

2233

数学

管理数学

上册

管理數學

目 錄

第一章 矩陣及其運算	1
1-1 矩陣及矩陣運算	1
1-2 矩陣代數	20
1-3 線性變換	25
1-4 轉置及分割矩陣	30
第二章 行列式及矩陣	41
2-1 行列式	41
2-2 反矩陣	53
2-3 聯立方程式組	65
第三章 向量分析	73
3-1 向量代數與向量空間	73
3-2 線性相依與線性獨立	89
3-3 方向導數與梯度	93

3-4 基底	107
3-5 凸集合與凸性結合	109

第四章 線性規劃

(-LINEAR PROGRAMMING)

4-1 線性規劃問題之性質及其形式	118
(一)生產計劃	
(二)運送問題	
4-2 圖解法	123
4-3 單純法及其應用	133
(一)最佳答案之鑑定...	
(二)基準行之選取	
(三)答案之增訂	
4-4 對偶問題 [含二元定理	158
(The Duality theorem)] (Dual Problem)	

第五章 運輸問題與指派問題

5-1 線性規劃之應用	168
(一)生產計劃問題	
(二)混合問題	
(三)分配問題	
(四)運輸問題	
(五)庫存問題	
(六)指派問題	
(七)交替問題	

第七章 馬可夫鏈鎖 284

(MARKOV CHAIN)

7-1 馬可夫過程 284

7-2 轉移矩陣 291

7-3 馬可夫鏈鎖之應用問題 293

第八章 整數規劃 306

(INTEGER LINEAR PROGRAMMING)

8-1 整數規劃問題之性質 306

8-2 柯莫利切面運算法則 307

8-3 全部整數型運算法則 308

8-4 部份整數型運算法則 315

第九章 要徑法(CPM) 320

與計劃評核術(PERT)

9-1 網路圖 (Network Diagram) 之表示法 320

(一) 網路圖的形成

(二) 繪製網路圖的規則

(三) 網路圖方便的表示法

9-2 要徑的解法 324

(一) 結點時間的計算

(二) 作業起迄時刻的計算與寬裕度

9-3 要徑法 (C.P.M)	332
(一)直接成本與工期的關係	
(二)最小成本的趕工方法	
9-4 計劃評核術 (PERT)	338

第十章 競賽理論 344

(GAME THEORY)

10-1 最小最大原理	344
10-2 有限零和二人競賽	347
10-3 凌越原則 (Principle of Domination)	349
10-4 定值競賽 (Strictly Determined Game)	351
10-5 非定值競賽	353
(Non-strictly Determined Game)	
(一)代數法	
(二)圖解法	
(三)線性規劃法	

第十一章 等候原理 367

(QUEUING THEORY)

11-1 等候問題之基本結構	367
(一)概論	
(二)等候問題之基本結構	
11-2 單站等候問題	369
(一)無限長度排列之單線波氏	

- 到達指數服務模式 (單一服務台)
- (二)有限長度排列之單線波氏
- 到達指數服務模式 (單一服務台)
- (三)排列長度無限制之多站等候
- 問題模式
- (四)排列長度有限之多站等候問題模式
- (五)有限來源之基本模式

第十二章 動態規劃 383

(DYNAMIC PROGRAMMING)

- 12-1 動態規劃問題之性質 383
- 12-2 動態規劃的模式及運算法則 387
- 12-3 動態規劃之應用問題 392

第十三章 存量模式 407

(INVENTORY MODELS)

- 13-1 確定性 (Deterministic) 存量模式 407
 - (一)訂購批次模式
 - (二)製造批次模式
- 13-2 機率性存量模式 417
 - (一)機率性存貨模式
 - (二)機率性存量模式
- 13-3 其他存量模式及其應用問題 421
 - (一)數量折扣的模式
 - (二)希求已知，可以補貨的模式

附 錄 429

附錄一 平方與平方根表

附錄二 二項機率總和 $\sum_{x=0}^r b(x:n, p)$ 表

附錄三 波厄尚機率總和 $\sum_{x=0}^r p(x:\mu)$ 表

附錄四 常態曲線下之面積表

附錄五 t 分配之臨界值表

附錄六 卡方分配之臨界值表

附錄七 F 分配之臨界值表

附錄八 隨機數表

附錄九 亂 數 表

附錄十 複 利 表

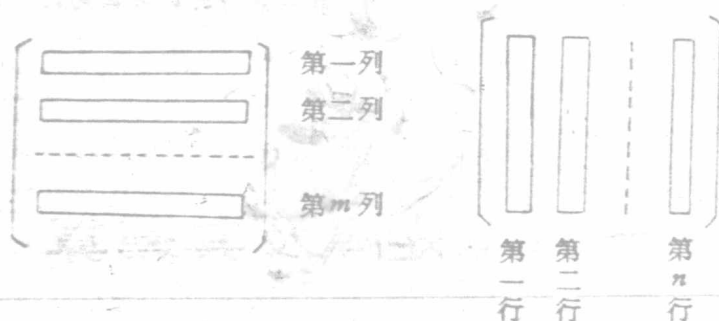
編輯大意

一本書是以編著者在企業界從事企業管理的實際經驗與在各大專院校的教學心得，並酌量採用各國最新的參考資料，按理論與實務並重的方式編寫，期能適用於大專院校有關課程，並希望對於企業界有所貢獻。

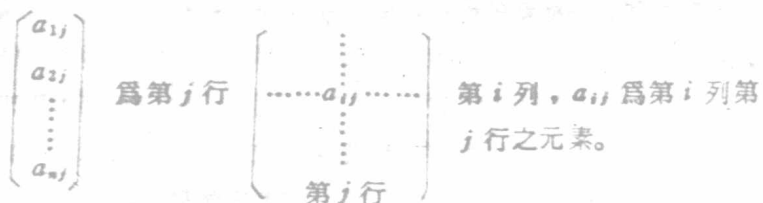
二本書的目標在使讀者瞭解一切與管理有關的科學方法如何配合應用在各種管理活動上，並熟悉實際的計量管理技巧，期能使讀者在從業時發揮所長。

三本書對於有關實務除舉例加以說明之外，每章節之後均附有習題，以期收到學以致用的效果。

四本書雖審慎編寫，難免有疏漏之處，尚祈諸學者前輩不吝指正，期能使再版時達到盡善盡美之境界，則由衷感禱。



例如： $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$ 為第 i 列。



矩陣常以英文大寫字母 A , B 表示。

【定義 1-1-2】

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

此矩陣又稱為 m 列 n 行矩陣，且常簡寫成

$[a_{ij}]_{m \times n}$ 或 $[a_{ij}]$ 。

當 $m = n$ 時此矩陣特稱之為 n 階方陣 (Square matrix)。

【例 1】某汽車產商出產三種不同型狀的汽車。姑且叫做勝利型，豪華型及普通型。若產商欲比較製造這三種不同型所用材料及勞力之異同，習慣上產商就會列成下列一個表：

	勝利型	豪華型	普通型
材料單位	20	15	10
勞力單位	7	8	9

爲了方便處理，就會把上表寫成矩陣的形式： $\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

稱爲有二列三行的矩陣或簡稱爲 2×3 矩陣。

【例 2】(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 爲三列四行矩陣，即 3×4 矩陣。

(2) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 爲三列一行矩陣，即 3×1 矩陣。

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 爲一行三列矩陣，即 1×3 矩陣。

有一種特殊的矩陣那就是爲上列(2)(3)只有一行或一列的矩陣。

【定義 1-1-3】 只有一行的矩陣特稱爲行向量 (Column Vector) 如上例(2)。

【定義 1-1-4】 只有一列的矩陣特稱爲列向量 (Row Vector) 如上例(3)。

又譬如： $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 就是行向量，亦是 4×1 矩陣。

$y = [0 \ 1 \ 2 \ 3]$ 就是列向量，亦是 1×4 矩陣。

【定義 1-1-5】 方陣內的元素 $a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{nn}$ 稱爲對角元素 (diagonal elements) 其組成之集合，稱爲主對角線 (main diagonal) 方陣 A 內對角元素之和稱爲 A 的跡 (trace) 通常用 $t_r(A)$ 代表。

主對角線以外的元素均爲 0 之方陣稱爲對角方陣。 (diagonal matrix)

【定義 1-1-6】主對角線上之各元素均等於 1 之對角方陣，稱為單位矩陣 (Unit matrix)，又稱恒等矩陣 (Identity matrix)。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag} [a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}]$$

(其中 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 均為 1)

單位矩陣以 I_n 為以 I 表示

如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等均為單位矩陣。

【定義 1-1-7】兩個矩陣 A 和 B 若且唯若 (if and only if 或 iff) 兩者同階且其中一個中的每一個元素都等於另一個中的對應元素時；則 $A=B$ ，稱為兩相等矩陣 (equal matrices)。

如 $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ 及 $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ 則若且唯若 $a_{ij}=b_{ij}$ ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 時兩者相等。

【定義 1-1-8】每一元素都為零的矩陣，稱為零矩陣 (zero matrix)。以大黑體字 O 或 $[O]_{m \times n}$ 表之以與純量 O 區別之。

以上我們已對矩陣作了一些介紹，對於他們的運算；如加法，減法，乘法，我們將一一討論。

我們先看下面一個例子：

【例 4】一製造廠商於最近二年對於產品及銷售地區，作了一個統計；如二表所列：

民國 66 年

產品	銷售地區		
	1	2	3
I	98	24	42
II	39	15	22
III	22	15	17

民國 67 年

產品	銷售地區		
	1	2	3
I	55	19	44
II	43	53	38
III	11	40	20

我們將上表簡化為下列二個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

這二年來，此廠產品銷售於各地區的狀況，可用下列矩陣表之。

$$\begin{bmatrix} 98+55 & 24+19 & 42+44 \\ 39+43 & 15+53 & 22+38 \\ 22+11 & 15+40 & 17+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 68 & 60 \\ 33 & 55 & 37 \end{bmatrix}$$

像上面的矩陣，即是A與B的和。

由此得一定義為：

【定義 1-1-9】 兩個矩陣同階，則可以相加，其和也是同階矩陣。

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [c_{ij}]_{m \times n} = C$$

【例 5】

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -1+4 & 2-2 \\ 2+3 & 4+1 & -5+0 \\ 0-6 & 1+3 & 7-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \\ -6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

必須注意，像下列二個矩陣並不能求其和：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \text{ 其理由為何?}$$

【定義 1-1-10】一純量（實數，複數，或函數）（Scalar）乘於矩陣，則以該純量乘於矩陣中之每一元素：

$$kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

【例 6】設 $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $c = -2$

則 $cA = (-2)A = (-2) \begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 6 & -12 \\ -14 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

【例 7】某電機工廠 1 月，2 月之生產台數如表：

	1 月	2 月
電視機	150	130
冰 箱	120	110
洗衣機	70	80

其 3 月份各製品之生產台數為 1 月份之 1.5 倍，試寫出 3 月份各製品生產台數的矩陣。

【解】 $1.5 \times \begin{bmatrix} 150 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 180 \\ 105 \end{bmatrix}$

【例8】 某人經營甲、乙兩家電影院，每天分別放映5場及6場電影，若此兩家電影院皆有一等，二等及三等座位三種，每種座位的容量（單位：百人）及每場電影的總收入（單位：百元）。分別如下：

甲 家			乙 家		
$A =$	$\begin{bmatrix} 8 & 400 \\ 3 & 120 \\ 1 & 35 \end{bmatrix}$	一等座位	$B =$	$\begin{bmatrix} 7 & 280 \\ 4 & 140 \\ 3 & 90 \end{bmatrix}$	一等座位
		二等座位			二等座位
		三等座位			三等座位
	總人數 總收入			總人數 總收入	

則此人的電影院，每天可以容納的各種觀眾數目及收入可以如下計算：

$$\begin{aligned}
 5A + 6B &= 5 \begin{bmatrix} 8 & 400 \\ 3 & 120 \\ 1 & 35 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 & 280 \\ 4 & 140 \\ 3 & 90 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 40 & 2,000 \\ 15 & 600 \\ 5 & 175 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 & 1,680 \\ 24 & 840 \\ 18 & 540 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 82 & 3,680 \\ 39 & 1,440 \\ 23 & 715 \end{bmatrix} \\
 &\quad \text{人數} \quad \text{收入}
 \end{aligned}$$

【例9】 設某一公司今年元旦至3月31日有關其產品及銷售地區的銷售量的統計如下表：

產 品	銷 售 地 區			
	1	2	3	4
I	910	1,275	1,210	1,304
II	860	967	667	1,048

又此公司今年元旦至6月30日其產品及銷售地區的銷售量的統計如下表：

產 品	銷 售 地 區			
	1	2	3	4
I	2,050	1,340	1,344	1,384
II	1,380	1,058	1,011	1,189

今假設欲求4月1日至6月30日之有關產品，銷售地區之銷售量。

【解】 先將表簡化為下列矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 910 & 1,275 & 1,210 & 1,304 \\ 860 & 967 & 667 & 1,048 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2,050 & 1,340 & 1,344 & 1,384 \\ 1,380 & 1,058 & 1,011 & 1,189 \end{bmatrix}$$

對每一產品每一地區分別求出其銷售量為：

$$\begin{bmatrix} 2,050 - 910 & 1,340 - 1,275 & 1,344 - 1,210 & 1,384 - 1,304 \\ 1,380 - 860 & 1,058 - 967 & 1,011 - 667 & 1,189 - 1,048 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,140 & 65 & 134 & 80 \\ 520 & 91 & 344 & 141 \end{bmatrix}$$

因此我們可得二矩陣差之定義：

【定義1-1-11】若 $A = [a_{ij}]$ $B = [b_{ij}]$ 則二矩陣之差 $A - B =$

$[a_{ij} - b_{ij}]$ 。

$$\text{【例 10】} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

矩陣之加減法亦已介紹過，接下來討論如何做乘法？我們先舉些例子來看。

(a) 向量與向量的乘法：

【例 11】 設某一電子公司存庫有黑、白電視機 14 吋、18 吋、20 吋，分別為 1 千、2 千、3 千台每台市價分別為 3 千、4 千、5 千元，若產商把存庫的電視機全部售出則得總價：

$$1,000 \times 3,000 + 2,000 \times 4,000 + 3,000 \times 5,000$$

$$= 3 \times 10^6 + 8 \times 10^6 + 15 \times 10^6 = 26 \times 10^6 \text{ (元)}$$

以上為普通的乘法。

今若以向量來處理，則用列向量 $Q = [1,000, 2,000, 3,000]$ 表純

量向量，用行向量 $P = \begin{bmatrix} 3,000 \\ 4,000 \\ 5,000 \end{bmatrix}$ 表價格向量。

$$\begin{aligned} \text{則總價} &= [1,000, 2,000, 3,000] \begin{bmatrix} 3,000 \\ 4,000 \\ 5,000 \end{bmatrix} \\ &= 1,000 \times 3,000 + 2,000 \times 4,000 + 3,000 \times 5,000 \\ &= 3 \times 10^6 + 8 \times 10^6 + 15 \times 10^6 = 26 \times 10^6 \text{ (元)} \end{aligned}$$

由此我們可知，將普通乘法之步驟可用，列、行向量之乘法來計算，得其定義如下：

【定義 1-1-12】 設 $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 則此二向量的乘積

$$U \cdot V = [u_1, u_2, \dots, u_n] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

列向量及行向量需含有相同數目的分量，且列向量需在行向量的左邊。

【例12】汽車在各種道路的行駛速率如下表：

試以向量的內積表示汽車行駛的距離。

	高速公路	柏油路	石子路
汽車速率 km/m	70	40	30
行駛時間	0.4	1.5	0.6

【解】 $[70, 40, 30] \cdot \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.5 \\ 0.6 \end{bmatrix} = 28 + 60 + 18 = 106 (km)$
(公里)

(b) 矩陣與向量之乘法：

【例13】設某公司有三種產品分別經由三個部門推銷，其銷售量及單價如表：

部 門	產 品 銷 售 量 及 單 價		
	a(\$1)	b(\$2)	c(\$3)
I	58	26	8
II	52	58	12
III	1	3	9

(1)

可計算出各部門銷售總價為：