



洞悉命题规律 集粹典型试题 预测知识考点

高校自主招生考试 直通车

数学



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

编著 张雪明

(新政策版)

高校自主招生考试 直通车

数学

编著 张雪明



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书分两个部分:

第一部分“奠基篇”根据近年各著名高校自主招生测试对数学学科的要求,基于内容和方法,精心选择既与高考内容相关,又高于高考要求的 22 个专题,每个专题包括试题特点、解题策略、典型例题和配套练习四个模块,其中 90%以上的选题均来自历年自主招生考试真题。该部分重在打好著名高校自主招生测试的知识基础和方法基础。

第二部分“真卷与模拟篇”除了模拟试卷,其余试卷都是著名高校近年的测试真卷。为了消除“联盟”字样的倾向性误导,我们把近年一些联考试题归结到联盟内主要的学校上去,以适应新政策下高校自主招生模式的新变化。该部分重在强化置身著名高校自主招生测试的真切体验和适应能力。

本书力求使学习者能在较短时间内达到重点高校自主招生学科测试的知识和能力要求,从而在相应测试中取得优异成绩。

图书在版编目(CIP)数据

高校自主招生考试直通车. 数学: 新政策版/张雪明编著. —6 版. —上海: 上海交通大学出版社, 2015
ISBN 978-7-313-13743-2

I. ①高… II. ①张… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 224213 号

高校自主招生考试直通车 数 学 (新政策版)

编 著: 张雪明

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

出 版 人: 韩建民

印 制: 常熟市文化印刷有限公司

开 本: 787 mm×960 mm 1/16

字 数: 364 千字

版 次: 2010 年 7 月第 1 版 2015 年 9 月第 6 版 印 次: 2015 年 9 月第 20 次印刷

书 号: ISBN 978-7-313-13743-2/G

定 价: 39.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021-64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 20.5

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 0512-5229025



导语

随着高等学校招生考试制度改革的推进,实施数年的高校自主招生政策也随之有了改变,最显著的调整就是将自主招生最重要的选拔环节之一——由各高校组织的学科自主测试——从普通高考前调到高考后,这一改变貌似简单,实质是牵一发而动全身.这引起了整个社会特别是备考考生在心理上的茫然,认识上的盲目,策略上的盲从,行动上的盲干。大多数的人不知所措,要么听风便是雨,依据道听途说作为自己制定备考策略的依据,要么干脆躺倒不干,缩在一角喃喃唏嘘幻觉中的运气。

如若科学备考,就得正确分析新政策下自主招生相较之前有哪些实质性的变与不变。

变化的主要有三点:

一是高考成绩的功能定位。之前的高考成绩对于自主招生所起的作用往往是验证性的,就是通过高考成绩来验证之前已经通过自主招生学科测试并获得优惠政策的同学是否的确优秀,从而确定最终是否录取;而新政策中,高考成绩变成了之后参与学校组织的自主招生测试的门槛、通行证,学校通过对高考成绩划线来确定能够参与自己学校自主招生的名额。普通高考成了“资格考”。

二是考试联盟的消解。原来由清华大学、北京大学、同济大学等分别牵头的“华约”、“北约”、“卓越”等考试联盟不复存在,新的联盟也不再容许出现,每个学校的自主招生测试完全由学校自己组织完成,三足鼎立变为各自为政。

三是测试形态的多样化。原来的联盟形式使多达 10 余所学校的学科测试被动同质化,考试内容、试卷结构及考试形式完全相同,逐步演变为若干个小高考;新政策下的自主招生学科测试更趋灵活,试卷结构和考试形式多样,虽然大多数学校依然采用传统的命题体形、试卷结构和考试方式,但诸如标准化试题、一卷多科、在线测试等逐步多见,彰显学校个性。

不变的只有一点:那就是考试内容本身的范围不变,可谓万考不离其宗。考



试内容体现高中学业水平,与高中所学内容并行不悖,同时体现测试学校的个性要求——培养理念和自身教育哲学,体现高等学校的后续学习需要。

当然,与普通高考相比,自主招生的数学学科测试也有明显差异——主要反映在范围、重点、角度、难度等方面;相比之下信度、区分度更高;测试取向更加关注思维品质和学科素养,强调数学学科的本质和哲学方法,注重能力。

结合以上分析,新政策下的自主招生测试就可以比较科学地应对了。建议针对以下三个方面开展工作。

一要重视普通高考,保证拿到入场券。这就意味着,和以往相比,我们不能在普通高考之前花费大量精力投放到一些专门性的自主招生辅导课程中去了。

二要确定心仪学校,协调好应试时间,将机会最大化。要密切关注心仪学校的层次性搭配,关注心仪学校自主测试时间安排是否交叉,关注心仪学校的选拔形式和测试方式。

三要选择针对性强,成熟可信的辅导资料,在相对轻松的复习方式下化理想为现实。

既然没有充裕的时间接受课程培训,又要在自主招生测试中取得理想成绩,脱颖而出,相信拥有一本好的辅导资料来实现理想就一定是最为妥切的选择了,本书就是一个最佳选择。

本书是国内最早问世的高校自主招生类辅导用书,是同类书中读者最欢迎,销量最大的一本书。

“数学是思维的体操,是思维的科学”,人们在数学学习时,要不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反思与建构等思维过程。本书遵循数学学习的基本规律,顺应国内著名高校自主招生测试的试题特点,从试题属性和解题方法出发演绎学习主题和学习内容,以锤炼学习者的思维品质,启发学习者的解题思路,提高学习者的解题能力和考试水平。

本书遵循如下编写理念。

内容确保三最:最权威、最完整、最适用。

过程重视三基:基本知识、基本技能、基本方法。

结果追求三效:效果(考得好)、效率(学得快)、效益(提高学科素养)。

本书“奠基篇”重在打好知识基础和方法基础,其中90%以上的选题均来自历年自主招生考试真题;“真卷与模拟篇”是提供考生充分的演练机会,除了模拟试卷,都是相关学校的考试真卷,为了消除“联盟”字样的倾向性误导,我们把近年各

联盟的考卷归结到联盟内主要的学校上去。每一所学校的学科测试内容都会有自己的传统和选择倾向,所以虽然有的学校在考试方式,试卷的题型结构上发生了变化,但其既往试题中均保持自己的固有传统和特点,需要考生加以领会和把握。这就是我们提供真卷给大家的理由。

期望读者在接触书中问题之前能够先自主尝试再借鉴解答;学习过程中不断总结和反思;依据自身报考方向不同而对学习内容有所侧重。



目录

第一部分 奠 基 篇

§ 01	函数性态	/003
§ 02	导数积分	/017
§ 03	式与方程	/034
§ 04	不等关系	/043
§ 05	数列递推	/054
§ 06	数列求和	/062
§ 07	数列极限	/073
§ 08	三角变换	/081
§ 09	向量运算	/095
§ 10	简易复数	/106
§ 11	圆锥曲线	/114
§ 12	极坐标系	/129
§ 13	线性规划	/136
§ 14	平面图形	/142
§ 15	基本形体	/152
§ 16	计数原理	/164
§ 17	概率初步	/171
§ 18	二项展式	/180



- § 19 待定系数法 /185
- § 20 换元引参法 /190
- § 21 归纳列举法 /196
- § 22 构造化归法 /207

第二部分 真卷与模拟篇

- 综述 /219
- 真卷 1 北京大学 /222
- 真卷 2 北京大学 /224
- 真卷 3 北京大学 /226
- 真卷 4 北京大学 /230
- 真卷 5 清华大学 /234
- 真卷 6 清华大学 /243
- 真卷 7 清华大学 /250
- 真卷 8 清华大学 /255
- 真卷 9 复旦大学 /258
- 真卷 10 复旦大学 /263
- 真卷 11 同济大学 /268
- 真卷 12 天津大学 /279
- 真卷 13 北京理工大学 /287
- 真卷 14 重庆大学 /291
- 真卷 15 南开大学 /297
- 模拟卷 1 /301
- 模拟卷 2 /305
- 模拟卷 3 /311

- 附录 高校自主招生数学测试内容一览 /318

第一部分 奠基篇

§01 函数性态

一、要点考点

1. 反函数

(1) 反函数定义: 只有满足 $x \xleftrightarrow{\text{唯一}} y$, 函数 $y = f(x)$ 才有反函数. 例: $y = x^2$ 无反函数.

函数 $y = f(x)$ 的反函数记为 $x = f^{-1}(y)$, 习惯上记为 $y = f^{-1}(x)$. 在同一坐标系, 函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y = x$ 对称.

注: 一般地, $f^{-1}(x+3) \neq f(x+3)$ 的反函数.

(2) ① 单调函数必有反函数, 但并非反函数存在时一定是单调的. 所有非单值自变量的偶函数不存在反函数.

② 如果一个函数有反函数且为奇函数, 那么它的反函数也为奇函数.

③ 设函数 $y = f(x)$ 定义域, 值域分别为 X 、 Y . 如果 $y = f(x)$ 在 X 上是增(减)函数, 那么反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在 Y 上一定是增(减)函数, 即互为反函数的两个函数增减性相同.

④ 一般地, 如果函数 $y = f(x)$ 有反函数, 且 $f(a) = b$, 那么 $f^{-1}(b) = a$. 这就是说点 (a, b) 在函数 $y = f(x)$ 图像上, 那么点 (b, a) 在函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上.

2. 指数、对数函数

(1) 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 定义域 $\mathbf{R}$, 值域为 $(0, +\infty)$ (见图 1-1).

① 当 $a > 1$, $y = a^x$ 在定义域上为增函数;

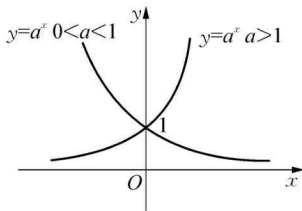


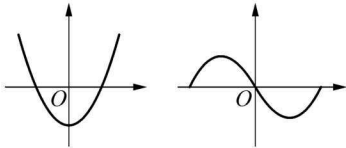
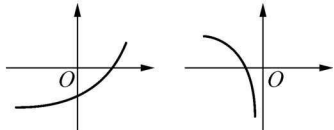
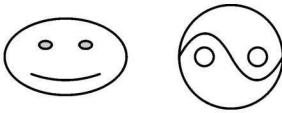
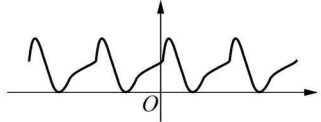
图 1-1

- ② 当 $0 < a < 1$, $y = a^x$ 在定义域上为减函数;
- ③ 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 的 a 值越大, 图像越靠近 y 轴; 当 $0 < a < 1$ 时, 则相反.
- (2) 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), 定义域 $(0, +\infty)$, 值域为 $\mathbf{R}$.
- ① 当 $a > 1$, $y = \log_a x$ 在定义域上为增函数;
- ② 当 $0 < a < 1$, $y = \log_a x$ 在定义域上为减函数;
- ③ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 与 $y = \log_a x$ 互为反函数;
- ④ 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 的 a 值越大, 图像越靠近 x 轴; 当 $0 < a < 1$ 时, 则相反.

3. 奇偶、单调、对称、周期性的定义及图像形态

奇偶、单调、对称、周期性的定义及图像形态如表 1-1 所示.

表 1-1

性 质	定 义	图 像 形 态
奇偶性	对于任意 $x \in \mathbf{D}$: $f(-x) = f(x)$ (偶); $f(-x) = -f(x)$ (奇)	
性 质	定 义	图 像 形 态
单调性	对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (增); $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (减)	
性 质	定 义	图 像 形 态
对称性	沿线折叠重合(轴对称); 绕点旋转对称(中心对称)	
性 质	定 义	图 像 形 态
周期性	对于任意 $x \in \mathbf{D}$: $f(T+x) = f(x)$	

几点说明:

(1) 判断函数单调性(定义)作差法: 对带根号的一定要分子有理化, 例如:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2 + b^2} - \sqrt{x_2^2 + b^2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2 + b^2} + \sqrt{x_2^2 + b^2}} \text{ 再进行讨论.}$$

(2) 函数的单调区间可以是整个定义域, 也可以是定义域的一部分. 对于具体的函数来说可能有单调区间, 也可能没有单调区间, 如果函数在区间 $(0, 1)$ 上为减函数, 在区间 $(1, 2)$ 上为减函数, 就不能说函数在 $(0, 1) \cup (1, 2)$ 上为减函数.

(3) 最常见的对称变换:

$$\textcircled{1} y = f(x) \xrightarrow{y \text{ 轴对称}} y = f(-x) \quad \textcircled{2} y = f(x) \xrightarrow{x \text{ 轴对称}} y = -f(x)$$

$$\textcircled{3} y = f(x) \xrightarrow{\text{原点对称}} y = -f(-x) \quad \textcircled{4} y = f(x) \xrightarrow{y=x \text{ 对称}} x = f(y)$$

$$\textcircled{5} y = f(x) \xrightarrow{y=-x \text{ 对称}} x = -f(-y)$$

4. 奇偶、单调、对称、周期性的常见代数特征

对于任意 x :

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 为周期函数, 周期为 } T;$$

$$f(x+a) = -f(x) \text{ 则 } f(x) \text{ 为周期函数, 周期为 } 2a;$$

$$f(x+a) = \frac{1}{f(x)} \text{ 则 } f(x) \text{ 为周期函数, 周期为 } 2a;$$

$$f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 关于 } x=a \text{ 对称};$$

$$f(a+x) = f(b-x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 关于 } x = \frac{a+b}{2} \text{ 对称};$$

$$f(a+x) = -f(a-x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 关于 } (a, 0) \text{ 对称};$$

$$f(a+x) = -f(b-x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 关于 } \left(\frac{a+b}{2}, 0\right) \text{ 对称}.$$

二、技能方法

- 奇偶性判别与应用.
- 单调性判别与应用.
- 对称性判别与应用.
- 周期性判别与应用.
- 奇偶、单调、对称、周期性的代数特征及其内在统一性的应用.

三、典型例题

【例1】 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上函数, 且 $f(10+x) = f(10-x)$, $f(20-x) = -f(20+x)$, 则 $f(x)$ 为().

- A. 奇函数且周期函数
- B. 奇函数且非周期函数
- C. 偶函数且周期函数
- D. 偶函数且非周期函数

解析: 由 $f(10+x) = f(10-x)$ 得函数 $f(x)$ 图像关于 $x=10$ 对称, 由 $f(20-x) = -f(20+x)$ 得函数 $f(x)$ 图像关于 $(20, 0)$ 对称, 画出草图分析可得, $f(x)$ 是奇函数且周期函数, 周期为 40.

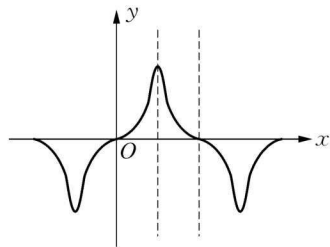


图 1-2

事实上, $f(x) = f(20-x) = -f(20+x) = -f(-x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.
 $f(x) = -f(-x) = f(40+x)$, $f(x)$ 是周期函数.

答案: A.

结论:

- 对于任意 x , $f(a+x) = f(a-x)$ 且 $f(b+x) = f(b-x)$, 其中 $a \neq b$, 则 $f(x)$ 为周期函数, 周期为 $2|a-b|$.
- 对于任意 x , $f(a+x) = f(a-x)$ 且 $f(b+x) = -f(b-x)$, 其中 $a \neq b$, 则 $f(x)$ 为周期函数, 周期为 $4|a-b|$.

【例2】 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个函数, x_1, x_2 是 $\mathbf{R}$ 上任意两个不等的实数.

(1) 设 $|f(x_1) + f(x_2)| \geq |g(x_1) + g(x_2)|$ 恒成立, 且 $y = f(x)$ 是奇函数, 判断函数 $y = g(x)$ 的奇偶性并说明理由;

(2) 设 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq |g(x_1) - g(x_2)|$ 恒成立, 且 $y = f(x)$ 是周期函数, 判断函数 $y = g(x)$ 的周期性并说明理由;

(3) 设 $|f(x_1) - f(x_2)| > |g(x_1) - g(x_2)|$ 恒成立, 且 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 判断函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 与函数 $h'(x) = f(x) - g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性并说明理由.

解析: (1) 令 $x_1 = x, x_2 = -x$, 代入已知条件:

$$|f(x) + f(-x)| \geq |g(x) + g(-x)|.$$

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x) + f(-x) = 0$,
 故 $|g(x) + g(-x)| \leq 0$, 即 $g(x) + g(-x) = 0$.
 则 $g(x)$ 也是奇函数.

(2) 设 $y = f(x)$ 周期为 T ($T \neq 0$), 令 $x_1 = x + T$, $x_2 = x$,
 代入已知条件: $|f(x + T) - f(x)| \geq |g(x + T) - g(x)|$.
 因为 $f(x + T) = f(x)$, 所以 $|g(x + T) - g(x)| \leq 0$, $g(x + T) - g(x) = 0$.
 则 $g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

(3) 设 $x_1 < x_2$, 因为 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以 $f(x_1) < f(x_2)$,
 $|f(x_1) - f(x_2)| = f(x_2) - f(x_1)$.

由已知 $|f(x_1) - f(x_2)| > |g(x_1) - g(x_2)|$,
 得 $-f(x_2) + f(x_1) < g(x_1) - g(x_2) < f(x_2) - f(x_1)$,
 $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$, 且 $f(x_2) - g(x_2) > f(x_1) - g(x_1)$;
 即 $h(x_2) > h(x_1)$, 且 $h'(x_2) > h'(x_1)$.
 故 $h(x) = f(x) + g(x)$ 与 $h'(x) = f(x) - g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也是增函数.

[例 3] (交大 2000 联读) 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$ ($x \in \mathbf{R}$)
 的反函数是_____.

解析: 由 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$ 得

$$\begin{aligned} y^3 &= x + \sqrt{1 + x^2} + 3\sqrt[3]{(x + \sqrt{1 + x^2})^2(x - \sqrt{1 + x^2})} \\ &\quad + 3\sqrt[3]{(x + \sqrt{1 + x^2})(x - \sqrt{1 + x^2})^2} + x - \sqrt{1 + x^2} \\ &= 2x + 3\sqrt[3]{-(x + \sqrt{1 + x^2})} + 3\sqrt[3]{-(x - \sqrt{1 + x^2})} \\ &= 2x - 3(\sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}) \\ &= 2x - 3y \end{aligned}$$

得 $x = \frac{y^3 + 3y}{2}$, $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 3x}{2}$.

[例 4] (交大 2002 保送) 设 $f(x) = |\lg x|$, a, b 为实数, 且 $0 < a < b$, 若 a, b 满足 $f(a) = f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. 试写出 a 与 b 的关系, 并证明在这一关系中存在 b 满足 $3 < b < 4$.

解析: 函数 $f(x) = |\lg x|$ 在 $(0, 1]$ 上单调减, 在 $[1, +\infty)$ 上单调增, 要使得 $f(a) = f(b)$, 则必有 $0 < a < 1 < b$.

从而条件转化为 $-\lg a = \lg b = 2 \left| \lg \frac{a+b}{2} \right|$

所以 $ab = 1 \Rightarrow a + b > 2 \Rightarrow -\lg a = \lg b = 2 \lg \frac{a+b}{2}$

所以 $\begin{cases} ab = 1 & (1) \\ a^2 + (b-2)^2 - 2 = 0 & (2) \end{cases}$,

由式(1)分别取 $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{4}, 4\right)$ 代入式(2), 左边呈现异号, 据数形结合可知命题“这一关系中存在 b 满足 $3 < b < 4$ ”成立.

【例 5】 (复旦 2004 保送) 若存在 M , 使任意 $t \in \mathbf{D}$ ($\mathbf{D}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域), 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 有界. 问函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上是否有界?

解析: 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上不是有界的.

证明如下:

对于任意大的正数 M , 仅需证明存在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 使 $|f(x)| > M$, 即

$\frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| > M$ 成立,

为此取 $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} (k \in \mathbf{N}^*)$, 就是要证存在正整数 k , 使

$\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) > M$, 亦即

$2k\pi + \frac{\pi}{2} > M \Rightarrow k > \frac{1}{2\pi} \left(M - \frac{\pi}{2}\right)$, 可取 $k = \left[\frac{1}{2\pi} \left(M - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 1$, 结论成立.

故 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上不是有界的.

【例 6】 (交大 2008 冬令营) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 且 $f(x) = x$ 没有实数根. 那么 $f(f(x)) = x$ 是否有实数根? 并证明你的结论.

解析: 没有.

解法一: $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 无实数根, $\Delta = (b-1)^2 - 4ac < 0$;
 $f(f(x)) - x = 0$.

$$a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c - x = 0$$

$$a(ax^2 + bx + c)^2 - ax^2 + ax^2 + b(ax^2 + bx + c) + c - x = 0.$$

$$a(ax^2 + bx + c - x)(ax^2 + bx + c + x) + (b+1)ax^2 + (b^2-1)x + c(b+1) = 0.$$

$$a[ax^2 + (b-1)x + c][ax^2 + (b+1)x + c] + (b+1)[ax^2 + (b-1)x + c] = 0.$$

$$[ax^2 + (b-1)x + c][a^2x^2 + a(b+1)x + b + ac + 1] = 0.$$

于是有 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 或 $a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1 = 0$.

$$\Delta_1 = (b-1)^2 - 4ac < 0;$$

$$\Delta_2 = a^2(b+1)^2 - 4a^2(ac + b + 1) = a^2[(b-1)^2 - 4ac - 4] < -4a^2 < 0.$$

故均不存在实数根.

解法二: 若 $a > 0$, 则 $f(x) > x$, 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

于是 $f(f(x)) > f(x) > x$;

若 $a < 0$, 则 $f(x) < x$, 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

于是 $f(f(x)) < f(x) < x$;

所以 $f(f(x)) = x$ 没有实数根.

[例 7] (清华等五校 2010 联考样题) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, $f(-1) = 0$. 设 $\varphi(x) = \sin^2 x + m \cos x - 2m$, 集合 $N = \left\{ m \mid \text{对任意的 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \varphi(x) < 0 \right\}$, $M = \left\{ m \mid \text{对任意的 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], f(\varphi(x)) < 0 \right\}$, 求 $M \cap N$.

解: $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, $f(-1) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 也单调递增, 且 $f(1) = 0$, 于是 $f(x) < 0$ 等价于 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$.

$$\begin{aligned} N &= \left\{ m \mid \text{对任意的 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], f(\varphi(x)) < 0 \right\} \\ &= \left\{ m \mid \text{对任意的 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \varphi(x) < -1 \text{ 或 } 0 < \varphi(x) < 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$M \cap N = \left\{ m \mid \text{对任意的 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \varphi(x) < -1 \right\}.$$

由 $\varphi(x) < -1$ 得 $\cos^2 x - m \cos x + 2m - 2 > 0$.