高教研究丛刊（十四）

教育管理科学

定量化技术

杭州大学高校教育研究室

前　　言

现代科学发展的主要特点之一是科学社会化、社会科学化．科学社会化的意义是把自然科学渗透到社会各个部门，社会科学化，就是要依靠自然科学、应用科学技术来发展社会，社会科学开始向定量方向发展是现代科学来发展社会．社会科学开始向定量方向发展是现代科学发展潮流之一．有人对二十世纪六十年代前作过统计，哲学和社会科学方向有六十二项重要成就，有三分之二的项目是属于定量的．其中1930年以来的29项，六分之五属于定量的、严密的科学．

教育管理作为一门独立的学科，它属于社会科学范畴，有它自己的研究对象和科学规律．近年来，不少学者运用现代管理理论对传统的教育理论和管理原则进行探讨，在我国已有不少具有特色的著作和论文问世，其中有部分已开始用数学来定量的描述某些教育管理方法．我们在教育实践与教育管理中运用数学手段对教育管理中的一些专题采用了定量化技术．在此基础上写成这本自成系统的小册子，现在作为杭州大学高教研究丛刊之一出版，希望起点抛砖引玉作用．

本册子可作为大学教育系学生、教育管理专业学生的教科书、也可供师范校、院师生及各级教育行政管理干部学习和工作中的参考资料．

目　录

第一章　定量化技术的数学基础

马克思认为："一种科学只有在成功地适用数学时，才算达到完善的地步．"[1]自然科学、社会科学由定性描述向定量计算的发展是当今科学发展的潮流之一．1969年，开始设立诺贝尔经济学奖，迄今为止，获得诺贝尔经济学奖的基本上是计量经济学．美国曾统计了1900—1965年世界上有六十二项重大的哲学和社会科学成就，其中有三分之二及属于定量的、严密的科学，而在1930年以后的科学成就中，则有六分之五属于定量科学．这些实例表明，教育科学的研究和应用也需要顺应定量化发展的潮流．

在这一章中，我们旨在提供教育管理科学中所常用的一些数学知识，若读者已经具有一定的数学基础，就可以越过这一章．

§1　集　　合

康托尔（Contor）创立的集合论曾被认为十九世纪末最重要的基础研究成果之一，构成了现代数学的基础．

1.1　基本概念

"集合"是一个"原始概念"，通常只能加以描述而无法定义．我们可以从常见的事物中抽象出集合的概念：

具有某种特定属性的对象的全体称为集合．

集合中的每一个对象，称为集合的元素．例如，我国1016所（1985年数据）高等学校的全体、一个学校的所有本科生、某个系的教师、化学实验室的所有仪器、某班《高等数学》的考试成绩等都构成集合．由于同一集合中的元素都具有某种共同的性质我们就可以根据这一共同属性来判断所讨论的对象是否属于该集合．

一个集合的元素可以是具体的事物，如高等学校、仪器、学

生、分数；也可以是抽象的事物，如方法、策略、原则等等.

集合通常用大写字母 A、B、R、T 等来表示，元素一般用小写字母 a，b，x 等记之. 一个集合会有多种表示方法，本书中常用三种方法来表示.

1. 定义法.

记集合为

$$R=\{x \mid \cdots\cdots\} \tag{1.1}$$

这里 R 表示集合，x 为其元素，竖线号的右边表示该集合中元素的属性及其它必要的说明. 如集合

$$A=\{x \mid x\text{ 为《计算方法》考分}\}$$

就表示《计算方法》考试成绩所构成的集合.

2. 列举法

用列举法来表示一个集合的一般形式为

$$R=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

即把这个集合中的所有元素全都列在｛ ｝中.

例如：

考试科目＝｛微积分，线性代数，英语，自然辩证法，｝

数学系＝｛计算数学专业，基础数学专业，应用数学专业｝.

用列举法来表示一个集合通常适用于其中的元素是有限个的情形.

3. 特征函数法

特征函数法用来描述一个元素 x 是否属于 A，若 x 属于集合 A 的元素，记之为 $\chi_A(x)=1$；若 x 不是集合 A 的元素，记之为 $\chi_A(x)=0$. 这里，$\chi_A(x)$ 称作为元素关于集合 A 的特征函数.

若一个集合的元素为有限个，就称为有限集，其元素的个数称作该集合的基数，如考试科目集合的基数等于4. 当集合的元

素个数无限时，就称为无限集．有两类特殊的集合将是常用的，即空集和全集．我们称不包含任何元素的集合为空集，而把所研究对象的全体称为全集．空集记为ϕ，全集记为$\cup$，全集也称为论域．

1.2 常用符号

关于集合的常用符号有：

1． $a\in R$ 元素a属于集合R．

2． $a\overline{\in} R$ 元素a不属于集合R．

3． $\forall$ 任意的．

4． $A\subset B$ 集合A是集合B的子集，即对$\forall a\in A$，必有$a\in B$．

5． $A\cup B$ 集合A和B的和集，即集合A和B中所有元素的集合．

6． $A\cap B$ 集合A与B的交集，即集合A与B中所有公共元素的集合．

7． $\overline{A}$ 集合A的补集（余集），即在所研究对象的全体中除去集合A的元素后构成的集合：$A\cup\overline{A}=\cup$，$A\cap\overline{A}=\phi$．

8． $\{x_i\}_{i=1}^n$ 元素$x_1,x_2,\cdots x_n$的有序集合．

9． R^n n维向量的集合．

10． $R^{m\times n}$ m行n列矩阵的集合．

1.3 关系

事物之间存在着各种各样的联系，描述这些联系的数学模型之一就是关系．关系是集合论中最基本的概念之一，常用符号R来表示之．

现设两个集合分别为

$$X=\{x\mid x\text{为数学系832班学生}\}$$

$$A=\{a\mid a\text{为计算方法期末考试成绩}\}$$

若用R表示832班学生与计算方法成绩之间的对应关系，则当学

生x_1的计算方法考分为a_1时就记作$x_1 R a_1$．若对于集合X中的每一个元素，都可与集合A中的元素建立关系R，就称R是集合X A到的关系．集合X到A的关系R也可以用有序对(x,a)来表示，其中$x \in X$，$a \in A$．显然在集合X和A中所有有关系R的有序对也构成一个集合，称为集合X和集合A的直积集，记作

$$X \times A = \{(x,a) | x \in X, a \in A\}.$$

在两个集合的关系xRa中．x和a之间的对应关系可能有两种情况，一种是对$\forall x \in X$，仅有一个$a \in A$与之对应，另一种是与x对应的元素a可能不止一个，前者就称为单值关系，后者称为多值关系．例如，"学生的计算方法考试成绩是a"是一种单值关系；而"学生x获得学分的课程为y"则是一种多值关系，因为一个学生获得学分的课程通常不止一门．这里需要说明的是，集合X到A的单值关系仅仅是对集合X中的元素x而言，只要对$\forall x \in X$都有一个且只有一个元素$a \in A$与之对应，便说集合X到A建立了一个单值关系，并不要求集合A中的元素a也只与X中的一个元素x对应．如"学生x的计算方法考试成绩是a"是一种单值关系，而"计算方法考试成绩是a的学生x"却并非是单值关系．

在定量化技术中一种常用而又重要的关系为函数关系．若R是X到A的一个单值关系，且这个关系R对于X中的任一元素都有意义，则称R为集合X到A的映射，当所讨论的集合X和A均为实数域的子集时，就称R为函数．函数一般可表示为

$$f: X \to A$$

或

$$f(x) = a.$$

其中x为X的任一元素，而a为与集合X有关系f的集合A中的对应元素．

1.4 集合的运算

数与数之间可以进行运算，集合之间也能进行运算．集合之间的简单运算主要有和、交、差三种．

1．集合的和

两集合A与B的和记为$A\cup B$，称为和集，由集合A与B中所有元素组成的集合，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

例如，当

$$A=\{a,b,c,d,e,f\}$$
$$B=\{a,c,k,l,m,n\}$$

时，则有

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,k,l,m,n\}.$$

又如管理系一年级学生在上、下两个学期里所学的课程分别为

上学期课程＝{政治经济学，英语，高等数学，线性代数，工程制图，语文}

下学期课程＝{政治经济学，英语，高等数学，普通物理，化学}

那么一年里学过的课程为

一年级课程＝{政治经济学，英语，高等数学，线性代数，工程制图，语文，普通物理，化学}．

2．集合的交

两集合A与B的交记为$A\cap B$，称之为交集，它是由集合A与B中共有的元素所组成的集合，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,x\in B\}$$

例如，集合“上学期课程”和“下学期课程”的交集就是在上、下两个学期同时开设的课程，即

上学期课程∩下学期课程

＝{政治经济学，英语，高等数学}．

3．集合的差

两集合A与B的差记为$A\setminus B$，称之为差集，它是由属于集合A而不属于集合B的元素所组成的集合，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A,\ \ x\overline{\in} B\}$$

例如集合“上学期课程”与“下学期课程的差集就是

{线性代数，工程制图，语文}

一般说来，$A\setminus B$和$B\setminus A$是两个不同的集合，这由图 1.1 可见.

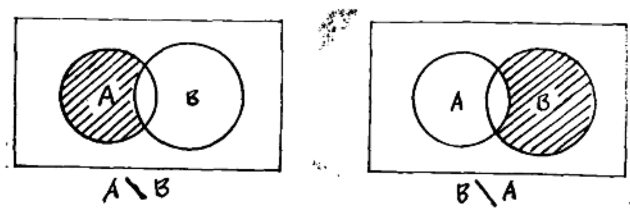

图 1.1

4．集合运算的简单性质

集合运算具有如下的简单性质：

（1） 交换律

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

（2） 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

（3） 分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

（4） 传递律

若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$.

（5） 幂等律

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

（6） 同一律

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap \phi = \phi$$
$$A \cap U = A$$

上述性质均可由集合、空集（ϕ），全集（U），和集、交集、子集的定义直接推得.

§2 矩阵

在讨论高教管理的定量化技术时，由于矩阵有助于管理人员对组成的数据进行组织．分类和计算，因此在教育测量学、教育未来学、决策技术以及教育评估中将经常需要应用矩阵理论对问题加以简化和求解．在这一节中主要介绍和矩阵相关的一些概念及其基本运算.

2.1 矩阵和向量

矩阵就是把数据排成行和列的矩形阵列．其一般定义为：由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$； $j=1, 2, \cdots, n$）排成的 m 行 n 列的表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 的矩阵，简记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，这里 a_{ij} 称为矩阵 A 的元素，其下标 i 表示元素 a_{ij} 所在的行，下标 j 表示 a_{ij} 所在的列．若 $m=n$，就称 A 为 n 阶方阵．当矩阵 A 是方阵时，行标和

列表相同的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$称为主对角线上的元素．

一个$m\times n$的矩阵A，在$n=1$时，即

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

称之为m维列向量；而在$m=1$时，

$$A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

称为m维行向量．以后，若不作特别的说明，文中所指的向量均为列向量．

若$A=(a_{ij})_{m\times n}$，那么A的第i行元素

$$[a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in}]$$

构成A的第i个行向量，记作A_i，而A的第i列元素

$$[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^T$$

就构成矩阵A的第i个列向量，记作A_j．这里，符号"T"表示转置，如$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例 1　教务处从某班的政治经济学试卷中抽查4份来分析，五道试题（每题20分）的成绩如下表：

将上述数据写为矩阵的形式，则有

$$H=\begin{pmatrix}20 & 13 & 18 & 17 & 12 & 80\\ 17 & 15 & 12 & 10 & 7 & 71\\ 16 & 9 & 13 & 12 & 14 & 64\\ 13 & 12 & 11 & 8 & 9 & 53\end{pmatrix}$$

表 1.1

	一	二	三	四	五	总　分
A_1	20	13	18	17	12	80
A_2	17	15	12	10	7	71
A_3	16	9	13	12	14	64
A_4	13	12	11	8	9	53

矩阵H的第 i 个行向量就表示学生 A_i 的各题成绩的总 分； H的第 i 个列向量($j=1,2,\cdots 5$)就表示各学生第 j 道题目的得分数；第 6 个列向量则表示各个学生该课程的成绩．因此矩阵表示法具有简单明了的优点，这为定量地分析问题带来了不少方便．

2.2 矩阵的运算

（一）加减法

两个矩阵只有在它们的行数和列数均相同时才可以相加或相减，其运算法则为对应的元素相加或相减．若设

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$
$$B=(b_{ij})_{m\times n}$$

则

$$A\pm B=C$$

这里$C=(c_{ij})_{m\times n}$，而

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij},\ \ i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n.$$

（二）乘法

矩阵的乘法有两种，一为某数乘以矩阵，一为两个矩阵相乘.

数 α 乘以矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 等于这个数 α 乘以矩阵 A 的每一个元素 a_{ij}，即

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})_{m\times n}.$$

例如 $\alpha=3$，而

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

则

$$\alpha\cdot A=3\times\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 6 & 9\\ 0 & 12 & 15\end{bmatrix}.$$

两个矩阵 A 与 B 相乘，只有当第一个矩阵 A 的列数等于第二个矩阵 B 的行数时方才可能. 例如，一个 2×4 的矩阵可以乘以一个 4×3 的矩阵，乘积是一个 2×3 的矩阵. 下面我们来定义两矩阵的乘法法则.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$. 令

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,p.$$

则矩阵

$$C=(c_{ij})_{m\times p}$$

就称为矩阵 A 和 B 的积，记作

$$C=AB$$

这时我们也称矩阵 A 左乘矩阵 B，或矩阵 B 右乘矩阵 A.

两数（或代数式）的乘法满足交换律，而两矩阵的乘法则不

然．事实上，当矩阵A的行数m与矩阵B的列数p不相同时，B左乘A就不符合矩阵乘法的条件，也就是说无法实行．

两个n阶矩阵总是可以相加或相乘，结果仍为n阶矩阵．

2.3 特殊矩阵

下面介绍几类以后经常会用到的特殊矩阵，若未作特别说明，所述均为n阶方阵．

1．单位矩阵

主对线元素均为1，其余元素均为零的方阵称为单位矩阵，记作

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

单位矩阵与矩阵$A_{mn}=(a_{ij})_{m\times n}$的乘法有

$$\begin{aligned}I_m\cdot A_{mn}&=A_{mn}\\ A_{mn}\cdot I_n&=A_{mn}\end{aligned}\tag{1.3}$$

2．非奇异矩阵

设A是一n阶方阵，若有矩阵B存在，使得下式成立：

$$AB=BA=I,\tag{1.4}$$

则称A为非奇异矩阵，而B称为A的逆矩阵，记作$B=A^{-1}$．一个矩阵A有逆矩阵的话，则此逆矩阵是唯一的．若不然，B和C均为A的逆，则有

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=C\cdot I=C.$$

此外，容易证明逆矩阵有自反性，即

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

3．对角矩阵

若矩阵A的非主对线元素全为零，也就是说，当$i\neq j$时必

有 $a_{ij}=0$，就称 A 为对角矩阵，作记

$$A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

其中 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 是矩阵 A 的主对角线元素．当 A 是对角矩阵时，则对于任一 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$ 均有

$$X^TAX=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2. \tag{1.5}$$

4．三角形矩阵

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若当 $i>j$ 时有 $a_{ij}=0$，则称 A 为上三角矩阵，其特征是主对角线以下的元素全为零；若当 $i<j$ 时有 $a_{ij}=0$，则称 A 为下三角矩阵，其特征是主对角线以上的元线全为零．上三角矩阵和下三角矩阵统称为三角形矩阵，当 $a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，又称其为单位三角形矩阵．直接验证，上（下）三角形矩阵的和、差、积和数乘仍为上（下）三角矩阵，其逆矩阵亦然．

5．对称矩阵

若 $A^T=A$，即 A 的元素关于主对角线呈对称分布时（$a_{ij}=a_{ji}$），就说 A 是对称矩阵

6．正交矩阵

满足关系式

$$AA^T=A^TA=I \tag{1.6}$$

的矩阵 A 称为正交矩阵．

7．正定矩阵

若矩阵 A 对称，且对任一 n 维实向量 ξ，均有 $\xi^TA\xi\geqslant0$，则称 A 为半正定矩阵；若当 $\xi\neq\theta$（零向量）时恒有 $\xi^TA\xi>0$，则 A 为正定矩阵．

8．概率矩阵

一个方阵 A，若其每行（或列）的元素均非负且元素之和等于 1，就称 A 为概率矩阵；当各元素均为正时，则称为正规概率矩阵．例如

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ 0.1 & 0.7 & 0.2\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

就是一个概率矩阵，而

$$B=\begin{pmatrix}0.2 & 0.4 & 0.7\\ 0.3 & 0.1 & 0.1\\ 0.5 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix}$$

则为一正规概率矩阵．容易证明，概率矩阵的乘积仍是概率矩阵，概率矩阵的 n 次幂 A^n 也是概率矩阵．

9．布尔矩阵

该矩阵的诸元素或是 0 或是 1．

2.4 行列式

行列式（determinat）是对应于一个方阵 A 而言的，通常记作 $|A|$ 或 $\det(A)$．二阶、三阶行列式的计算方法已在初等数学中介绍过，而 n 阶行列式则可由数学归纳法来定义．

定义 2.1 设 $n-1$ 阶行列式已定义．对于 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

划去 A 的第 i 行和第 j 列的所有元素，称剩下的这个 $n-1$ 阶方阵的行列式为元素 a_{ij} 的余子式，记作 Δ_{ij}，而

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

则称为元素 a_{ij} 的代数余子式，并定义 A 的行列式为