# 几 何 与 代 数

（下）

吉林师范大学

# 目　　录

# 第六章 綫性空間

## §1. 綫性空間定义

本章將介紹綫性空間（向量空間）的概念，这一概念是数学中一个很重要的概念.

我們在第五章§1曾介紹了向量的概念，当时，我們把一个有向綫段叫作向量，并且在向量之間引进了加法运算，以及数乘向量的乘法运算，从运算性質来看，我們曾得到下述的一些結果（参閱第五章向§1向量代数初步）：

1. 在向量之間規定了加法运算(三角形法則)，使任二量 $a$ 与 $b$，可由这一运算确定一个向量 $c$ 为其和：$c=a+b$，而且它适合下列各性質：

(1) $a+b=b+a$

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(3) 0 向量 0 与任一向量 $a$ 之和仍为 $a$：$0+a=a$

(4) 对于任一向量 $a$ 存在 $a$ 的負向量 $-a$，使

$$a+(-a)=0$$

2. 在实数体与向量之間規定了一个数乘向量的运算，可使任一实数与向量相乘得到唯一一个向量，它具有性質：

(5) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$,

(6) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$,

(7) $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)$,

(8) $1\cdot a=a$.

上述这些性質并非在第五章§1中所定义的向量所独有的．在数学与物理中我們会遇到这样情况：討論的对象并不是有向綫段（或三数組），但是他們具有和向量完全类似的性質．

我們来看一个例子．

例1．令 $V_n$ 是一切形如 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的有序 $n$ 数組所構成的集合．(其中 $\xi_i$ 是数体 $F$ 中的数）并在 $V_n$ 中規定加法如下：

若 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

規定 $x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n)$

数乘 $V_n$ 中的元素的作用乘法为：

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots, \alpha\xi_n)$$

并且規定 $V_n$ 中二元素 $x$ 与 $y$ 当且仅当

$\xi_i=\eta_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 时算作相等．

这时容易驗証 $V_n$ 具有上面所提到的性質 (1)～(8)

事实上，

1．在 $V_n$ 中規定有加法，且滿足

(1) 若 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

$$\begin{aligned} \text{则 } x+y&=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n)\\ &=(\eta_1+\xi_1, \eta_2+\xi_2, \cdots, \eta_n+\xi_n)\\ &=y+x, \end{aligned}$$

类似地可証

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$，

(3) $(0, 0, \cdots, 0)$ 是0向量，

(4) $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$的負向量 $-x=(-\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_n)$，

2. 在$F$与$V_n$之間規定了作用乘法，并且适合

(5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

(6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

(7) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)=\beta(\alpha x)$,

(8) $1\cdot x=x$

下面仅驗証（5）式成立．(6)～(7) 式完全可以类似地証明．

令 $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$

这时 $x+y(=\xi_1+\eta_1, \cdots, \xi_n+\eta_n)$

所以

$$
\begin{aligned}
\alpha(x+y)&=(\alpha(\xi_1+\eta_1), \cdots, \alpha(\xi_n+\eta_n))\\
&=(\alpha\xi_1+\alpha\eta_1, \cdots, \alpha\xi_n+\alpha\eta_n)\\
&=(\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_n)+(\alpha\eta_1, \cdots, \alpha\eta_n)\\
&=\alpha x+\alpha y.
\end{aligned}
$$

这样，我們沒有理由把向量这一概念仅局限于有向綫段．我們現在引入数体上一般綫性空間的概念．

設$F$是任一数体，其中的数用$\alpha$, $\beta$, …表示，$V$是任一非空集合，以$x$，$y$，…表示其中的元素：

定义1．如果在$V$中定义了一个加法运算，使$V$中任二元素$x$与$y$都可由这一运算唯一决定出$V$中的一个元素$z$称为$x$与$y$之和，記作$z=x+y$，它适合下列各性質：

(1) $x+y=y+x$（加法滿足交换律）

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$（加法滿足結合律）

(3) 在$V$中含有一个元素記作0,对于$V$中的任意元素$x$有：

$$x+0=x.$$

(4) 对于$V$中任意元素$x$，在$V$中存在着元素$y$，使：$x+y=0$ $y$叫作$x$的負向量，記作$-x$.

2. 在数体$F$与$V$之間規定了一个叫作作用乘法的运算，通过这个运算可以把$F$中任意数$\alpha$与$V$中的元素相乘，得到$V$中唯一一个元素$z$，記作$z=\alpha x$，它具有下列性質：

(5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

(6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

(7) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)=\beta(\alpha x)$,

(8) $1\cdot x=x$,

这样的集合$V$叫作$F$上的綫性空間（或向量空間）記作$V(F)$，其中的元素叫作向量，$F$叫作基域.

以后我們总用記号$V(F)$表示一个数体$F$上的綫性空間，在一个綫性空間里，可以推出下面一些重要結果：

（一）0向量唯一确定.

設$0_1$与$0_2$都是0向量，则由0向量的性質，有

$$0_1+0_2=0_1=0_2$$

即0向量唯一确定.

（二）向量$x$的負向量唯一确定.

令$y_1$与$y_2$都是$x$的負向量，則

$$(y_1+x)+y_2=y_1+(x+y_2)$$

而
$$(y_1+x)+y_2=0+y_2=y_2$$
$$y_1+(x+y_2)=y_1+0=y_1$$

于是有$y_1=y_2$ 即$x$的負向量唯一确定.

利用归納法容易推出

（三）$\alpha(x_1+x_2+\cdots+x_m)=\alpha x_1+\alpha x_2+\cdots+\alpha x_m$.

（四）$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)x=\alpha_1x+\alpha_2x+\cdots+\alpha_mx.$

另一方面，因

$$x=(1+0)x=1\cdot x+0\cdot x=x+0\cdot x$$

所以有

（五）$0\cdot x=0$

$$\alpha 0=\alpha\cdot(0+0)=\alpha 0+\alpha 0$$

所以有

（六）$\alpha 0=0.$

由于

$$\alpha x+(-\alpha)x=(\alpha-\alpha)x=0x=0$$

$$\alpha x+\alpha(-x)=\alpha(x-x)=\alpha\cdot 0=0$$

所以，$(-\alpha)x$ 与 $\alpha(-x)$ 都是 $\alpha x$ 的負向量

因而有

（七）$(-\alpha)x=\alpha(-x)=-(\alpha x).$

特别地，$(-1)x=-x.$

下面繼續看几个例子.

例2. 第五章§1中所提到的所有自由向量的全体，关于向量的加法和数乘向量的乘法，是实数体上的綫数空間.

（証明可參閱第五章講义第1頁到第10頁）.

例3. 令 $T_n$ 表示由一切形如

$$f(t)=\alpha_0+\alpha_1t+\cdots+\alpha_{n-1}t^{n-1}$$

可多項式所作成的集合（其中 $\alpha_1$，$\alpha_1$，$\cdots$，$\alpha_{n-1}$ 是数体中任意 $F$ 的数，的以全为0）.

在 $T_n$ 中規定多項式的加法为其加法运算，由第三章§12易知

若 $f(t)$ 与$g(t)$ , $h(t)$ 是$T_n$中任三元素，则

(1) $f(t)+g(t)=g(t)+f(t)$

(2) $[f(t)+g(t)]+h(t)=f(t)+[g(t)+h(t)]$

(3) 0多项式是0向量，

(4) 若 $f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_{n-1}t^{n-1}$，则$-f(t)$ 为

$$(-\alpha_0)+(-\alpha_1)t+\cdots+(-\alpha_{n-1})t^{n-1}.$$

再规定$F$中的数与$T_n$的元素相乘的作用乘法：

$$\alpha f(t)=(\alpha\alpha_0)+(\alpha\alpha_1)t+\cdots+(\alpha\alpha_{n-1})t^{n-1}.$$

可証

(5) $\alpha[f(t)+g(t)]=\alpha f(t)+\alpha g(t)$

(6) $(\alpha+\beta)f(t)=\alpha f(t)+\beta g(t)$

(7) $(\alpha\beta)f(t)=\alpha[\beta f(t)]=\beta[\alpha f(t)]$

(8) $1\cdot f(t)=f(t)$.

仅以（7）式为例，其它各等式作为習题自証。

令 $f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_{n-1}t^{n-1}$

则 
$$\begin{aligned}(\alpha\beta)f(t)&=(\alpha\beta)\alpha_0+[(\alpha\beta]\alpha_1]t+\cdots+[(\alpha\beta)\alpha_{n-1}]t^{n-1}\\&=\alpha(\beta\alpha_0)+\alpha[(\beta\alpha_1)t]+\cdots+\alpha[(\beta\alpha_{n-1})t^{n-1}]\\&=\alpha[\beta\alpha_0+(\beta\alpha_1)t+\cdots+(\beta\alpha_{n-1})t^{n-1}]\\&=\alpha[\beta f(t)]\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta)\alpha_0+[(\alpha\beta)\alpha_1]t+\cdots+[(\alpha\beta)\alpha_{n-1}]t^{n-1}\\&=(\beta\alpha)\alpha_0+[(\beta\alpha)\alpha_1]t+\cdots+[(\beta\alpha)\alpha_{n-1}]t^{n-1}\\&=\beta[\alpha\alpha_0+(\alpha\alpha_1)t+\cdots+[\alpha\alpha_{n-1})t^{n-1}]\\&=\beta[\alpha f(t)]\end{aligned}$$

所以 $(\alpha\beta)f(t)=\alpha[\beta f(t)]=\beta[\alpha f(t)]$.

总此可以看出 $T_n$ 是数体$F$上的线性空间．

例4． 令 $M_n$ 是由数体$F$上一切$n$阶方阵所构成的集合．

1． 在 $M_n$ 中规定方阵的加法为其加法运算，这时由第二章§8可知下列等式成立：

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A(B+C)$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 是0向量

(4) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的负向量

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

2． 以第二章§8中定义4所规定的数乘阵的乘法为作用乘法，则有

(5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

(6) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,

(7) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$

(8) $1\cdot A=A$

（其中$A$，$B$，$C$是$M_n$中任意$n$阶方阵，$\alpha$，$\beta$是数体$F$中任意数）．

总此可见$M_n$是数体$F$上的线性空间．

例5． 令$C[1,0]$为由闭区间$[0, 1]$上的一切连续函数$f(t)$所构成的集合．$C[1,0]$中二元素$f(t)$与$g(t)$当且仅当对于$[0, 1]$中任意点$t_0$的函数值$f(t_0)$与$g(e_0)$都对应相等时，算作相等。（参考数学分析中函数相等的规定）．

1. 规定函数的加法为$C[1, 0]$中的加法运算（参考数学分析）：若 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是 $C[1, 0]$ 中任二元素，令 $h(t)=f(t)+g(t)$ 是如下的函数：

$$h(t_0)=f(t_0)+g(t_0) \qquad (0\leqslant t_0\leqslant 1)$$

由数学分析中的結果可知，$h(t)$ 在 $[0, 1]$ 仍为連續函数。

可以驗証

(1) $f(t)+g(t)=g(t)+f(t)$

(2) $[f(t)+g(t)]+h(t)=f(t)+[g(t)+h(t)]$

事实上，按函数加法运算，$f(t)+g(t)$ 在 $t_0$ 点的函数值为：

$$f(t_0)+g(t_0)$$

而 $g(t)+f(t)$ 在 $t_0$ 点的函数値为；

$$g(t_0)+f(t_0)$$

而 $f(t_0)$ 与 $g(t_0)$ 都是实数，所以

$$f(t_0)+g(t_0)=g(t_0)+f(t_0)$$

即函数 $f(t)+g(t)$ 与 $g(t)+f(t)$ 在 $[0, 1]$ 上各点的函数値都对应相等，即

$$f(t)+g(t)=g(t)+f(t).$$

类似地可以証明（2）式成立。

(3) 0函数是$C[0, 1]$中的0向量，事实上，0函数在$[0,1]$上是連續函数，且对于$C[0, 1]$中的任意連續函数$f(t)$来說，

$0+f(t)$ 在 $[0, 1]$ 上各点的値等于 $f(t_0)$。

所以 $$0+f(t)=f(t).$$

(4) $f(t)$ 的負向量是 $f(t)$ 的負函数 $-f(t)$，（$-f(t)$ 在 $t_0$ 点的函数值为 $-f(t_0)$）。

2. 令$F$为实数体，$\alpha$为任意实数，規定数与$C[0, 1]$中的連續函

数 $f(t)$ 相乘的作用乘法如下：

$\alpha f(t)$ 在 $t_0$ 点的函数值定义为 $\alpha f(t_0)$ $(0\leqslant t_0\leqslant 1)$

由数学分析中的結果可知 $\alpha f(t)$ 在 $[0,1]$ 上仍为連續函数．

与（1）式的証明相同，可証

(5) $\alpha[f(t)+g(t)]=\alpha f(t)+\alpha g(t)$

(6) $(\alpha+\beta)f(t)=\alpha f(t)+\beta f(t)$

$(\alpha\beta)f(t)=\alpha[\beta f(t)]=\beta[\alpha f(t)]$

(9) $1\cdot f(t)=f(t)$.

所以 $C[0,1]$ 是实数体上的綫性空間．

（注意：在本例中 $f(t)$，$g(t)$，$h(t)$ 等記号并不是多項式，而是代表 $[0,1]$ 上的連續函数，例如它可以是 $\sin t$，$\cos t$，当然也可以是 $2+5t+t^2$）

## 習　　題

1．补証本节各例中未加証明的各等式．

2．平面上始点在原点，終点在第一象限的向量的集合关于向量的加法，数乘向量的乘法是否構成綫性空間？

3．在平面上的一切向量中，除去平行于某一已知直綫的一切向量后，所余的向量能否構成一綫性空間？

4．令 $V$ 是正实数集，$F$ 是实数体，在 $V$ 中規定加法运算如下：

$x+y=xy$（$x$ 与 $y$ 之和等于二数用普通数的乘法所作乘出之积）

$F$ 中的数与 $V$ 中的元素相乘的作用乘法为：

$$\alpha x=x^{\alpha}$$

此处，$x$ 与 $y$ 为任意正实数，$\alpha$ 为任意实数．

証明：$V$ 是 $F$ 上的綫性空間．

5. 若 $M_{m,n}$ 为由数体 $F$ 上一切 $m$ 行 $n$ 列的矩陣所構成的集合. 証明: $M_{m,n}$ 关于陣的加法与数乘陣的作用乘法是 $F$ 上的綫性空間.

6. 若 $n$ 阶方陣 $A$ 满足条件:

$$A'=A$$

则称 $A$ 为对称陣.

若

$$A'=-A$$

则称 $A$ 为反对称陣.

証明, 数体 $F$ 上一切 (反) 对称陣的集合关于陣的加法与数乘陣的作用乘法是 $F$ 上的綫性空間. (其中, $A^1$ 为 $A$ 的轉置陣).

7. 令 $V_n$ 是数体 $F$ 上的一切有序 $n$ 数組的集合, 在 $V_n$ 中規定加法运算如本节例 1, 数乘 $V_n$ 中任意元素的作用乘法为:

若

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \cdots, 0)$$

試就上面所規定的运算, 驗算綫性空間定义中 (1)～(8) 的条件: 是否都成立?

## § 2. 向量的綫性关系

向量的綫性相关和綫性无关这兩个概念, 在今后的討論中經常要用到. 这兩个概念在第五章 § 1 第 6 段中, 曾經作过介紹, 本节將在一般綫性空間中介紹这兩个概念.

令 $V(F)$ 是数体 $F$ 上的綫性空間. $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是 $V(F)$ 中任意一組向量.

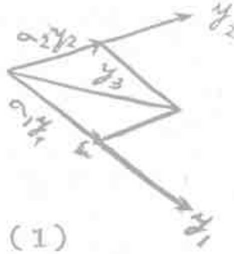
**定义1.** 如果在数体 $F$ 中存在一組不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使等式

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0 \tag{1}$$

成立时，則說向量組 $x_1$，$x_2$，…，$k_r$ 綫性相关；反之（1）式成立必須 $k_1$，$k_2$，…，$k_r$ 全为 0 时，則称向量組 $x_1$，$x_2$，…，$x_r$ 綫性無关.

例1. 令 $V_3(F)$ 是通常的三維空間．如果 $x_1$ 与 $x_2$ 是 $V_3(F)$ 中兩个共綫的向量．則此二向量綫性相关．事实上，这二个向量成比例，$x_1=\lambda x_2$，于是有 $x_1+\lambda x_2=0$.

又，$y_1$，$y_2$ 和 $y_3$ 是三个在同一平面上的三个向量，則此三个向量綫性相关，事实上，令 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 如右圖：这时把 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 适当伸長或縮小，（相当于以数乘之），則可使 $y_3$ 为 $y_1$ 与 $y_2$ 延長或縮小后的向量之和：（参考圖 1）




$$y_3=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2 \tag{1}$$

从而有 $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2-y_3=0$.

所以，$y_1$，$y_2$，$y_3$ 綫性相关.

例2. $V_3$ 中的向量組：

$x_1=(1,\ 1,\ 1)$，$x_2=(1,\ 2,\ 3)$，$x_3=(1,\ 3,\ 6)$ 綫性无关.

事实上，只須說明有不全为 0 的数 $k_1$，$k_2$，$k_3$ 使

$$k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3=0$$

成立即可.

把 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 代入上式，經过整理則有

$$k_1(1,\ 1,\ 1)+k_2(1,\ 2,\ 3)+k_3(1,\ 3,\ 6)$$
$$=(k_1+k_2+k_3,\ k_1+2k_2+3k_3,\ k_1+3k_2+6k_2)=0$$

再由 $V_3$ 中向量相等的定义，則有

$$\left.\begin{aligned}k_1+k_2+k_3=0\\ k_1+2k_2+3k_3=0\\ k_1+3k_2+6k_3=0\end{aligned}\right\} \tag{*}$$

上面方程組的系数行列式不等于0，所以（*)式只有0解.即 $k_1,k_2,k_3$ 必須全为0，从而向量組$x_1$，$x_2$，$x_3$綫性无关.

例3. $V_3$ 中的向量組

$$x_1=(1,\ 2,\ 2)$$
$$x_2=(-2,\ 1,\ -1)$$
$$x_3=(1,\ -3,\ -1)$$

綫性相关.

解. 考虑有否不全为0的数 $k_1$，$k_2$，$k_3$ 使

$$k_1x_1+k_2x_2+k_2x_3=0.$$

把 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 代入上式得，

$$k_1(1,\ 2,\ 2)+k_2(-2,\ 1,\ -1)+k_3(1,\ -3,\ -1)=$$
$$(k_1-2k_2+k_3,\ 2k_1+k_2-3k_3,\ 2k_1-k_2-k_3)=0$$

由 $V_3$ 中向量相等的定义，有

$$\left.\begin{array}{l} k_1-2k_2+k_3=0 \\ 2k_1+k_2-3k_3=0 \\ 2k_1-k_2-k_3=0 \end{array}\right\} \qquad (**)$$

而上面方程組的系数行列式等于0，所以（**）式有非0解. 即存在不全为0的数 $k_1$，$k_2$，$k_3$ 使

$$k_1x_1+k_2x_2+k_3k_3=0$$

成立.（比如取 $k_1=k_2=k_3=1$ 即滿足要求）. 所以向量組 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 綫性相关.

下面繼續介紹一个与綫性相关概念有密切关系的概念.

設 $x_1$，$x_2$，…，$x_r$ 和 $y$ 都是$V(F)$ 中的向量.

**定义2.** 如果在数体$F$中存在 $r$ 个数 $k_1$，$k_2$，…，$k_r$ 使

$$y=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r$$

成立，則說 $y$ 是向量組 $x_1$，$x_2$，…，$x_r$ 的綫性組合；或者說向量 $y$ 可被向量組 $x_1$，$x_2$，…，$x_r$ 綫性表出.

例3. $V_3$ 中的向量 $y=(2,1,3)$ 是向量組 $x_1=(1,1,1)$，$x_2=(1,1,0)$，$x_3=(1,0,0)$ 的綫性組合.

解. 考虑有否 $k_1$，$k_2$，$k_3$ 使

$$x=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3$$

成立. 把 $x_1,x_2,x_3$ 与 $y$ 代入上式得:

$$(2,1,3)=k_1(1,1,1)+k_2(1,1,0)+k_3(1,0,0)$$

整理之，得

$$(2,1,3)=(k_1+k_2+k_3,k_1+k_2,k_1)$$

由向量相等的規定，則有

$$\left.\begin{aligned} k_1+k_2+k_3&=2, \\ k_1+k_2\qquad &=1, \\ k_1&=3. \end{aligned}\right\}$$

解之得，$k_1=3$　$k_2=-2$　$k_3=1$.

对于向量組也可引入綫性表出的概念.

若 $x_1$，$x_2$，…，$x_r$ (1) 和 $y_1$，$y_2$，…，$y_s$ (2) 都是 $V(F)$ 中的向量組. 如果組 (1) 中的每个向量都能被組 (2) 綫性表出时，則說向量組 (1) 可被向量組 (2) 綫性表出. 如果二向量組可以互相綫性表出时，則称此二向量組等价

**定理1.** $r\geqslant 2$ 时，$V(F)$ 中的向量組 $x_1$，$x_2$，…，$x_r$ 綫性相关的充分必要条件是，其中某一向量是其余向量的綫性組合.

証明：(一) 必要性. 設向量組 $x_1$，$x_2$，…，$x_r$ 綫性相关，則下列等式成立:

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0,$$

其中至少有 $-k_i \neq 0$. 不妨假定 $k_1 \neq 0$. 则

$$x_1=\left(\frac{-k_2}{k_1}\right)x_2+\cdots+\left(\frac{-k_r}{k_1}\right)x_r,$$

这就是說，$x_1$ 是 $x_2, \cdots, x_r$ 的綫性組合，总此必要性得証.

（二）充分性. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中有一向量是其余向量的綫性組合，假定此向量为 $x_1$，则

$$x_1=k_2x_2+\cdots+k_rx_r.$$

于是有

$$(-1)x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0$$

由于至少 $-1 \neq 0$，所以 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 綫性相关.

由这个定理，容易看出綫性組合和綫性相关这两个概念本質上沒有区别.

根据本节的定义1与定义2，容易推出以下几个基本事实：

（一）向量組 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中每一向量 $x_i$ 都可由这一向量組綫性表出，蓋因，$x_i=0x_1+\cdots+x_i+\cdots+0x_r$

（二）若向量組 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 綫性無关，则它的任意部分向量組也綫性無关，这一事实也可以叙述为：若向量組 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 有一部分向量組綫性相关，則向量組 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 也綫性相关.

証明：假定 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中有 $p$ 个向量綫性相关，不妨假定是 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中的前 $p$ 个向量. 则一定有不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, x_p$，使

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_px_p=0$$

取 $k_{p+1}=\cdots=k_r=0$，就得到等式

$$k_1x_1+\cdots+k_px_p+k_{p+1}x_{p+1}]+\cdots+k_rx_r=0$$

其中 $k_1, \cdots, k_p, k_{p+1}, \cdots, k_r$ 不全为0. 由此得 $x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_r$ 綫性相关. 所以，当 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 綫性无关时，其中任一