高等数学(Ⅰ)

徐 祥 万细仔 主 编
邓炳茂 周志轩 张新文 副主编

GAODENG SHUXUE

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等数学(Ⅰ)

主　　编　徐　祥　万细仔
副 主 编　邓炳茂　周志轩　张新文
参编人员　(以姓氏笔画为序)
王祥玲　邓炳茂　田　检
张新文　蒋春玲　商晓阳

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是高等数学的入门教材，主要内容包括一元函数分学、一元函数积分学、微分方程初步．全书共6章：第1章：函数、极限和连续；第2章：导数与微分；第3章：微分中值定理与导数的用；第4章：不定积分；第5章：定积分及其应用；第6章：微分方程．每一节、每一章都配有适量的习题，书末附有习题的提示与答案．本书是由基础数学博士后、华软软件学院主管教学的副院长徐祥教授主持编写的，积累了数位作者民办高校多年教学经验，精选内容、合理组织结构，力求具有选择面宽，适用范围广的特点．

本书选材精炼，推理严谨，重点突出，例题丰富，习题多并且难易适度，对重要的概念和内容我们从背景开始，再引和相应的概念和内容，使读者对知识的来龙去脉有一定的了解，进而学会如何提出问题和解决问题．

本教材适用于综合大学、理工科大学的理工科专业本科一年级学生，尤其是民办高校的理工科专业本科一年级学生．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(Ⅰ)/徐祥，万细仔主编．--北京：北京邮电大学出版社，2015.6

ISBN 978-7-5635-4285-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①徐…②万…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第012384号

书　　名：高等数学(Ⅰ)

著作责任者：徐　祥　万细仔　主编

责任编辑：满志文

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京联兴华印刷厂

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：14

字　　数：343千字

版　　次：2015年6月第1版　2015年6月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-4285-7　　定　价：30.80元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

前　　言

微积分是一门历史悠久的学科，是所有科学技术的基础，也是公民数学素养中的基本素养之一，自然也就成为大学教育的基础内容.

近十几年来，中国的高等教育有了飞速的发展，无论是在校生规模，还是办学模式都有非常大的改观. 规模的扩大，办学层次的多元化就必然造成在校大学生数学基础有非常大的差异，因材施教的特色教学就成为大学高等数学教学的必须，而有特色的高质量的高等数学教材就自然而然地成为最迫切的需求. 本书就是根据编者近几年在全日制民办高校教学经验总结编写而成，从编写原则、理论体系、概念的引入、定理的证明、实例和习题的选择、解题思路及计算的处理，都既考虑到基础较差的学生，又兼顾希望考研的学生，使其既便于教师教，也便于不同层次的学生学. 本书可作为非重点全日制公办高校，全日制民办高校及成人高校的工科专业高等数学教材.

本教材内容包括一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程初步. 全书共 6 章：第 1 章：函数、极限与连续，由万细仔、张新文执笔；第 2 章：导数与微分，由商晓阳执笔；第 3 章：微分中值定理与导数的应用，由邓炳茂、周志轩执笔；第 4 章：不定积分，由王祥玲执笔；第 5 章：定积分及其应用，由蒋春玲执笔；第 6 章：微分方程，由田检执笔.

本教材得到广州大学华软软件学院“精品课程”和“高等数学教学团队建设”两个项目的资助，华软软件学院领导、广东道锋文化发展有限公司和北京邮电大学出版社为本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此一并表示感谢.

由于编者的经验和水平有限，教材中缺点和错误总是难免的，敬请专家和读者不吝指正.

编　者

目　　录

第1章　函数、极限与连续

学 习 目 标

了解反函数、函数单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质；

理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续、函数在区间上连续的概念；初等函数的连续性. 掌握相同函数的判断；复合函数的复合过程；复合函数的分解；反函数的求法；极限的四则运算法则；

会用函数关系描述实际问题；会对无穷小进行比较；

会用两个重要极限求极限；

会判断间断点的类型；会求连续函数和分段函数的极限.

函数是被广泛应用于自然科学、工程技术以及经济生活中的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围. 函数作为相关变量之间的关系式，是运用数学模型研究实际问题的重要手段. 极限概念是研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它是有限运算（初等数学）过渡到无限运算（高等数学）的桥梁，是微积分的基础. 微积分学中的重要概念——导数和积分都是用极限表述的；微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的.

1.1　函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量，例如：身高、气温、面积、产量、收入、成本等等. 这些量可分为两类，一类量在考查过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作**常量**，例如：圆周率 π 永远是个不变的量，飞机上的乘客数在飞行过程中不会发生变化，一个国家的国土面积在一段时间内是固定不变的；光在真空中的传播速度也是一个固定的量，这些都是常量；另一类量在考查过程中是变化的，可以取不同的数值，我们

称之为**变量**,例如:一天中的气温,飞机飞行过程中离地面的高度,离出发地、目的地的距离,陨石下落过程中的速度等都是在不断变化的,它们都是变量.

在理解常量与变量时,应注意下面几点:

(1) 常量变量依赖于所研究的过程,同一个量,在某个过程中可认为是常量,而在另一个过程中则可能是变量,反过来也是同样的.例如:利率在一定时期内是固定的,而从长远来看是变化的.

(2) 从几何意义上讲,常量对应着实数轴上的定点,变量则对应着实数轴上的动点.

(3) 一个变量所能取的数值的集合称作这个变量的变动区域.

有一类变量,如人数、货币数量,它们取有限或可数个点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$,我们称这类变量为**离散变量**;还有一类变量,例如气温、时间,它们的取值可介于两个实数之间的任意实数值,称作**连续变量**,连续变量的变动区域常用区间表示.

习惯上我们用 x, y, z, u, v, w 表示变量,用 a, b, c, d 表示常量.

2. 函数的概念

【例 1-1-1】 某产品专卖店,场租和人工为 100 000 元,每件产品的进货价为 300 元/件,则该专卖店销售量 x(件)与总成本 y(元)之间有下面关系式:

$$y = 100\,000 + 300x \quad (x \in \mathbf{N})$$

显然,销售量 x 取任何一个合理值,总成本 y 就有一个确定值与它对应,我们说总成本 y 是销售量 x 的函数.

【例 1-1-2】 根据《税法》,广州市居民个人月收入 x(元)与其应纳个人所得税税额 T(元)之间的关系为:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 3\,500 \\ 0.03(x-3\,500) & 3\,500 < x \leqslant 5\,000 \\ 0.1(x-3\,500)-105 & 5\,000 < x \leqslant 8\,000 \\ 0.2(x-3\,500)-555 & 8\,000 < x \leqslant 12\,500 \\ 0.25(x-3\,500)-1\,005 & 12\,500 < x \leqslant 38\,500 \\ 0.3(x-3\,500)-2\,755 & 38\,500 < x \leqslant 58\,500 \\ 0.35(x-3\,500)-5\,505 & 58\,500 < x \leqslant 83\,500 \\ 0.45(x-3\,500)-13\,505 & x > 83\,500 \end{cases}$$

居民的月收入 x 取任意的值,其应纳个人所得税税额 T 就完全由 x 确定,我们说应纳个人所得税税额 T 是个人月收入 x 的函数.

上面两个例子有一个共同特点:就是两个变量之间存在一个对应关系式.

定义 1-1-1 设 x 和 y 是两个变量,若变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量依照某一规则 f 总有一个确定的数值 y 与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,这里,x 称作**自变量**,y 称作**因变量**或**函数**,f 是函数符号,它表示 y 与 x 的对应规则.有时函数符号也可以用其他字母来表示,如 $y=g(x)$或 $y=Q(x)$等.

集合 D 称作函数的**定义域**,相应的 y 值的集合:$R(f)=\{f(x)\mid x\in D\}$称作函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时,因变量 y 按所给函数关系 $y=f(x)$求出

的对应值 y_0 称作当 $x=x_0$ 时的**函数值**(或函数在 x_0 处的值),记作 $f(x_0)$或$f(x)\big|_{x=x_0}$.

【例 1-1-3】 设 $f(x)=\sqrt{7+x^2}$,求 $f(0)$,$f(3)$,$f(-3)$,$f(-x)$.

解:

$$f(0)=\sqrt{7+0^2}=\sqrt{7}$$
$$f(3)=\sqrt{7+3^2}=\sqrt{16}=4$$
$$f(-3)=\sqrt{7+(-3)^2}=\sqrt{16}=4$$
$$f(-x)=\sqrt{7+(-x)^2}=\sqrt{7+x^2}=f(x)$$

3. 函数的表示

我们通常采用分析法(或称解析法、公式法)、图示法及表格法三种方法表示函数.

(1) 分析法,两个变量之间的函数关系,通过公式或分析式子给出。如例 1-1-1、例 1-1-2中的函数关系式.

(2) 图示法,用坐标平面的曲线表示两个变量间函数关系的方法称作**图示法**. 如气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线就是气温与时间函数关系的图示法表示. 同样医疗仪器记录的脑电波、心电图也是用图示法表示用于诊断的变量之间的函数关系式.

(3) 表格法,用表格列出自变量中的一系列值与其对应的函数值的表示方法称作**表格法**. 如水稻种植中产量与施肥量的函数关系可通过试验中不同施肥量与对应产量的表格来表示.

4. 函数的定义域及相同的函数

实际中的函数往往指定了自变量的取值范围,即给定了定义域。但从数学上考虑,对给定的函数表达式,使式子有意义 x 的取值范围可能大于实际问题中的 x 取值范围,如例 1-1-1中,实际问题中的 x 必须是非负整数,而数学式子:$y=100\,000+300x$ 则对所有$x\in\mathbf{R}$ 都有意义.

定义 1-1-2 使函数表达式 $y=f(x)$有意义的 x 的最大取值范围称作函数 $y=f(x)$的**自然定义域**.

从定义知,求一个函数的自然定义域,就是将实轴去掉函数没有意义的点,即满足下述条件点的交集:(1)分式中使分母不为零的点;(2)开偶数次方中,使根式内式子为非负的点;(3)对数函数中使真数大于零的点;(4)$\arcsin u$,$\arccos u$ 中使 $|u|\leqslant 1$ 的点;(5)$f(x)^{g(x)}$ 中使式子有意义且 $f(x)$,$g(x)$不同时为零的点.

【例 1-1-4】 函数 $y=5\ln(x^2+x-2)-2\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$的自然定义域为 $D=$________.

解:D 由满足下述二个条件的点组成:

$$\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ \left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1 \end{cases}$$

即 $D=(1,2]$故填上$(1,2]$即可.

定义 1-1-3 设函数 $y=f(x)$,$z=g(u)$是两个分别定义在 D_1,D_2 上的函数,如果 $D_1=D_2$,且对任意 $x\in D_1=D_2$,都有 $f(x)=g(x)$,则称两个函数是相同的.

从定义不难看出,两个相同的函数具有相同的定义域和相同的对应法则. 因而要判断两

个函数是否相同,首先检验它们的定义域是否相同,其次再看它们的对应法则是否一致(对解析式进行恒等变形,看看表达式是否一致).

【例 1-1-5】 下列函数对中,表示相同函数的是(　　).

(A) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^4}}{x}$

(B) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

(C) $f(x)=x$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$

(D) $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$

解:正确的选择是 D,故在括号中填 D.

(A) $f(x)=x$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^4}}{x}$ 的定义域为 $D_2=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,定义域不同,故两个函数不同.

(B) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域相同,都是 $(-\infty,+\infty)$ 但 $g(x)=(\sqrt{x^2})=|x|$,当 $x<0$ 时 $f(x)\neq g(x)$,对应法则不同,故两个函数也不同.

(C) $f(x)=x$ 的定义域 $D_1=(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $D_2=[0,+\infty)$,故两个函数还是不同.

(D) 因为 $x^2+1>0$,且 $\sqrt{x^2+1}-x\neq 0$ 故 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,对 $g(x)$ 的分母进行有理化有:

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}=\sqrt{x^2+1}+x=f(x)$,因而 D 是正确的选择.

【例 1-1-6】 下列函数对中,表示不同的函数的是(　　).

(A) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

(B) $f(x)=x$ 与 $g(u)=\ln \mathrm{e}^u$

(C) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $g(x)=\arcsin x+\arccos x$

(D) $f(x)=\ln|\sec x+\tan x|$ 与 $g(x)=-\ln|\sec x-\tan x|$

解:正确的选择应为 C,故在括号中填 C.

(A) 由三角恒等式易知 $f(x)=g(x)$.

(B) 显然 $f(x)=x$ 与 $g(u)=\ln \mathrm{e}^u$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,而对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有:$g(x)=\ln \mathrm{e}^x=x\ln \mathrm{e}=x=f(x)$,故 $f(x)=g(x)$.

(C) 显然 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)=\arcsin x+\arccos x$ 的定义域为:$D=[-1,1]$,由此得 $f(x)\neq g(x)$,故 C 是正确的选择.

(D) 由三角恒等式:$\sec^2 x-\tan^2 x=1$,易得 $f(x)=g(x)$.

5. 分段函数

对例 1-1-2 中给出的个税函数,个税额 T 与个人收入 x 的表达式不能用一个统一的式

子来表示，而必须根据 x 的八个不同范围用八个不同的式子来表示. 我们称这种将定义域分成若干部分，对不同部分范围的 x，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**.

注：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数，对自变量 x 在定义域内的某个值，则有唯一一个对应规则确定对应的 y 值，分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

【例 1-1-7】　对例 1-1-2 中的税收函数，求：

(1) 若某居民 2013 年 8 月份的应税收入为 10 000 元，则其应交个人所得税是多少？

(2) 若某居民 2013 年 8 月份交个人所得税 5 000 元，则其该月应税收入是多少？

(3) 函数的定义域.

解：(1) 由 $x=10\,000$，$8\,000<x=10\,000<12\,500$

故 $T(10\,000)=0.2(10\,000-3\,500)-555=745$(元)

(2) 因为 $T(12\,500)=0.2(12\,500-3\,500)-555=1\,245<5\,000$，故居民月收入 $x>12\,500$，而 $T(38\,500)=0.25(38\,500-3\,500)-1\,005=7\,745>5\,000$，故居民月收入 $x<38\,500$，所以：$5\,000=T(x)=0.25(x-3\,500)-1005$，解得：$x=27\,520$(元).

(3) $D=[0,3\,500]\cup(3\,500,5\,000]\cup(5\,000,8\,000]\cup\cdots\cup(83\,500,+\infty)=[0,+\infty)$

二、函数的基本性态

我们比较感兴趣的几种函数基本性态是：有界性、单调性、奇偶性和周期性.

1. 函数的有界性

定义 1-1-4　设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界的**. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是**无界的**.

例如，$y=3\sin x-2\cos x+4$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，都有

$$|3\sin x-2\cos x+4|\leqslant 3|\sin x|+2|\cos x|+4\leqslant 9$$

所以 $y=3\sin x-2\cos x+4$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是无界的.

函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内部分限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间(如图 1-1-1 所示)。函数在 (a,b) 无界的几何意义是：不管多大的 M，在直线 $y=-M$，$y=M$ 外都有曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x_0,f(x_0))$，其中，$x_0\in(a,b)$.

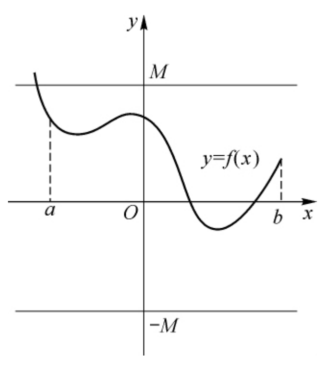

图 1-1-1

对函数的有界性，要注意以下两点：

(1) 当函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的. 如在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界的函数 $y=3\sin x-2\cos x+4$，M 可取 9，也可取任意大于 9 的实数；

(2) 有界性是依赖于区间的。例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$

内是无界的,但在$(1,+\infty)$内则是有界的.

2. 函数的单调性

定义 1-1-5 设函数 $y=f(x)$在数集 D 上有定义,如果对 D 上任意两点 x_1,x_2 满足$x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)则称 $f(x)$在 D 上是**单调增加**(或**单调减少**).

函数 $f(x)$在数集 D 上单调增加,单调减少统称为函数 $f(x)$在数集 D 上单调,如果 D 是区间,则称该区间为 $f(x)$的单调区间.

单调增加函数的图形是沿 x 轴的正向上升的曲线(图 1-1-2),单调减少函数的图形是沿 x 轴正向下降的曲线(图 1-1-3).

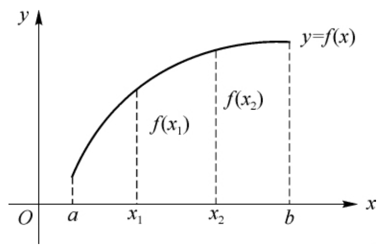

图 1-1-2

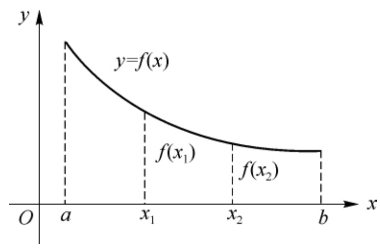

图 1-1-3

【例 1-1-8】 讨论函数 $y=2x^2+1$ 的单调性.

解:令 $f(x)=2x^2+1$,则 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

对任意 $x_1<x_2\leqslant 0$,有 $f(x_1)=2x_1^2+1>2x_2^2+1=f(x_2)$,所以 $f(x)=2x^2+1$ 在$(-\infty,0]$内单调减少.

对任意 $0\leqslant x_1<x_2$,有 $f(x_1)=2x_1^2+1<2x_2^2+1=f(x_2)$,所以 $f(x)=2x^2+1$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

注:利用 $y=2x^2+1$ 的图像很容易观察出上述结论.

3. 函数的奇偶性

定义 1-1-6 如果数集 D 满足:对任意 $x\in D$,都有 $-x\in D$,且函数 $f(x)$满足:$f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$)则称 $f(x)$是数集 D 上的**奇函数**(或**偶函数**).

【例 1-1-9】 下列函数中,不是奇函数的是( ).

(A) $f(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)\cos x$ (B) $f(x)=\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)(1+x^2)$

(C) $f(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)\sin x$ (D) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

解:正确的选择应为 C,故在括号填 C.

$$\text{对于(A)}\ f(-x)=\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)\cos(-x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)\cos x=\left[\frac{(e^x+1)-1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right]\cos x$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x+1}\right)\cos x=-\left(\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)\cos x=-f(x)$$

所以 $f(x)$为奇函数。同理可验证(B)、(D)中 $f(x)$的也是奇函数,只有(C)是正确的选择.

【例 1-1-10】 下列函数中,是偶函数的是( ).

(A) $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$　　(B) $f(x)=\left(\frac{1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)\sin x$

(C) $f(x)=(1+x^{2})\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$　　(D) $f(x)=\sqrt{x^{2}+1}+x$

解:正确的选择应为 B,故在括号填 B.

对于(B)中的 $f(x)$有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)\sin(-x)\\&=\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)(-\sin x)=\left[\frac{(e^{x}+1)-1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right](-\sin x)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{x}+1}\right)(-\sin x)=\left(\frac{1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)\sin x=f(x)\end{aligned}$$

故 $f(x)$是偶函数.

可以直接验证(A)、(C)中的 $f(x)$为奇函数,而(D)中的 $f(x)$为非奇非偶函数,只有(B)是正确的选择.

奇函数的图像关于原点对称(图 1-1-4),偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-1-5).

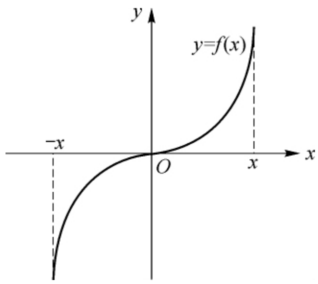

图 1-1-4

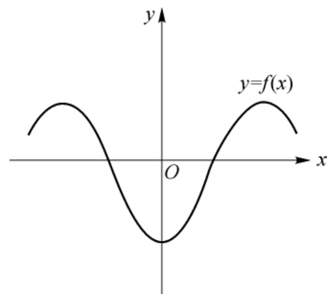

图 1-1-5

4. 函数的周期性

定义 1-1-7　设函数 $y=f(x)$在 D 上有定义,如果存在正数 T,使得对任意 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$恒成立,则称函数 $f(x)$为**周期函数**,满足等式 $f(x+T)=f(x)$的最小正数 T 称为函数的**周期**.

例如:$y=\sin x$,$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

定理 1-1-1　设函数 $y=f(x)$是 D 上周期为 T 的周期函数,则函数 $F(x)=f(ax+b)$(其中:a,b 为常数,且 $a\neq 0$)是周期为$\frac{T}{|a|}$的周期函数.

根据定理,我们易知 $y=5\sin(2x-1)-6$ 是周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ 的周期函数.

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

引例:设某厂生产某种产品,产品销售收入 y 是产量 q 的函数,即 $y=R(q)$;而产量 q 又

是生产工时 t 的函数，即 $q=q(t)$，则该厂销售收入是生产工时的函数，即：$y=R[q(t)]$.

定义 1-1-8 设函数 $y=f(u)$ 是 D_1 上的函数 $u=\varphi(x)$ 是 D_2 上的函数，如果 $D=\{x\in D_2 \mid \varphi(x)\in D_1 \mid \neq \phi\}$，则任意 $x\in D$，$x\to f[\varphi(x)]$，就是定义在 D 上的一个函数，称作 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**. 记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 称作**自变量**，u 称为**中间变量**.

求两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中.

【例 1-1-11】 设 $f(x)=3x+2$，$\varphi(x)=x^2-3$，求(1) $f[\varphi(x)]$；(2) $\varphi[f(x)]$.

解：(1) 将 $u=\varphi(x)=x^2-3$ 代入 $f(u)=3u+2$ 中得：

$$f[\varphi(x)] = 3\varphi(x) + 2 = 3(x^2 - 3) + 2 = 3x^2 - 7$$

(2) 将 $u=f(x)=3x+2$ 代入 $\varphi(u)=u^2-3$ 中得：

$$\varphi[f(x)] = [f(x)]^2 - 3 = (3x + 2)^2 - 3 = 9x^2 + 12x + 1$$

从上例中可以看出，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 与 $\varphi[f(x)]$ 不一定是相同函数.

实际问题中，有时会出现下面一类问题，就是已知 $u=\varphi(x)$ 和 $y=f[\varphi(x)]=g(x)$，要求出 $y=f(x)$ 的表达式的问题.

【例 1-1-12】 已知 $a\neq 0$，$f\left(x+\dfrac{1}{ax}\right)=a^2x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$________.

解：等价于：已知 $u=\varphi(x)=x+\dfrac{1}{ax}$ 和 $f[\varphi(x)]=a^2x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的问题. 将 $f[\varphi(x)]=a^2x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2\left[\left(x+\dfrac{1}{ax}\right)^2-\dfrac{2}{a}\right]=a^2\varphi^2(x)-2a$ 表示成 $\varphi(x)$ 的函数，再用 u 代替 $\varphi(x)$ 得：$f(u)=a^2u^2-2a$ 将自变量 u 换成 x 得

$$f(x) = a^2x^2 - 2a$$

练习 (1) 已知 $f\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)=4x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$________；

(2) 已知 $f\left(x+\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$________.

【例 1-1-13】 已知 $a\neq 0$，$f(x+a)=x^2+2bx+c$，则 $f(x)=$________.

解：等价于：已知 $u=\varphi(x)=x+a$ 和 $f[\varphi(x)]=x^2+2bx+c$，求 $f(x)$ 的问题.

因为 $u=\varphi(x)=x+a$，易得：$x=u-a$，代入 $f[\varphi(x)]$ 中有：

$$\begin{aligned} f(u) &= (u-a)^2 + 2b(u-a) + c \\ &= u^2 - 2au + a^2 + 2bu - 2ba + c = u^2 + 2(b-a)u + c + a^2 - 2ba \end{aligned}$$

所以
$$f(x)=x^2+2(b-a)x+c+a^2-2ba$$

练习 已知 $f(x+2)=x^2+4x+20$，则 $f(x)=$________.

在后面的函数求导时，经常需要将一个复杂的函数表示成若干个简单函数的复合，我们称这一过程为**复合函数的分解**.

【例 1-1-14】 将下列复合函数分解：(1) $y=\sin^2 x$；(2) $y=e^{\sin^2 x}$.

解：(1) 令 $u=\sin x$ 则 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成.

(2) $y=e^{\sin^2 x}$ 是由 $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

2. 反函数

引例：设某商品的市场需求量 Q 与商品的价格 P 之间存在关系：$Q=30\,000-50P$(需求