

高等职业教育系列规划教材 数学平台课

高等数学实例教程

主编 胡红亮

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学实例教程/胡红亮主编. —西安: 西北大学

出版社, 2012. 4

高等职业教育系列规划教材·数学平台课

ISBN 978-7-5604-3043-0

I. ①高... II. ①胡... III. ①高等数学—高等
职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 076413 号

高等数学实例教程

出版发行	西北大学出版社	社 址	西安市太白北路 229 号
电 话	029-88303313	经 销	新华书店经销
印 刷	陕西奇彩印务有限责任公司	开 本	787×1092 1/16
版 次	2012 年 4 月第 1 版	印 次	2012 年 4 月第 1 次印刷
字 数	201 千字	印 张	8.25
书 号	ISBN 978-7-5604-3043-0	定 价	17.00 元

内 容 提 要

本书是岳忠玉主编的高等职业教育系列规划教材《高等数学》的配套辅导教材,按照《高等数学》教材的章节顺序编写。包括了函数、极限和连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程,空间解析几何,多元函数微分学,重积分和无穷级数等内容。每部分设置了“内容导学”、“例题选讲”和“训练与提高”三部分内容。书后附有习题答案或提示。该书在内容编排上力求所选例题典型,着重加强数学基础知识的理解和掌握,并在此基础上进行一定程度的提高。

本书内容具有相对的独立性,除可作为高等职业教育系列规划教材《高等数学》的配套辅导教材外,还可单独用于其他高等职业院校和各类成人高校《高等数学》的辅导教材。

前言

经过多年的教学实践,我院顺应高等职业教育发展的时代要求,对课程建设作了一定的探索,制定了新课程标准,并以此为依据,以“服务专业,够用为度”为导向,对公共基础课程进行了大刀阔斧的创新与改革。我院部分专业根据专业特色以及学生特性,对《高等数学》分为A、B两个层次进行教学。A班在完成基本教学要求的前提下,着重对学生的数学思维、分析问题、解决问题与计算能力进行培养,为学生继续深造打下坚实的基础;B班依据课程标准,重视基本知识、基本技能,淡化解题技巧、复杂的逻辑推理,尽量加入相关专业与数学相关的内容。

根据课程需求,结合所用教材,我们组织了在一线教学的老师编写了该本习题册。该习题册对分层教学进一步深化,内容充实,题目选取难易适中,叙述条理清晰、准确。每章均附有复习题,每节习题分为基础、巩固以及提高三部分,且在“提高部分”适当加入了专升本所需的习题。本习题册的特点:(1)加强课程标准的实施,“基础部分”强调对基本概念、基础知识点的考查,旨在夯实基础。(2)“巩固部分”强调对较为简单的解题方法、解题技巧、基本定理、性质运用的考查,旨在打好基础的前提下,以“会用”为目标,以“够用”为度,提高学生数学素养,为专业课的学习打下一定的基础。(3)“提高部分”强调对学生综合能力、创新能力的考查,旨在鼓励学生主动学习、激励学生创新思维,为继续深造打好基础。(4)针对不同层次的题目,教师可根据课程特点、学生掌握情况灵活选取,指导学生进行练习。每章后的复习题还可便于检查学生对该章整体内容的掌握情况,查漏补缺。(5)所有习题都附有简单的参考答案。

该书融入了我院多位老师长期积累的教学经验,相信它对学生的高等数学学习会有很大的辅助作用,既能帮助学生轻松达标,又对学生继续深造有着重要的作用。

该书主要由杨小平(第一、二、三、四章)、张海妮(第五、六、七章)、刘妍妮(第九章)、刘颖(第八章)几位老师负责编写。马晓翊老师在百忙之中对本书进行了认真地审阅,张博、王子燕、谢克斌、张喜荣等老师也参加了该书的编写讨论工作,他们对本书提出了许多宝贵的建议。另外,该书的出版还得到了学院以及基础部领导的大力支持和帮助,在此一并表示诚挚的感谢!

由于水平有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

编者

2012年7月24日

目 录

第一章 函数、极限与连续	(1)
第二章 导数与微分	(15)
第三章 导数的应用	(25)
第四章 不定积分	(36)
第五章 定积分及其应用	(48)
第六章 常微分方程	(59)
第七章 向量代数与空间解析几何	(73)
第八章 多元函数微分学及其应用	(83)
第九章 重积分	(93)
第十章 无穷级数	(109)

第一章 函数、极限与连续

内容导学

1. 函数的定义、两个要素 —— 定义域和对应法则、函数的表示法；
2. 函数的重要属性：有界性、单调性、奇偶性、周期性；
3. 基本初等函数、初等函数；
4. 反函数、复合函数、分段函数；
5. 数列的极限；
6. 函数的极限： x 趋向于无穷大时的极限、函数在一点的极限、左右极限和极限存在的充分必要条件；
7. 极限的运算：极限的四则运算法则、两个重要极限；
8. 无穷小量和无穷大量的概念、无穷小的性质和无穷小量的阶的比较；
9. 函数连续的概念、函数连续的性质；
10. 函数的间断点及其分类；
11. 闭区间上的连续函数的性质 —— 最大最小值定理、介值定理。

例题选讲

例 1 求函数

$$y = \sqrt{16 - x^2} + \arcsin \frac{2x-1}{7} + \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$$

的定义域。

分析 这是三个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求出其公共部分即可。

解 要使函数有意义， x 应满足

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1 \\ \ln(x-1) \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ x(x-3) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 4 \\ -3 \leq x \leq 4 \\ x-1 \geq 1 \\ x > 1 \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -3 \leq x \leq 4 \\ x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

其交集为 $[2, 3) \cup (3, 4]$ 。

故函数的定义域为 $[2, 3) \cup (3, 4]$ 。

总结 求函数的定义域时应该注意以下几点：

- (1) 若函数的表达式中含有分式,则分式的分母不能为零;
- (2) 若函数的表达式中含有偶次方根,则根式下的表达式必须非负;
- (3) 若函数的表达式中含有对数,则真数必须大于零;
- (4) 若函数的表达式中含有 $\arcsin \varphi(x)$ 或 $\arccos \varphi(x)$,则必须满足 $|\varphi(x)| \leq 1$;
- (5) 若函数是由几个函数经过四则运算构成的,其定义域是各个函数定义域之交集;
- (6) 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围之并集.

例 2 判断函数 $f(x) = F(x) \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$ 的奇偶性(其中: $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $F(x)$ 是奇函数).

分析 先判断 $\left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$ 的奇偶性,然后才能判断 $f(x)$ 的奇偶性.

解 令 $g(x) = \frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad g(-x) &= \frac{1}{a^{-x} + 1} - \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 + a^x} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 + a^x - 1}{1 + a^x} - \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 为奇函数.

又由题意知 $F(x)$ 为奇函数,故 $f(x) = F(x) \cdot g(x)$ 是偶函数.

总结 判断函数奇偶性的方法主要是根据定义及奇偶函数的运算性质.

- (1) 若 $f(-x) = f(x)$,则函数 $f(x)$ 为偶函数;
- (2) 若 $f(-x) = -f(x)$,则函数 $f(x)$ 为奇函数;
- (3) 两个奇函数之和是奇函数;两个偶函数之和是偶函数;奇函数与偶函数之和是非奇非偶函数;
- (4) 两个奇函数的乘积是偶函数;两个偶函数的乘积是偶函数;奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

例 3 设 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$,求 $f(x+1)$, $g\left(\frac{1}{x}\right)$, $f[g(x)]$, $g[f(x)+2]$.

分析 本题的对应法则为

$$f(*) = 2(*) - 1, g(*) = \frac{1}{1 + (*)^2}.$$

解 $f(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2x + 1$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$f[g(x)] = 2[g(x)] - 1 = 2\left[\frac{1}{1 + x^2}\right] - 1 = \frac{2}{1 + x^2} - 1$$

$$\begin{aligned} g[f(x)+2] &= \frac{1}{1 + [f(x)+2]^2} \\ &= \frac{1}{1 + [(2x-1)+2]^2} = \frac{1}{1 + (2x+1)^2}. \end{aligned}$$

总结 解此类题可归为求自变量取不同值时所对应的函数值. 这时, 只要搞清楚对应法则, 问题就迎刃而解了.

例 4 设 $f\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$, 求 $f(x)$.

分析 可考虑用变量代换法或根据所给表达式进行直接“拼凑”.

解法 1 变量代换法

$$\text{令 } \frac{x+1}{x} = t$$

将 $x = \frac{1}{t-1}$ 代入原式得

$$f(t) = \frac{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2} + \frac{1}{\frac{1}{t-1}} = t^2 - t + 1$$

再将 t 换成 x 得

$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

解法 2 直接拼凑法

$$\text{因为 } f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } f\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - 1 + 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 \end{aligned}$$

于是 $f(x) = x^2 - x + 1$.

总结 本题是已知 $f[g(x)]$ 的表达式, 反求 $f(x)$ 表达式. 解此类题的一般思路是令 $g(x) = t$ 解出 $x = \varphi(t)$, 求出 $f(t)$ 的表达式, 再将 t 换成 x 即得 $f(x)$ 的表达式. 也可以用直接拼凑法求解.

例 5 求下列各数列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

分析 (1) 这是一个“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限, 用分子、分母中 n 的最高次项 (不包括系数) 同除分子、分母, 可将无穷小分出, 然后用极限四则运算法则即可.

$$\text{解法 1 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

分析 (2) 此极限为“ $\infty - \infty$ ”型不定式极限, 需先将其有理化后, 再求极限.

$$\begin{aligned} \text{解法 2 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = 0.
 \end{aligned}$$

分析(3) 本题需先找到数列前 n 项和的解析式,然后再求极限.

解法 3 因为 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$

总结 数列的极限最常见的题型是“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限(或可转化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型).求这种形式的极限的方法是:用分子、分母中 n 的最高次项(不包括系数)同除以分子、分母,然后根据极限四则运算法则求极限即可.

例 6 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln(2-x)}{4 \arctan x}.$

分析 由于函数 $f(x) = \frac{x^2 + \ln(2-x)}{4 \arctan x}$ 在 $x = 1$ 处连续,所以可利用函数的连续性求极限.

解 由于 $f(x) = \frac{x^2 + \ln(2-x)}{4 \arctan x}$ 在 $x = 1$ 处连续

则 原式 $= f(1) = \frac{1^2 + \ln(2-1)}{4 \arctan 1} = \frac{1}{\pi}.$

总结 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,可根据 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 求极限.

例 7 求极限 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$

分析 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,可通过分解因式约去致零因子,再求极限.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$

例 8 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$

分析 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,可通过分子、分母的有理化,消去致零因子,再求极限.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{3}{2}.$$

例 9 求极限 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$.

分析 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,当 $x \rightarrow \pi$ 时,有 $\pi - x \rightarrow 0$,可先作变量代换,然后用第一重要极限求解.

解 令 $\pi - x = t$, 则 $x = \pi - t$,

当 $x \rightarrow \pi$ 时, $t \rightarrow 0$,

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

例 10 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

分析 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,由于 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin x \sim x$,所以可利用无穷小等价代换求极限.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin x \sim x$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot x} = \frac{1}{2}.$$

总结 我们看出,例 7、8、9、10 题都是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,这种情形下求极限常用的方法有:

(1) 约去致零因子法

当函数是有理分式时,可通过分解因式法消去使分母为零的因式,再求极限;

当函数是无理分式时,可通过有理化法消去使分母为零的因式,再求极限.

(2) 利用第一重要极限法

当函数中含有三角函数时,往往可通过三角恒等变形,再利用第一重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限.

(3) 利用无穷小等价代换法

当 $x \rightarrow 0$ 时,常用等价无穷小有:

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax \quad (a \neq 0)$$

注意:此方法只能在乘积和商中进行,不能在加减运算中代换,否则会导致错误结论.

$$\text{例如: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 \text{ 是错误的, 而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x \cdot x^2} = \frac{1}{2} \text{ 才是正确的.}$$

例 11 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} \cdot (3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}} \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

分析 这两小题均是“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限,可先将分子分母分别除以分式中 x 的最高次幂,再求极限.

$$\text{解} \quad (1) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 - \frac{3}{x})^{20} \cdot (3 + \frac{2}{x})^{30}}{(5 + \frac{1}{x})^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{5^{50}}.$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}} = 1.$$

总结 求“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型函数的极限,可先将分子分母同除以分式中 x 的最高次幂,再求极限.

有以下结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & \text{当 } m = n \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } m < n \text{ 时} \\ \infty, & \text{当 } m > n \text{ 时} \end{cases}.$$

例 12 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$$

分析 这两小题均为“ $\infty - \infty$ ”型极限,需先进行初等变形,再求极限.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-2}{x^2+x+1} = -1. \\ (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 1. \end{aligned}$$

总结 求“ $\infty - \infty$ ”型的极限,一般可通过“通分”或“有理化”等方法化为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”的形式,再求极限.

例 13 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) [\ln(x+2) - \ln(x+1)]$$

分析 由于(1)题是“ 1^∞ ”型,第2小题用对数的性质变形后也是“ 1^∞ ”型,所以可考虑利用第二重要极限求解.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1+x}{-2x}} \right)^{\frac{1+x}{-2x}} \right]^{\frac{-2}{1+x}} = e^{-2}.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) [\ln(x+2) - \ln(x+1)]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \ln \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} \\ = \ln e = 1.$$

总结 当函数中有幂指函数时, 住会出现“ 1^∞ ”型, 这时可通过适当变形化为 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 或 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ 的形式, 然后利用第二重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 来计算.

例 14 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; (2) $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cos \frac{1}{x - \pi}$

分析 在这两小题中, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ 和 $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos \frac{1}{x - \pi}$ 均不存在, 但函数 $\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ 和 $\cos \frac{1}{x - \pi}$ 均为有界函数, 又由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) = 0$, 所以可利用无穷小的性质计算.

解 (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, 而 $\left| \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right| < 1$,

则原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$.

(2) 由于 $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) = 0$, 而 $\left| \cos \frac{1}{x - \pi} \right| \leq 1$,

则原式 $= 0$.

总结 求无穷小与有界函数之积的极限时, 可利用“无穷小与有界函数之积仍为无穷小”的性质进行计算.

例 15 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-1}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$, 求函数在分段点处的极限.

分析 求分段函数在分段点处的极限时, 应先考察函数在该点的左、右极限.

解 在分段点 $x = 0$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

在分段点 $x = 1$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

总结 求分段函数的极限,主要是对分段点处函数极限的讨论.一般地,先求出函数在分段点处的左、右极限,再根据

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

来确定函数在 x_0 点的极限是否存在以及极限值.

例 16 讨论所给函数 $f(x)$ 的连续性,若有间断点,指出间断点的类型.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

分析 由于初等函数在它们的定义区间内都是连续的,所以本题只需判断在分段点 $x = 0$ 处函数是否连续即可.

解 当 $x < 0$ 或 $x > 0$ 时, $f(x)$ 为初等函数是连续的,在 $x = 0$ 处

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{aligned}$$

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的左、右极限存在但不相等,即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在,所以 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点且是跳跃型间断点.

故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

总结 因为初等函数在它们的定义区间内总是连续的,所以函数连续性的讨论主要是指分段函数在分段点处的讨论.根据函数在一点处连续的定义可知, $f(x)$ 在 x_0 处连续必须满足下面三个条件:

- (1) $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义,即 $f(x_0)$ 存在;
- (2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限存在;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

不满足上面三个条件之一的点,就是函数的间断点.

如果在间断点 x_0 处,函数 $f(x)$ 的左、右极限都存在,则 x_0 属于第一类间断点.其中左、右极限相等的点是可去间断点,左、右极限不相等的点是跳跃间断点.

如果在间断点 x_0 处,函数 $f(x)$ 的左、右极限中至少有一个不存在,则 x_0 属第二类间断点.

例 17 (1) 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1}) = \frac{1}{6}$, 求 a .

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$, 求 a, b .

解 (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(9-a)x^2 + x - 1}{3x + \sqrt{ax^2 - x + 1}}$

要使上面的极限存在, 分子中 x^2 的系数应等于零.

即 $9 - a = 0$, 得 $a = 9$.

(2) 因为 $x \rightarrow 1$ 时, 分母的极限为零, 而函数的极限存在, 由此知函数分子的极限也必定为零.

即 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = a + b + 1 = 0$

得 $b = -a - 1$

从而有 $x^2 + ax + b = x^2 + ax + (-a - 1) = (x - 1)(x + 1 + a)$

故 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1 + a)}{1 - x} = -\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1 + a) = -a - 2$.

由题意知 $-a - 2 = 5$

于是 $a = -7, b = -1 - a = 6$.

例 18 试确定 a, b , 使函数

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ x^2 + a, & 0 < x < 1 \\ bx, & x \geq 1 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

解 因为初等函数在其定义域内是连续的, 所以在 $(-\infty, 0), (0, 1), (1, +\infty)$ 三个区间内 $f(x)$ 连续, 因而欲使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 只需讨论在 $x = 0$ 及 $x = 1$ 处的情形即可.

在分段点 $x = 0$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + a) = a$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ 得 $a = 2$.

在分段点 $x = 1$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + a) = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} bx = b$$

由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

得 $1 + a = b$

联立 $\begin{cases} a = 2 \\ 1 + a = b \end{cases}$ 解得 $a = 2, b = 3$.

故当 $a = 2, b = 3$ 时, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

训练与提高

一、判断题

- (1) 在 xOy 平面上 $y = e^{-x}$ 的图形与 $y = e^x$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称. ()
- (2) 函数 $y = x^2, x \in (0, +\infty)$ 是偶函数. ()
- (3) 函数 $y = \frac{1}{2^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是有界函数. ()
- (4) 如果函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处无定义, 则 $f(x)$ 在该点无极限. ()
- (5) 如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在该点的极限必存在. ()
- (6) 两个无穷大之和仍为无穷大. ()
- (7) 无界函数必是无穷大量. ()
- (8) 方程 $x^3 - 3x = 2$ 至少有一个根介于 1 与 3 之间. ()

二、选择题

- (1) 下列各组函数中, 表示同一个函数的是().
- (A) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$
- (B) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 与 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$
- (C) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$
- (D) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x^2 + x + 1$
- (2) 函数 $y = e^x - 1$ 的反函数是().
- (A) $y = \ln x + 1$ (B) $y = \ln x - 1$
- (C) $y = \ln(x + 1)$ (D) $y = \ln(x - 1)$
- (3) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 则下列极限成立的是().
- (A) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$
- (C) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$ (D) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$
- (4) 函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ 在 $x = 0$ 处().
- (A) 有定义 (B) 极限存在
- (C) 左极限存在 (D) 右极限存在
- (5) 若 $f(x) = \frac{1-x}{2(1+x)}, g(x) = 1 - \sqrt{x}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时有().
- (A) $f(x) = o[g(x)]$ (B) $g(x) = o[f(x)]$
- (C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小 (D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小
- (6) 下列结论中错误的是().
- (A) 10^{1000} 不是无穷大 (B) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x \cdot \cos x$ 是无穷大
- (C) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln x$ 不是无穷小 (D) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x \sin \frac{1}{x}$ 是无穷小

(7) 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义是函数在 x_0 处连续的().

- (A) 必要条件 (B) 充分条件
(C) 充要条件 (D) 无关条件

(8) 函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处().

- (A) 左连续 (B) 右连续
(C) 连续 (D) 左、右皆不连续

(9) 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在().

- (A) $x = 0, x = 1$ 处都间断 (B) $x = 0, x = 1$ 处都连续
(C) $x = 0$ 处间断, $x = 1$ 处连续 (D) $x = 0$ 处连续, $x = 1$ 处间断

(10) 函数 $f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处间断是因为().

- (A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处无定义 (B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 不存在
(C) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 不存在 (D) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在

三、填空题

(1) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ 的连续区间是_____.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ k, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \sin x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $k =$ _____.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} =$ _____.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} =$ _____.

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$ _____.

(5) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + 1}{3x + C} = 1$, 则 $A =$ _____, $B =$ _____, $C =$ _____.

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^{10} (5x-3)^{25}}{(3x+7)^{35}} =$ _____.

(7) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $\frac{1}{x}$ 是等价无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \cdot f(x) =$ _____.

(8) 设 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(1) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left[\frac{1}{2x} \ln(1+2x)\right] =$ _____.

(9) 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x =$ _____ 处间断, 且为_____类间断点.

(10) 在闭区间 $[a, b]$ 上的_____函数, 一定有最大值和最小值.

四、解答题

1. 求下列函数的定义域

$$(1) y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-3x+2}}; \quad (2) y = 4\sqrt{3x+2} + 3\arcsin \frac{x-1}{2};$$

$$(3) y = \frac{2}{|x|-x} + \sqrt{\ln(3+x)};$$

$$(4) y = f(x + \frac{1}{3}) + f(x - \frac{1}{3}) \text{ (其中 } f(x) \text{ 的定义域为 } [0, 1] \text{)}.$$

2. 判断下列函数的奇偶性

$$(1) f(x) = x \cdot \ln(\sqrt{1+x^2} - x); \quad (2) f(x) = x^2 \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 0);$$

$$(3) f(x) = \frac{\sin(\cos x)}{x}; \quad (4) f(x) = \sin x + \cos x.$$

$$3. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2, \\ 4-x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(1) 作函数 $f(x)$ 的图形, 并求其定义域;(2) 求 $f(0), f(1.2), f(3), f(4)$.

$$4. \text{ 设 } f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{1+x}, \text{ 求 } f(x).$$

5. 设 $f(x) = 10^x, g(x) = \lg x$, 求

$$(1) f[g(100)]; \quad (2) g[f(3)]; \quad (3) f[g(x)]; \quad (4) g[f(x)].$$

6. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

$$(1) y = \lg \sin(e^{x+1}); \quad (2) y = (\arccos \sqrt{1-x^2})^2;$$

$$(3) y = \sqrt{\ln(1+x^2)}; \quad (4) y = 2^{\cos \sqrt{\ln x}}.$$

7. 某商店对某种商品根据购买量的大小规定了如下的价格: 购买量在 10 公斤(包括 10 公斤)以下部分, 每公斤 20 元; 购买量少于等于 100 公斤时, 其中超过 10 公斤的部分, 每公斤 15 元; 购买量超过 100 公斤的部分, 每公斤 10 元. 试求出购买量与费用之间的函数关系.

8. 求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\arctan(2x-1) + \frac{\pi}{4}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}; \quad (7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x-1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^2 \sin \frac{1}{x}}; \quad (9) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1});$$