明。后者的理由有四条：

从费马的品德和才智来说，他不会自我欺骗，并能给出证明，这是其一。

其二，费马在同本书上还写了几个研究结果，如：

1. 任何形如 $4n+1$ 的素数可以唯一地表示成两个整数的平方和，而 $4n-1$ 型素数则不能。

2. 对于整数 n 和素数 p，n 不能被 p 整除，那么 n^p-n 可以被 p 整除，即费马小定理。

3. $x^2+2=y^3$只有一个整数解 $x=5, y=3$。这些结论费马都没有写出证明，后来，数学家证明它们都是正确的。

其三，费马自己证明了 $n=4$ 情形的 FLT，使用的是他发现的“无穷递降法”。后来发现无穷递降法对一般情形不适用。从而得出结论：费马可能在这方面犯了错误，而误认为发现了“奇妙的证明”。

最后，在数论的历史上，就是大数学家也难免犯错误。正是“智者千虑，必有一失”。费马也不例外，他也曾有过错误的猜想。例如，形如 $F_n=2^{2n}+1$，$=0, 1, 2, \cdots$ 的数叫费马数。1640 年，费马验证了 $F_0=3$，$F_1=5$，$F_2=17$，$F_3=257$，$F_4=65537$ 是素数后，就猜想：$n \geqslant 0$ 时，F_n都是素数，1732 年欧拉证明

$$F_5=2^{23}+1=641\times6700417$$

即 641 能被 F_5整除，从而否定了这个猜想。

总之，各种猜测虽说法不一，但共同点是一个，都认为费马没有给出 FLT 的证明。现在看来，论证这个历史悬案对我们并不重要，而现代人的任务是如何解决 FLT。自此，科学家踏上了征服 FLT 的漫长且艰难的历程。

备受关注

FLT 开始并没有引起人们瞩目，在一些著名数学家

受挫后，才普遍引起人们的重视。许多知名数学家都研究过它，他们中有欧拉、勒让德、高斯、阿贝尔、狄利克雷、拉梅、柯西和库麦等，有的人为此献出毕生精力，早期的库麦和近代的范迪弗就是其中的两位。据说林德曼在1882年证明π是超越数（人们把不是代数数的数称为超越数，至于代数数的定义将在后文论及）后，也终身从事FLT的研究。

数学家继往开来，不畏劳苦，奋勇攻坚，在解决FLT上取得了很大成绩，并且发现了一些新方法和新理论，数学家也从中得到了磨练和启迪。

费马在给朋友卡卡维的信中说，他已用无穷递降法证明了$n=4$情形。但信中没有给出证明的细节。

1676年，贝西在费马的少量提示下，也给出这个情形的证明，论文刊在他死后出版的《论直角三角形的数学性质》一书中。

所谓无穷递降法，这里必须作一下粗略地解释：假设某一个方程$f(x,y,z)=0$有整数解a,b,c，并且$c>0$，方法正是求另外的整数解a',b',c'，使$0<c'<c$，多次重复这个过程，得到解a'',b'',c''，并且$0<c''<1$。这是不合理的。无穷递降法不是别的，只不过是自然数的良序原理也叫最小数原理，其内容为自然数列中任意一个非空子列必有最小数（也叫最小数原理，其内容为自然数列中任意一个非空子列必有最小数）。莱布尼茨（1678年）和欧拉（1738年）也给出了这种情形的证明。

$n=3$的情形，早在972年阿拉伯人胡坚迪已经知

道，但他的证明有缺陷。1770 年欧拉首先给出这个特例的证明，不过这个证明不是很完全。他引进了一种形如 $a+b\sqrt{-3}$（a，b 是整数）的数。这种数与整数有许多相似性质。欧拉发挥巨大想象力和创造力，用类别的方法，它假定整数的一些性质对 $a+b\sqrt{-3}$ 型数也成立，从而推出 n＝3 时 FLT 成立。

问题就出在这个假设上。大家知道，在整数中素因数唯一分解定理成立，即任何大于 1 的整数，如果不计素因数的次序，有且只有一种方法分解成素因数的乘积。由此可以推出，当两个互素的整数的乘积是某一个数的 n 次幂时，只有当其中每一个整数都是 n 次幂才行。欧拉假定这种性质对于 $a+b\sqrt{-3}$ 也成立，再由此进行推理，最终做出证明。

事实上，整数与 $a+b\sqrt{5-3}$ 型数虽然有着许多相同的性质，但还有许多不同的性质，这就是欧拉的假定不够慎重的地方。但是，对于 n＝3 情形，只要作些修补，实质上欧拉还是证明了 FLT。

欧拉的方法对以后的研究有很大启发性。稍后一些时候，数学家们致力于证明的基础研究，得到了一些有益成果。高斯给出了 n＝3 情形的另外一个证明。

19 世纪 20 年代，许多法国和德国数学家试图证明 FLT。1823 年，71 岁高龄的勒让德给出 n＝5 情形的证明。1825 年，年仅 20 岁的狄利克雷宣读一篇论文，他试图证明 n＝5 情形。事实上，他的证明不完全，这一点被