

数学 4

胡兴荣 主编



江西高校出版社

教师教育专业系列教材



数 学 (四)

主 编 胡兴荣

副主编 曹树华 赖南燕

图书在版编目(C I P) 数据

数学 .4/胡兴荣主编. —南昌: 江西高校出版社,
2014.4
教师教育专业系列教材
ISBN 978 -7 -5493 -2445 -3

I. ①数... II. ①胡... III. ①数学 - 师范大学 -
教材 IV. ①01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 063408 号

出版发行	江西高校出版社
社 址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮 政 编 码	330046
总编室电话	(0791) 88504319
销 售 电 话	(0791) 88511422
网 址	www.juacp.com
印 刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照 排	江西太元科技有限公司照排部
经 销	各地新华书店
开 本	787mm × 1092mm 1/16
印 张	11.75
字 数	147 千字
版 次	2015 年 7 月第 1 版第 2 次印刷
书 号	ISBN 978 -7 -5493 -2445 -3
定 价	25.00 元

教师教育专业数学系列教材编委会成员

(按姓氏笔画排列)

邓必炉 (九江职业大学)

李建斌 (吉安师范学校)

杨 盼 (东华理工大学行知分院)

易元生 (赣州师范高等专科学校)

易逢荣 (萍乡学院)

胡兴荣 (上饶师范学校)

梁志瑶 (宜春学院高安校区)

曹树华 (万年师范学校)

彭远明 (东华理工大学行知分院)

温晓东 (赣州师范高等专科学校)

赖南燕 (南昌师范高等专科学校)

蔡江华 (萍乡学院)

编写说明

五年制高等师范教育经过十多年的探索与实践,已经成为我省培养专科层次小学、幼儿园教师的骨干力量. 为进一步提高人才培养的规格与质量,我们组织编写了这套教师教育专业《数学》教材.

教师教育专业《数学》教材的编写,旨在新的教育形式下提高师范学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质,培养师范生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应学校教育的能力,促进学生的全面发展,为基础教育输送合格的小学教师.

五年制高等师范教育教材的编写努力体现“五年一贯”的思想. 我们的基本构想是前二年以基础性为主,兼顾选择性,后三年以选择性为主,兼顾基础性. 前后衔接,融为一体.

这套教师教育专业《数学》教材共分四册,适用于招收初中毕业生的五年制高等专科学校学生前二年使用,每学期一册,每周4课时.

全套书在体例上有下列特点:

1. 每章开头均有目录和引言,以便学生了解本章的学习内容.

2. 书中习题分为两类:习题和复习参考题.

每一小节后都配有习题,便于学生作业选用,少数标有*号的题目有一定难度,可供学有余力的学生选用.

每章最后有A、B两组复习参考题,A组题是基础题,供复

习全章使用；B组题带有一定的灵活性，有一定难度，可供学有余力的学生使用。

3. 每章后面均安排了“本章小结”，供复习全章时使用。

4. 书中附有少量的阅读教材，力求体现师范性，使学生视野得到扩大，从而激发学生的学习兴趣，提高教师教育的质量。

我们在充分调研的基础上，聘请了师范院校具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人分别担任本教材的主编，从事教学的一线骨干教师参与编写。在编写过程中，我们阅读了大量的资料，参考了国内同行的研究成果，注意把握新课程标准，并结合师范专科学校的教学实际，力求达到教材既适用又有特色的目的。

由于时间仓促，加上我们水平有限，难免存在不足之处，请在使用中提出宝贵意见，以待今后完善。

编者

2014年1月

本书部分常用符号

$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 不在平面 α 内
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α 和平面 β 的交线是直线 a
$a \subsetneq \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \not\subset \alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a 和直线 b 相交于点 A
$a \cap \alpha = A$	直线 a 和平面 α 相交于点 A
$a \parallel b$	直线 a 和直线 b 平行
$a \parallel \alpha$	直线 a 和平面 α 互相平行
$\alpha \parallel \beta$	平面 α 和平面 β 互相平行
$a \perp b$	直线 a 和直线 b 垂直
$a \perp \alpha$	直线 a 和平面 α 互相垂直
$\alpha - AB - \beta$ (或 $\alpha - l - \beta$)	棱为 AB (或 l) 面为 α 、 β 的二面角
$\alpha \perp \beta$	平面 α 和平面 β 互相垂直
A_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数
$n!$	正整数 1 到 n 的连乘积
C_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数
$P(A)$	事件 A 的概率
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件

目 录

第一章 直线和平面	1
1.1 平面	2
1.1.1 平面	2
1.1.2 平面的基本性质	2
1.1.3 空间图形在平面内的表示法	6
1.2 空间两条直线	11
1.2.1 两条直线的位置关系	11
1.2.2 平行直线	12
1.2.3 两条异面直线所成的角	14
1.3 空间直线和平面	18
1.3.1 直线和平面的位置关系	18
1.3.2 直线和平面平行的判定与性质	19
1.3.3 直线和平面垂直的判定与性质	20
1.3.4 斜线在平面上的射影, 直线和平面所成的角 ...	24
1.3.5 三垂线定理	27
1.4 空间两个平面	32
1.4.1 两个平面的位置关系	32
1.4.2 两个平面平行的判定和性质	32
1.4.3 二面角	35
1.4.4 两个平面垂直的判定和性质	37
阅读材料一 中国古代几何学	43
本章小结	45
复习参考题一	46
第二章 简单几何体	49
2.1 棱柱、棱锥、棱台	50
2.1.1 多面体	50
2.1.2 棱柱	51
2.1.3 棱锥	55

2.1.4	棱台	58
2.1.5	直棱柱、正棱锥、正棱台的表面积	64
2.1.6	正多面体	67
2.2	圆柱、圆锥、圆台	72
2.2.1	圆柱、圆锥、圆台的概念和性质	72
2.2.2	圆柱、圆锥、圆台的直观图	75
2.2.3	圆柱、圆锥、圆台的表面积	77
2.3	球	84
2.3.1	球和它的性质	84
2.3.2	球的表面积	86
2.4	柱体、锥体、台体和球的体积	88
	阅读材料二 欧拉公式和正多面体的种类	100
	本章小结	102
	复习参考题二	104
第三章	排列、组合和二项式定理	106
3.1	分类计数原理与分步计数原理	107
3.2	排列	111
3.3	组合	121
3.4	二项式定理	131
	阅读材料三 从集合的角度看排列与组合	138
	本章小结	140
	复习参考题三	141
第四章	概率	145
4.1	随机事件的概率	146
4.1.1	随机事件及其概率	146
4.1.2	等可能性事件的概率	149
4.2	互斥事件有一个发生的概率	156
4.3	相互独立事件同时发生的概率	162
4.3.1	相互独立事件及其同时发生的概率	162
4.3.2	独立重复试验	166
	阅读材料四 抽签有先后, 对个人公平吗?	172
	本章小结	174
	复习参考题四	176

第一章 直线和平面

► 1.1 平面

1.1.1 平面

1.1.2 平面的基本性质

1.1.3 空间图形在平面内的表示法

► 1.2 空间两条直线

1.2.1 两条直线的位置关系

1.2.2 平行直线

1.2.3 两条异面直线所成的角

► 1.3 空间直线和平面

1.3.1 直线和平面的位置关系

1.3.2 直线和平面平行的判定与性质

1.3.3 直线和平面垂直的判定与性质

1.3.4 斜线在平面上的射影，直线和平面所成的角

1.3.5 三垂线定理

► 1.4 空间两个平面

1.4.1 两个平面的位置关系

1.4.2 两个平行的判定和性质

1.4.3 二面角

1.4.4 两个平面垂直的判定和性质

1.1 平面

在平面内，基本图形是点、直线、射线和线段. 在空间内，除此之外，还有一个基本图形——平面. 常见的桌面、黑板面和平静的水面都给我们平面的局部形象.

1.1.1 平面

几何里的平面和直线一样，是无限延展的. 我们不能把一个无限延展的平面在纸上表示出来. 通常我们画出直线的一部分表示直线，类似地，我们也可以画出平面的一部分来表示平面. 例如，常用平行四边形表示平面（图 1-1），不过要把它想象成无限延展的.

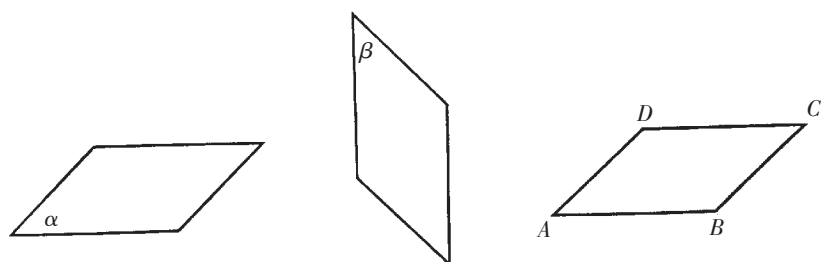


图 1-1

平面通常用一个希腊字母 α , β , γ ... 等来表示，还可用来表示平行四边形的对角顶点的字母来表示，例如图 1-1 中的平面 α ，平面 β ，平面 AC 等.

1.1.2 平面的基本性质

在日常生活中，我们对平直和弯曲这两种状态都有直观的认识，容易区分物体的表面是平直的还是弯曲的. 人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质，我们把它当作公理，作为进一步推理的基础.

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直

线上的所有点都在这个平面内 (图 1-2).

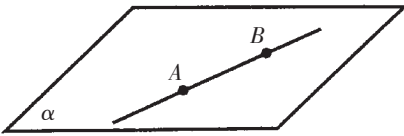


图 1-2

这时我们说直线在平面内或平面经过直线.

利用这个性质, 可以判断一条直线是否在一个平面内.

公理 2 如果两个平面^①有一个公共点, 那么它们还有其他公共点, 这些公共点的集合是一条直线 (图 1-3).

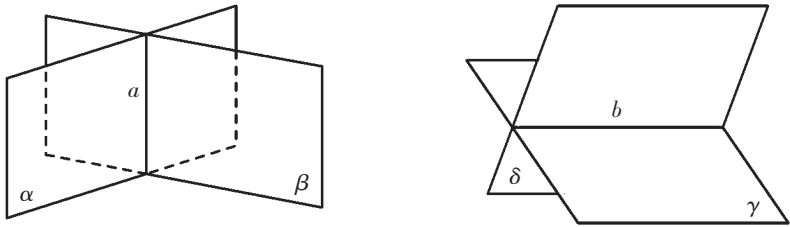


图 1-3

如果两个平面有一条公共直线, 则称这两个平面相交, 这条公共直线叫做这两个平面的交线. 如图 1-3, 平面 α 与 β 相交, 交线是直线 a ; 平面 γ 与 δ 相交, 交线是 b .

画两个相交平面, 当其中一个被另一个遮住时, 应把被遮住的部分画成虚线或不画 (图 1-3).

公理 3 经过不在同一直线上的三个点有且只有一个平面 (图 1-4).

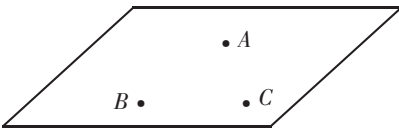


图 1-4

^① 在本章中, 没有特别说明的“两个平面”, 均指不重合的两个平面.

一扇门用两个合页和一把锁固定，就是基于这个性质.

过不共线三点 A 、 B 、 C 的平面常记作平面 ABC .

由上面的公理，可以得到下面的推论:

推论 1 经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面 (图 1-5 (1)).

推论 2 经过两条相交直线有且只有一个平面 (图 1-5 (2)).

推论 3 经过两条平行直线有且只有一个平面 (图 1-5 (3)).

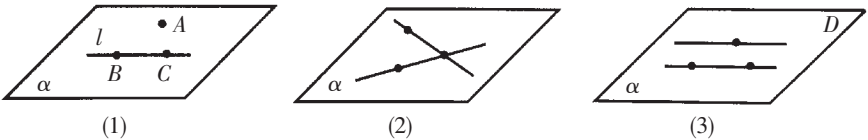


图 1-5

下面证明推论 1，其他推论的证明由读者自己完成.

已知: 直线 l , 点 A 是直线外一点.

求证: 过直线 l 和点 A 有且只有一个平面.

证明: 点 A 是直线 l 外一点, 在 l 上任取两点 B 、 C , 根据公理 3, 经过不共线三点 A 、 B 、 C 有且只有一个平面 α . 因为点 B 、 C 在平面 α 内, 所以根据公理 1, 直线 l 在平面 α 内, 即平面 α 是经过直线 l 和点 A 的平面. 又因为 B 、 C 在 l 上, 所以任何经过点 A 和直线 l 的平面一定经过点 A 、 B 、 C . 于是再根据公理 3, 经过不共线三点 A 、 B 、 C 的平面有且只有一个, 所以经过直线 l 和点 A 的平面只有一个.

“有且只有一个平面”也可说成“确定一个平面”.

如果空间几个点或几条直线都在同一个平面内, 那么我们就说它们共面.

如果构成图形的所有点都在同一个平面内, 这种图形叫做平面图形. 例如我们学过的三角形、平行四边形、梯形和椭圆

等都是平面图形（图 1-6（1））。如果构成图形的点不都在同一平面内，这种图形叫做立体图形。例如我们学过的长方体、球等都是立体图形（图 1-6（2））。

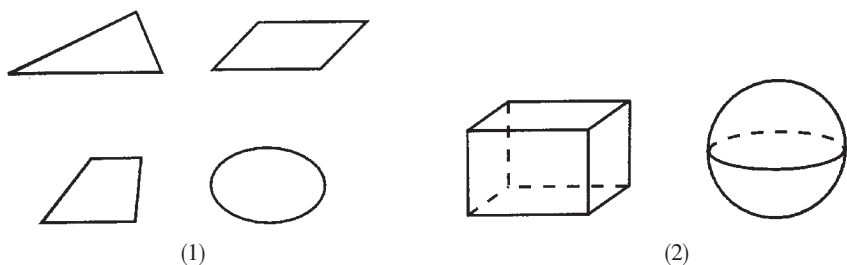


图 1-6

我们初中学过的平面图形的一些性质，例如全等、平行、相似等，对空间的平面图形仍然成立。

我们把空间看作点的集合。这就是说，点是空间的基本元素，直线、平面都是空间的子集；直线是平面的子集。于是我们可用集合语言来描述点、直线、平面之间的关系。例如：

点 A 在直线 a 上，记作 $A \in a$ ，点 A 不在直线 a 上，记作 $A \notin a$ ；

点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$ ，点 A 不在平面 α 内，记作 $A \notin \alpha$ ；

直线 l 在平面 α 内，记作 $l \subset \alpha$ ，直线 l 不在平面 α 内，记作 $l \not\subset \alpha$ ；

直线 l 和直线 m 相交于点 A ，记作 $l \cap m = A$ （这里 A 是 $\{A\}$ 的简记）；

平面 α 与平面 β 相交于直线 a ，记作 $\alpha \cap \beta = a$ ；等等。

例 1 如图 1-7，已知直线 AB 、 BC 、 CA 两两相交，交点分别为 A 、 B 、 C ，求证这三条直线共面。

证明： 因为直线 $AB \cap CA = A$ ，所以直线 AB 和 CA 确定一个平面 α （推论 2）。

又因为 $B \in AB$ ， $C \in CA$ ，

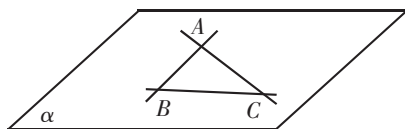


图 1-7

所以

$$B \in \alpha, C \in \alpha.$$

所以

$$BC \subsetneq \alpha \text{ (公理 1).}$$

因此, 直线 AB 、 BC 、 CA 都在平面 α 内, 即它们共面.

1.1.3 空间图形在平面内的表示法

在研究空间图形时, 我们常把空间图形用平面图形来表示. 怎样用平面图形来表示空间图形呢?

观察图 1-8, 太阳光线 (假定太阳光线是平行的) 把一个长方形形状的窗框投射到地板上, 变成了平行四边形的形状. 框边的长度、框边之间的夹角有所改变, 但框边的平行性没有改变. 我们还看到, 平行直线段或同一直线上的两条线段的比也没有改变. 例如, 一条线段的中点投射的影子, 仍是这条线段影子的中点. 正是这些不变性质, 使我们能够用平面图形来表示空间图形.

表示空间图形的平面图形, 叫做空间图形的直观图.

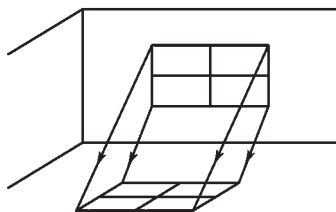


图 1-8

画空间图形的直观图, 一般都遵循一定的规则. 下面举例说明空间图形的直观图的画法.

例 2 画水平放置的正六边形的直观图.

画法: (1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ (图 1-9) 中, 取对角

线 AD 所在的直线为 x 轴，取对称轴 GH 为 y 轴， x 轴、 y 轴相交于点 O ；任取点 O' ，画出对应的 x' 轴、 y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

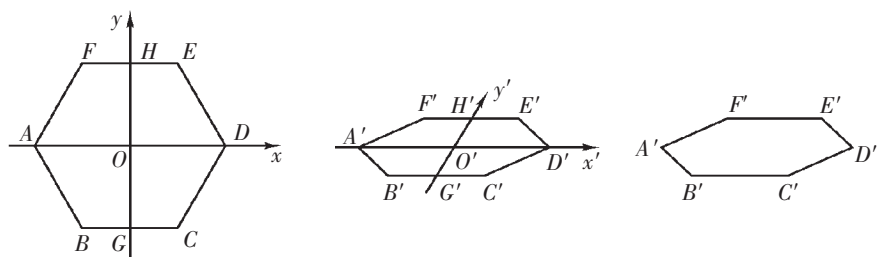


图 1-9

(2) 以点 O' 为中心，在 x' 轴上取 $A'D' = AD$ ，在 y' 轴上取 $G'H' = \frac{1}{2}GH$ ；以 H' 为中心画 $F'E' \parallel x'$ 轴，并使 $F'E' = FE$ ；再以 G' 为中心画 $B'C' \parallel x'$ 轴，并使 $B'C' = BC$ 。

(3) 顺次连接 $A'B'$ 、 $C'D'$ 、 $D'E'$ 、 $F'A'$ ，所得到的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是水平放置的六边形 $ABCDEF$ 的直观图。

例 3 画水平放置的正五边形的直观图。

画法：(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ (图 1-10) 中，取中心 O 为原点，对称轴 FA 为 y 轴，过点 O 与 y 轴垂直的直线为 x 轴，分别过点 B 、 E 作 $BG \parallel y$ 轴， $EH \parallel y$ 轴，与 x 轴分别交于 G 、 H 。画对应的轴 $O'x'$ 、 $O'y'$ ，使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

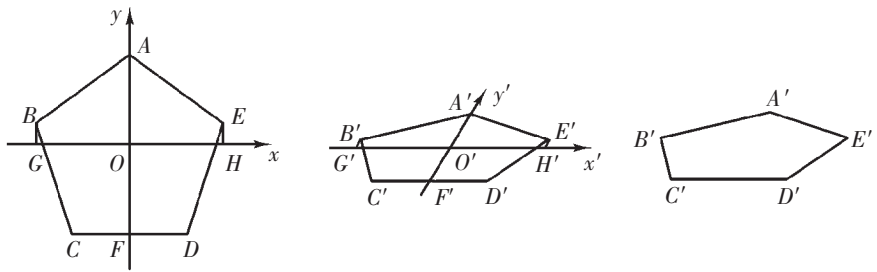


图 1-10

(2) 以点 O' 为中心，在 x' 轴上取 $G'H' = GH$ ，分别过 G' 、 H' ，在 x' 轴的上方，分别作 $G'B' \parallel y'$ 轴， $H'E' \parallel y'$ 轴，使 $G'B' = \frac{1}{2}GB$ ，

$H'E' = \frac{1}{2}HE$; 在 y' 轴的点 O' 上方取 $O'A' = \frac{1}{2}OA$, 在点 O' 下方取 $O'F' = \frac{1}{2}OF$, 并以点 F' 为中心, 画 $C'D' \parallel x'$ 轴, 且使 $C'D' = CD$.

(3) 连接 $A'B'$ 、 $B'C'$ 、 $D'E'$ 、 $E'A'$, 所得到的五边形 $A'B'C'D'E$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图.

例 4 画棱长为 2 cm 的正方体的直观图.

画法: (1) 分别以 AB 、 BD 所在直线为 x' 轴、 y' 轴作水平放置的正方形的直观图 $ABCD$, 使 $\angle BAD = 45^\circ$, $AB = 2$ cm, $AD = 1$ cm. (图 1-11 (1))

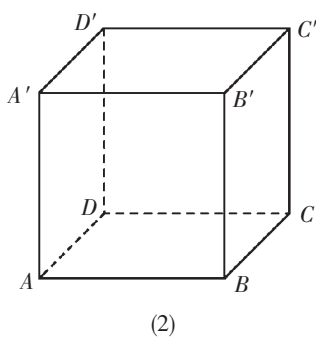
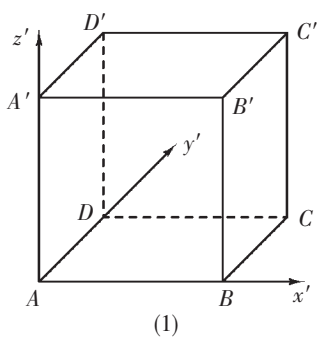


图 1-11

(2) 过 A 作 z' 轴使 $\angle BAz' = 90^\circ$, 分别过点 A 、 B 、 C 、 D 沿 z' 轴的正方向取 $AA' = BB' = CC' = DD' = 2$ cm.

(3) 连接 $A'B'$ 、 $B'C'$ 、 $C'D'$ 、 $D'A'$, 得到的图形就是所求的正方体的直观图 (图 1-11 (2)).

上面画直观图的方法叫做斜二测画法. 这种画法的规则是:

(1) 在已知图形中取水平平面, 取互相垂直的轴 Ox 、 Oy , 再取 Oz 轴, 使 $\angle xOz = 90^\circ$, $\angle yOz = 90^\circ$;

(2) 画直观图时, 把它们画成对应的 $O'x'$ 轴、 $O'y'$ 轴、 $O'z'$ 轴, 使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°), $\angle x'O'z' = 90^\circ$. $x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面;

(3) 已知图形中平行于 x 轴、 y 轴、 z 轴的线段, 在直观图中分别画成平行于 x' 轴、 y' 轴、 z' 轴的线段.