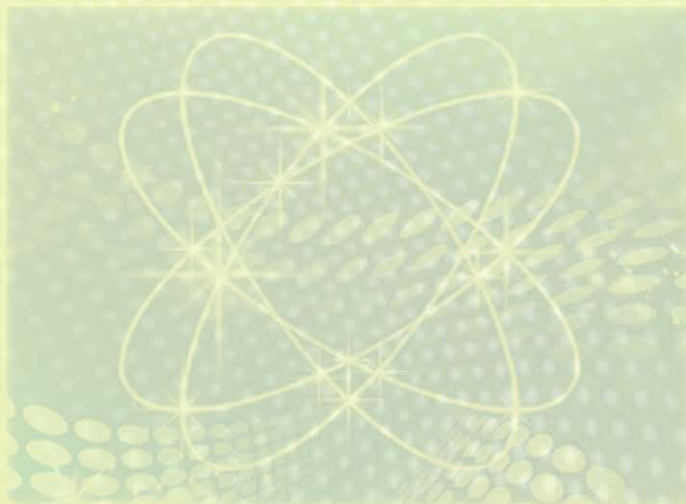


高等数学

主编 姚红梅 高汝林



西北大学电子出版社

21世纪高等职业教育系列规划教材·数学平台课

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

主 编

姚红梅 高汝林

副主编

张 力 张红莉 付巧峰

西北大学电子出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/姚红梅,张拓主编. —西安:西北大学出版社,2010. 8
ISBN 978-7-5604-2779-9

I. ①高… II. ①姚… ②张… III. ①高等数学—高等学校:
技术学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 123797 号

高等数学

出版发行	西北大学出版社	社 址	西安市太白北路 229 号
电 话	029—88303313	经 销	新华书店经销
印 刷	陕西奇彩印务有限责任公司	开 本	787×1092 1/16
版 次	2010 年 8 月第 1 版	印 次	2010 年 8 月第 1 次印刷
字 数	487 千字	印 张	20
书 号	ISBN 978—7—5604—2779—9	定 价	30.00 元

前言

为适应高等职业教育发展的新形势,按照“在基础课的教学中,要求以应用为目的,以必需够用为度”的原则,我们认真总结了高等职业教育数学课教改的经验并吸取国内同类教材的优点,组织编写了这套适用于高等职业院校的《高等数学》教材。

在编写过程中,我们充分考虑到高等职业教育的特点及对人才培养目标的要求,为了使教师好用,学生好学,特别在以下几个方面作了一定的努力:

1. 强调概念、定理的背景分析和直观解释,不追求严格的论证和推导,代之以几何说明、合情推理。
2. 精选例题、习题和复习题。每节后的习题以反映基本概念、基本运算和基本方法的题目为主,每章后的复习题以判断、选择、填空等客观性题目和较综合的题目为主。
3. 每章后配有本章小结,旨在帮助学生掌握基本要求,突破重点难点。
4. 为提高学生利用计算机解决数学问题的能力,还增加了“MATLAB 使用入门”一章,供教学时参考。

全书内容包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,多元函数微分学及其应用,无穷级数,行列式,概率论基础和 MATLAB 使用入门。书后附有初等数学常用公式,常用平面曲线,常用积分表,常用分布表及习题参考答案。本书标有*号的内容为选学内容。

参加本书编写的有陕西邮电职业技术学院姚红梅(第一、二、三、五章),陕西财经职业技术学院张拓(第四、九、十章),陕西工业职业技术学院高汝林(第六、十一章),西安科技大学付巧峰(第七章),陕西经济管理职业技术学院张力(第八章)。全书编写大纲及框架结构安排由姚红梅、张拓承担。另外,高汝林、付巧峰和张力也承担了部分的统稿工作。

本书除可作为高等职业院校的教材外,也可作为成人高等学校、本科院校的二级职业技术学院的《高等数学》教材,还可供工程技术人员参考。

由于编者水平有限,加之时间仓促,错误和疏漏之处在所难免,恳请使用者批评指正,以便再版时进一步修订完善。

编者

2010 年夏

目 录

第一章 函数、极限与连续	(1)
§ 1.1 函数	(1)
§ 1.2 极限的概念	(7)
§ 1.3 无穷小与无穷大	(11)
§ 1.4 极限的运算法则	(13)
§ 1.5 两个重要极限与无穷小的比较	(16)
§ 1.6 函数的连续性	(20)
本章小结	(25)
复习题一	(27)
第二章 导数与微分	(29)
§ 2.1 导数的概念	(29)
§ 2.2 导数的运算法则	(33)
§ 2.3 隐函数及参数方程确定的函数的导数	(38)
§ 2.4 高阶导数	(40)
§ 2.5 函数的微分	(43)
本章小结	(46)
复习题二	(47)
第三章 导数的应用	(49)
§ 3.1 微分学中值定理 洛必达法则	(49)
§ 3.2 函数的单调性与极值	(55)
§ 3.3 函数的凹凸性与拐点 函数作图	(62)
* § 3.4 曲率	(65)
本章小结	(68)
复习题三	(70)
第四章 不定积分	(72)
§ 4.1 不定积分的概念与性质	(72)
§ 4.2 换元积分法	(77)
§ 4.3 分部积分法	(84)
* § 4.4 其他积分举例	(86)
本章小结	(89)

复习题四	(91)
第五章 定积分及其应用	(93)
§ 5.1 定积分的概念与性质	(93)
§ 5.2 微积分学基本定理	(99)
§ 5.3 定积分的换元法和分部积分法	(104)
§ 5.4 定积分的几何应用	(108)
§ 5.5 广义积分	(117)
本章小结	(121)
复习题五	(122)
第六章 常微分方程	(124)
§ 6.1 微分方程的概念	(124)
§ 6.2 一阶线性微分方程	(129)
* § 6.3 可降阶的高阶微分方程	(133)
§ 6.4 二阶常系数线性齐次微分方程	(136)
§ 6.5 二阶常系数线性非齐次微分方程	(138)
本章小结	(144)
复习题六	(144)
第七章 多元函数微分学及其应用	(147)
§ 7.1 多元函数的概念、极限与连续	(147)
§ 7.2 偏导数	(150)
§ 7.3 全微分	(154)
§ 7.4 多元复合函数与隐函数的求导	(157)
§ 7.5 偏导数的几何应用	(162)
§ 7.6 多元函数的极值	(165)
本章小结	(170)
复习题七	(171)
第八章 无穷级数	(173)
§ 8.1 常数项级数的概念与性质	(173)
§ 8.2 常数项级数的审敛法	(176)
§ 8.3 幂级数	(181)
§ 8.4 函数的幂级数展开	(186)
* § 8.5 傅里叶级数	(189)
本章小结	(198)
复习题八	(199)
第九章 行列式	(201)
§ 9.1 行列式的概念	(201)
§ 9.2 行列式的性质与计算	(207)

§ 9.3 克莱姆法则	(215)
本章小结	(218)
复习题九	(218)
第十章 概率论基础	(221)
§ 10.1 随机事件与概率	(221)
§ 10.2 概率的基本公式	(229)
§ 10.3 随机变量及其分布	(242)
§ 10.4 随机变量的数字特征	(251)
本章小结	(258)
复习题十	(260)
* 第十一章 MATLAB 使用入门	(262)
§ 11.1 基本命令与运算	(263)
§ 11.2 向量与矩阵	(265)
§ 11.3 符号计算	(267)
§ 11.4 函数作图	(272)
附录一 初等数学常用公式	(277)
附录二 常用平面曲线	(290)
附录三 常用积分表	(283)
附录四 常用分布表	(290)
参考答案	(296)

第一章 函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则以变量为研究对象. 函数是同一自然现象或技术过程中变量依从关系的反映. 极限方法则是研究变量的一种基本方法,是微积分学的重要工具. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上,讨论函数的极限和函数的连续性问题.

§ 1.1 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律.

例如,在自由落体运动中,假定开始下落的时刻为 $t = 0$,那么下落时间 t 与下落的距离 s 之间的相依关系由公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 给定,其中 g 是重力加速度,假定物体着地的时刻为 T ,那么变量 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定下落距离 s 这个变量的相应数值.

上例中变量 t 与 s 之间的这种依从关系就是我们将要讨论的函数.

定义 1 设有两个变量 x 和 y ,若当变量 x 在实数的某一范围 D 内,任意取定一个数值时,变量 y 按照某一对应法则 f ,都有惟一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量, y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域. 当 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的集合叫做函数的值域.

函数可以用解析式(公式)、图像或表格表示. 今后,如无特别说明我们讨论的函数皆指用解析式表示的函数.

在考虑实际问题时,应根据问题的实际意义来确定函数的定义域. 如上例中函数的定义域就是 $D = [0, T]$. 当只给函数的解析式而没有实际背景时,其定义域就是指使解析式有意义的自变量能取的一切实数值构成的集合.

例 1 求函数 $y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须

$$4 - x^2 \neq 0 \text{ 且 } x + 2 \geq 0$$

即 $x \neq \pm 2$ 且 $x \geq -2$. 因此, 该函数的定义域为 $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

两个函数当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 这两个函数才被认为是相同的.

例如, 函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x + 1$, 由于它们的定义域不同, 所以它们是不同的函数.

定义域和对应法则是确定函数的两个要素.

需要强调的是求函数值的关键在于弄清对应法则. 对于一个已知函数必须会找它的对应法则. 如函数 $y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 的对应法则为

$$f(\quad) = \frac{e^{(\quad)} + e^{-(\quad)}}{e^{(\quad)} - e^{-(\quad)}}$$

2. 分段函数

分段函数是指在自变量的不同取值范围内, 用不同的表达式表示的函数. 应特别注意, 用几个表达式表示的分段函数是一个函数, 而不是几个函数. 求分段函数的函数值时, 应把自变量的值代入相应的表达式中去计算.

例如, 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

及取整函数 $y = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 都是分段函数.

例 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 求 $f(4)$ 和 $f(-3)$.

解 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = \sqrt{x}$, 所以 $f(4) = \sqrt{4} = 2$,
当 $x < 0$ 时 $f(x) = -x$, 所以 $f(-3) = -(-3) = 3$.

二、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$, 如果存在一个正数 M , 对于 I 内的任一 x 总有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在数集 I 上有界.

如 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 而 $g(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内有界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加, 区间 I 称为单调增区间. 若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少, 区间 I 称单调减区间.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对于任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称

$f(x)$ 为偶函数;若都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在不为零的数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $(x+T) \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立. 则称 $f(x)$ 为周期函数. 通常说的函数的周期是指它的最小正周期.

注意 常值函数无最小正周期.

三、反函数

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 如果对于 W 中的任一 y , 由 $y = f(x)$ 能解出惟一的 $x(x = \varphi(y))$, 这时 y 成了自变量, 而 x 成了因变量, 我们称 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, $f(x)$ 称为直接函数. 它们两者的图像显然是重合的.

习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示. 因此常常把 $x = \varphi(y)$ 改写成 $y = \varphi(x)$, 称 $y = \varphi(x)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数. 这时它们的图像关于直线 $y = x$ 对称.

四、初等函数

1. 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数皆称为基本初等函数. 它们的定义域、值域、图像和特性如下页基本初等函数表(表中没有列出正割和余割函数, 它们的图像参见附录二)所示.

2. 复合函数

定义 3 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 而且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或该定义域的一部分取值时, 所对应的 u 的值使 $y = f(u)$ 有定义, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数, 称 u 为中间变量.

注意 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数, 例如 $y = \arcsin u$ 和 $u = 2 + x^2$ 就不可能复合成一个复合函数. 因为对于 $u = 2 + x^2$ 的定义域内的任何 x 值所对应的 u 值都使 $y = \arcsin u$ 没有意义.

对于一个给定的复合函数, 必须会分析清楚它的复合过程(即将复合函数进行分解). 掌握这种分析复合过程的方法, 对将来求函数的导数和积分会带来很多方便.

例 3 指出下列复合函数的复合过程:

$$(1) y = \sqrt[4]{1+x^2} \quad (2) y = \cos^2 x \quad (3) y = e^{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

解 (1) $y = \sqrt[4]{1+x^2}$ 是由 $y = \sqrt[4]{u}$ 与 $u = 1+x^2$ 复合而成.

(2) $y = \cos^2 x$ 是由 $y = u^2$ 与 $u = \cos x$ 复合而成.

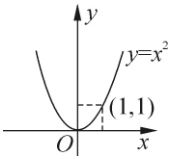
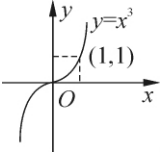
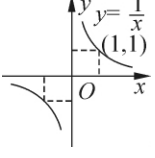
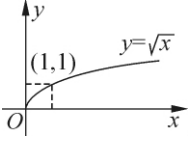
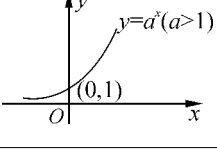
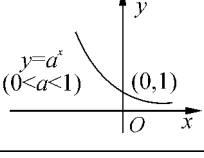
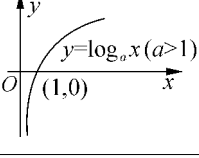
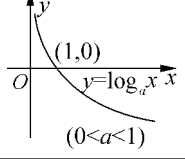
(3) $y = e^{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}$ 是由 $y = e^u$, $u = \arctan v$ 和 $v = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的并能用一个解析式子表示的函数称为初等函数.

例如, $y = \cos(x^2 + 2x + 3)$ 和 $t = \sqrt{\lg(x^2 + 1)} + e^{\sqrt{x}}$ 都是初等函数.

基本初等函数表

函数	定义域	值域	简单性质	图像
幂函数 $y = x^a$	$y = x^2$	$\mathbf{R}$	$y \geq 0$ 偶函数 $x > 0$, 递增 $x < 0$, 递减	
	$y = x^3$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$ 奇函数 单调递增	
	$y = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$ 奇函数 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 分别单调递减	
	$y = \sqrt{x}$	$x \geq 0$	$y \geq 0$ 非奇非偶 单调递增	
指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$a > 1$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^+$ 单调递增 过 $(0, 1)$	
	$0 < a < 1$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^+$ 单调递减 过 $(0, 1)$	
对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$a > 1$	$\mathbf{R}^+$	$\mathbf{R}$ 单调递增 过 $(1, 0)$	
	$0 < a < 1$	$\mathbf{R}^+$	$\mathbf{R}$ 单调递减 过 $(1, 0)$	

续表

函数	定义域	值域	简单性质	图像	
三角函数	$y = \sin x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	奇函数 有界 周期 2π	
	$y = \cos x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	偶函数 有界 周期 2π	
	$y = \tan x$	$x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)	$\mathbf{R}$	奇函数 周期 π	
	$y = \cot x$	$x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)	$\mathbf{R}$	奇函数 周期 π	
反三角函数	$y = \arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	奇函数 单调递增 有界	
	$y = \arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	单调递减 有界	
	$y = \arctan x$	$\mathbf{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	奇函数 单调递增 有界	
	$y = \operatorname{arccot} x$	$\mathbf{R}$	$(0,\pi)$	单调递减 有界	

五、函数关系举例

例 4 有一个长方形铁皮,它两边的长为 a 和 b ,从它的四个角截去相同的小方块,折成一个无盖的盒子(如图 1.1),求它的容积 v 与高 x 之间的函数关系.

解 设截去的小方块的边长为 x ,则折成的盒子的高为 x ,底面长为 $a-2x$,宽为 $b-2x$,这时它的容积为

$$v = (a-2x)(b-2x)x = 4x^3 - 2(a+b)^2x^2 + abx$$

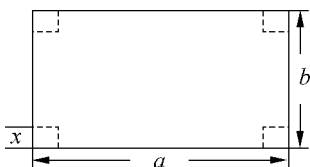


图 1.1

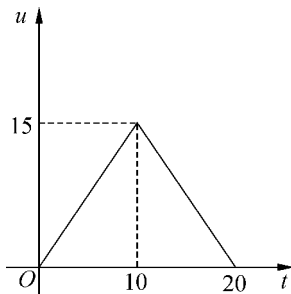


图 1.2

例 5 电脉冲发生器发出一个三角形的脉冲波(如图 1.2)求电压 u (伏) 和时间 t (微秒) 之间的函数关系.

解 在 0 到 10(微秒) 这段时间内,电压 u 由 0 直线上升到 15(伏),由图像知这条线段方程是

$$u = \frac{15}{10}t = 1.5t, \quad t \in [0, 10]$$

在 10 到 20(微秒) 这段时间内,电压 u 由 15(伏) 直线下降到 0,这条线段方程是

$$u = -\frac{15}{10}t + 30 = -1.5t + 30, \quad t \in [10, 20]$$

归纳上面讨论的结果,函数 $u = u(t)$ 可表示成下面的分段函数形式:

$$u = \begin{cases} 1.5t, & 0 \leq t < 10 \\ -1.5t + 30, & 10 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

最后介绍后面几章要用到的 δ -邻域的概念.

以 x_0 为中心,长度为 2δ ($\delta > 0$) 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域,可用不等式 $|x - x_0| < \delta$ 来表示. x_0 叫做邻域的中心, δ 叫做邻域的半径. 当 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后,称为 x_0 的 δ 空心邻域,可用不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示.

【习题 1.1】

1. 求下列函数的定义域

(1) $y = \lg(\lg x)$

(2) $y = \frac{1}{1-x} + \arcsin \frac{x}{2}$

(3) $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$

(4) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$

2. 指出下列函数的最小正周期

(1) $y = \sin x \cos x$

(2) $y = 1 + \cot x$

(3) $y = \sin^2 x$

(4) $y = \sin x + \cos x$

3. 设

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

求 $f(-2), f(0), f(2)$.4. 设 $f(x) = (x-1)^2, g(x) = \frac{1}{x+1}$, 求

(1) $f[g(x)]$

(2) $g[f(x)]$

(3) $f(x^2)$

(4) $g(x-1)$

5. 设 $F(x) = e^x$, 证明:

(1) $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$

(2) $\frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y)$

6. 指出下列函数的复合过程

(1) $y = \tan \sqrt{1+x}$

(2) $y = \sin^2(1+2x)$

(3) $y = [\arcsin(1-x^2)]^3$

7. 在半径为 R 的球内作内接圆柱体, 试将圆柱体体积表示为高的函数, 并求此函数的定义域.

8. 已知鸡蛋收购价为每公斤 3 元时, 每月能收购 5000 公斤. 若将收购价每公斤提高 0.1 元, 则每月收购量可以增加 500 公斤, 试求鸡蛋的线性供给函数.

§ 1.2 极限的概念

一、数列的极限

例 1 考察下列几个数列:

(1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, 即数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

(2) $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, 即数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

(3) $\{x_n\} = \{(-1)^{n-1}\}$, 即数列 $1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$

(4) $\{x_n\} = \{n^2 + 3\}$, 即数列 $4, 7, \dots, n^2 + 3, \dots$

可以发现, 随着 n 的无限增大, 各数列的通项 x_n 的变化趋势可以分成两种情形. 第一种情形是: 当 n 无限增大时, 通项 $\{x_n\}$ 无限地接近于某一常数. 例如, 在 (1) 中, 随着 n 的无限增大, 通项 $x_n = \frac{1}{n}$ 无限地趋近于零; 在 (2) 中, 随着 n 的无限增大, 通项 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 无限趋近于1. 另一种情形是: 当 n 无限增大时, 通项 x_n 不趋近于任意常数. 例如, 在 (3) 中, 数列通项 $x_n = (-1)^{n-1}$ 总是在 1 和 -1 之间振动; 在 (4) 中, 随着 n 的增大, 其通项 $x_n = n^2 + 3$ 无限增大, 它们都不趋近于任何常数.

为了从数学上描述上面 (1) 和 (2) 两个数列所具有的共同性质, 我们给出了数列极限的概念:

定义 1 给定数列 $\{x_n\}$, 如果当 n 无限增大时, 其通项 x_n 无限地趋近于某一个常数 A , 则

称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \text{ 或者 } x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$$

当数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限时, 称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 此时称 $\{x_n\}$ 为收敛数列. 如果数列 $\{x_n\}$ 不趋近于任何常数, 即 $\{x_n\}$ 没有极限, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

由此可见, 并不是所有数列都有极限. 求数列极限时, 对于一些简单的情形, 可以通过观察得到数列的极限, 如例 1 中的 (1)、(2); 有些稍为复杂的情形, 可以先对数列的通项进行恒等变形加以简化, 然后再观察它的极限.

例 2 设有数列 $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ (其中 q 是常数, 满足 $|q| < 1$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 我们知道 $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, 由于 $|q| < 1$, 根据指数函数的性质可知, 当 n 无限增大时, q^{n+1} 无限趋近于零, 所以 $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ 无限趋近于 $\frac{1}{1 - q}$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1 - q}$.

二、函数的极限

对于函数的极限, 根据自变量变化的过程, 分两种情形讨论.

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

对于函数来说, $x \rightarrow \infty$ 可包含以下两种情况:

(1) x 取正值, 无限增大, 记作 $x \rightarrow +\infty$.

(2) x 取负值, 它的绝对值无限增大, 记作 $x \rightarrow -\infty$.

反过来, 如果 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 两种情况都存在, 则可以合并写成 $x \rightarrow \infty$.

讨论函数 $y = \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势 (如图 1.3). 由图可知, 当 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ (即 x 的绝对值无限增大) 时, $y = \frac{1}{x}$ 的图像越来越和 x 轴靠近, 即 $\frac{1}{x}$ 的值越来越趋近于零.

和数列极限类似, 下面我们给出函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限定义.

定义 2 如果当 $|x|$ 无限增大 ($x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 那么常数 A 就叫做当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \text{ 或者 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

按照此极限定义, 上例即可表示为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

类似地, 如果当 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A , 那么数 A 就叫做当 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A).$$

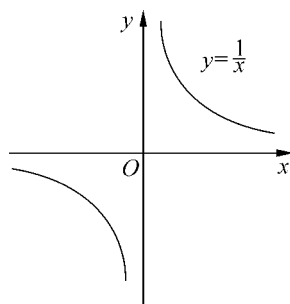
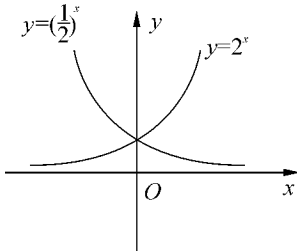


图 1.3

定理 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

例 3 作出函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 和 $y = 2^x$ 的图像, 并判断下列极限: $y = (\frac{1}{2})^x$ 

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^x$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

解 分别作出函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 和 $y = 2^x$ 的图像(如图 1.4).

由图像可以看出:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^x = 0$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

图 1.4

例 4 作出函数 $y = \arctan x$ 的图像, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$, 且判断极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 是否存在.

解 函数 $y = \arctan x$ 的图像如图 1.5.

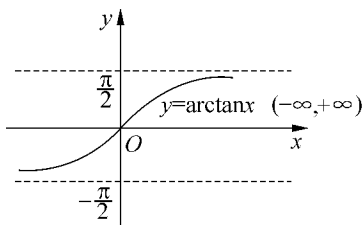


图 1.5

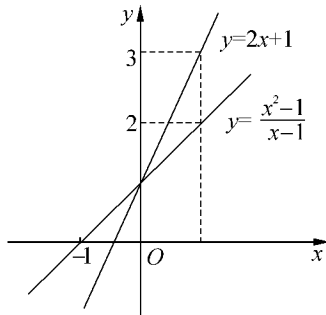


图 1.6

由图像可以看出: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x) = 2x + 1$ 和函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (如图 1.6), 当 $x \rightarrow 1$ 时的函数值变化情况.

由图可以看出, 当 x 从 1 的左右两侧同时趋近于 1 时, 函数 $f(x) = 2x + 1$ 的值越来越接近于 3; 对函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 来说, 尽管它在 $x = 1$ 处没有定义, 但当 x 从 1 的左右两侧趋近于 1 时, 它的值越来越趋近于 2, 对于函数的这种变化趋势, 有下面定义:

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内有定义(x_0 可除外), 如果当 x 无限趋近于 x_0 (但 $x \neq x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 值无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限. 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时})$$

上面的极限分别记为 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

由上面极限的定义及函数的图像, 可得出下面结论:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

有时,当 x 从 x_0 的左右两侧趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势完全不同或 $f(x)$ 仅在点 x_0 的某一侧(左侧或右侧)有定义.这时,我们就需要考察 x 从左右两侧趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势,这就产生了左极限和右极限的概念.

定义 4 如果当 $x \rightarrow x_0^-$ 即从 x_0 的左侧趋近于 x_0 (或 $x \rightarrow x_0^+$ 即从 x_0 右侧趋近于 x_0) 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限(或右极限),记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A)$$

左极限和右极限统称为单侧极限. x_0 点的左极限也可记为 $f(x_0 - 0)$,右极限也可记为 $f(x_0 + 0)$.

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

例 5 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -\infty < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x < +\infty \end{cases}$$

试分别讨论当 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow 1$ 时 $f(x)$ 的极限.

解 函数 $f(x)$ 的图像如图 1.7 所示.从图容易看出

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$,由定理 2 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$$

由定理 2 可知, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

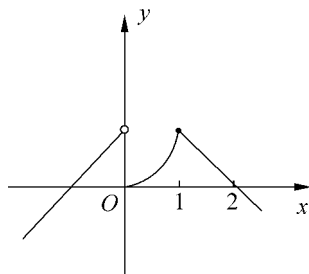


图 1.7

三、极限的性质

性质 1(有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,那么存在着 x_0 的某一空心邻域,在这一空心邻域内,函数 $f(x)$ 有界.

性质 2(保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 且 $A > 0$ (或 $A < 0$),那么存在着 x_0 的某个空心邻域,当 x 在该邻域内时,就有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

【习题 1.2】

1. (口答) 当数列项数无限增加时,观察下列各数列的变化趋势.

(1) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \dots$

(2) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32} \dots$

(3) $\cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{2\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{2}, \cos \frac{4\pi}{2}, \cos \frac{5\pi}{2} \dots$