



普通高等教育“十二五”规划教材（高职高专教育）



# 工科基础数学

GONGKE JICHU SHUXUE

朱广斌 主编



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



普通高等教育“十二五”规划教材（高职高专教育）

# 工科基础数学

GONGKE JICHU SHUXUE

主 编 朱广斌  
副主编 丛 山 高纪文 臧永翠  
编 写 夏福芳 郭继刚 盛茂林  
主 审 孙 鸣



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

## 内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材（高职高专教育）。本书涵盖了高职高专各专业所需要的高等数学、工程数学、经济数学的绝大多数内容，内容包括函数与极限、一元函数微积分及应用、多元函数微积分及简单应用、向量代数与空间解析几何、级数、线性代数及线性规划、Laplace 变换、概率论初步，每章最后还简单介绍了数学软件 MATLAB 的应用举例。

本书可作为高职高专院校工科类专业数学课程的教材，也可作为经管类专业数学课程的教材，还可供各类人员自学使用。

### 图书在版编目（CIP）数据

工科基础数学/朱广斌主编. —北京：中国电力出版社，  
2011.6

普通高等教育“十二五”规划教材·高职高专教育

ISBN 978-7-5123-1812-0

I. ①工… II. ①朱… III. ①高等数学—高等职业教育—  
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 122392 号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>）

北京丰源印刷厂印刷

各地新华书店经售

\*

2011 年 6 月第一版 2011 年 6 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 21.75 印张 533 千字

定价 38.00 元

### 敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

# 前 言

数学课程的通识性是实现高职培养目标所必需的。在人才培养的实践中我们看到,几乎所有课程都需要数学思想和方法的指导,甚至大多数非理工科专业也是如此。随着高职人才培养理念的不断明晰,专业培养方案的不断成熟,数学课程作为培养“有一定理论水平的”、“高素质的”人才必要的课程成为共识,高职院校数学课程本身也在不断的变革中日趋成熟。

然而在过去的课程实践中,数学课程总是保持着“数学”的本来面目,尽管数学教师们的主观上也自觉或不自觉地做了许多努力,但由于专业背景和教材等方面的局限,课堂教学往往很难改变“数学课程”固有模式,“贴近专业”的课程目标做起来事倍功半,“为专业服务”的定位往往难以实现。尤其在高职院校,作为培养应用型人才,该课程的教学定位和应用特色未能在数学课程教学中得到很好的体现,没有做到与专业教育的充分融合。

基于以上的认识与思考,我们编写了这本《工科基础数学》,旨在尽可能地消除“数学”课程学科的面纱,尽可能地使“数学”不仅是书本上的演绎和计算,而且要把“数学”放到专业实际应用中去,使“数学”变得易学能用,使“数学”真正成为学好专业的适用工具。为实现上述目的,我们在本教材的编写过程中注重了如下几个方面的探索。

(1) 本书本着突出“数学为专业服务,为人才培养服务”的这一基本原则,重视课程与专业实际和生活实际的结合。力求彻底打破数学体系,放弃数学知识逻辑,以“应用”为出发点,以“有用”为选材标准、以“够用”为基本思想;文字叙述上,在保证科学性的前提下,注意通俗易懂、易教易学,不追求数学的严谨性。

(2) 在教材中的数学知识方面,对于过程和结论,我们更重视结论,对于理论与方法,我们更重视方法,对于全面性和实用性,我们更重视实用性;因此,本书在内容讲述上对“怎么做”重于“为什么”,在实例解析上对“解题的方法和过程”重于“分析和推理”,本书彻底杜绝纯数学的演绎和证明。

(3) 本书强化了数学问题在引入、举例、练习过程中“联系实际”,用实际问题引发思考、用实际问题导入概念、在解决实际问题中介绍方法。为了突出学生对工程计算软件的应用能力,我们在每章后面增加了本章数学问题应用 MATLAB 软件求解的举例,力求通过这样的介绍,使学生熟悉 MATLAB 软件,学会利用计算机工具解决一些简单的工程问题。

(4) 本书共有十一章,包括工科数学基础(第一、二、三、四章)、工科数学拓展(第五、六、七、十章)和经济数学(第八、九、十一章)三个模块,这样的考虑是基于适应不同专业课程模块选择的需要。

(5) 从“学以致用”考虑,本书的例题力求来自生产和生活实际。在每个知识点讲完之后,配有“试一试”专栏,在学生随堂解答的过程中,教师可以了解学生对该知识点的掌握程度。

(6) 本书的课后练习将每章的习题分成了(1)、(2)两组,题量适度,(1)组题作为基本练习,是课程学习基础练习部分;(2)组题作为强化练习,供学有余力的同学选做。这样的考虑,体现了我们“分层次教学”的基本思想。本书在每章最后附有“本章小结”,包括

必须掌握的基本概念、基本内容、基本方法，并配有自测题供学生自我检查学习效果。

(7) 本书加强了人文教育、素质教育和养成教育内涵。数学最引人注目的特点是它的确定性、抽象性、精确性、应用的广泛性以及数学自身纯粹的美。因为我们认为，数学能力的获得是人的一种重要的养成，良好的综合素质更容易获得用人单位的青睐。

本书由朱广斌主编，参加本次修订的有安徽电气工程职业技术学院朱广斌（第八、十章）、丛山（第九、十一章），高纪文（第五、六、七章）、臧永翠、夏福芳、郭继刚（第一、二、三、四章），每章的 MATLAB 举例由盛茂林编写。本书由合肥工业大学孙鸣教授主审。

编 者

2011年4月于合肥

# 目 录

## 前言

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
第二节 函数的极限	11
第三节 极限的运算法则	17
第四节 两个重要极限	20
第五节 函数的连续性与间断点	24
第六节 复数	28
第七节 MATLAB 的绘图与求极限举例	34
本章小结	36
习题一 (1)	36
习题一 (2)	39
自测题一	40
第二章 一元函数的导数与微分	41
第一节 导数的概念	41
第二节 基本初等函数的导数	44
第三节 函数的求导法则	48
第四节 高阶导数	55
第五节 函数的微分	56
第六节 用 MATLAB 进行求导与微分	60
本章小结	61
习题二 (1)	61
习题二 (2)	63
自测题二	64
第三章 一元函数的积分学	65
第一节 原函数和不定积分	65
第二节 不定积分的积分法	69
第三节 定积分的概念	77
第四节 定积分的计算公式	82
第五节 广义积分	88
第六节 MATLAB 进行积分运算举例	89
本章小结	90
习题三 (1)	91
习题三 (2)	93

自测题三 .....	94
<b>第四章 一元函数微积分的应用</b> .....	95
第一节 微分中值定理及函数单调性的判定 .....	95
第二节 函数的极值及最值 .....	97
第三节 曲线的凹凸与拐点 .....	101
第四节 罗必达法则 .....	103
第五节 微分在近似计算中的应用 .....	106
第六节 最简单的微分方程 .....	107
第七节 定积分的应用 .....	111
第八节 用 MATLAB 解决微积分学应用题 .....	115
本章小结 .....	116
习题四 (1) .....	116
习题四 (2) .....	118
自测题四 .....	119
<b>第五章 级数</b> .....	120
第一节 常数项级数的概念与性质 .....	120
第二节 常数项级数的审敛法 .....	123
第三节 幂级数 .....	126
第四节 函数展开成幂级数 .....	130
第五节 周期为 $2\pi$ 的函数展开成傅里叶级数 .....	133
第六节 MATLAB 在级数中的应用 .....	138
本章小结 .....	139
习题五 (1) .....	140
习题五 (2) .....	141
自测题五 .....	142
<b>第六章 向量代数与空间解析几何</b> .....	144
第一节 空间直角坐标系 .....	144
第二节 向量的运算 .....	145
第三节 平面与直线 .....	150
第四节 空间曲面与曲线 .....	154
第五节 MATLAB 多元函数作图举例 .....	158
本章小结 .....	159
习题六 (1) .....	159
习题六 (2) .....	160
自测题六 .....	160
<b>第七章 多元函数微积分</b> .....	162
第一节 二元函数的概念 .....	162
第二节 偏导数与全微分 .....	164
第三节 复合函数与隐函数的微分法 .....	169

第四节	偏导数的几何应用	173
第五节	多元函数的极值	175
第六节	二重积分的概念与性质	177
第七节	二重积分的计算	180
第八节	MATLAB 在多元函数微积分中的应用	188
本章小结		191
习题七 (1)		191
习题七 (2)		194
自测题七		194
<b>第八章</b>	<b>线性代数</b>	196
第一节	行列式	196
第二节	矩阵	204
第三节	线性方程组	218
第四节	MATLAB 在线性代数中的主要应用举例	223
本章小结		225
习题八 (1)		226
习题八 (2)		228
自测题八		230
<b>第九章</b>	<b>线性规划初步</b>	231
第一节	线性规划问题及数学模型	231
第二节	两个变量的图解法	235
第三节	线性规划问题的标准形式与解	238
第四节	单纯型法	243
第五节	线性规划解决实际问题举例	255
第六节	MATLAB 在线性规划中的主要应用举例	261
本章小结		264
习题九 (1)		264
习题九 (2)		266
自测题九		268
<b>第十章</b>	<b>拉普拉斯 (Laplace) 变换</b>	269
第一节	Laplace 变换及其存在性	269
第二节	Laplace 变换的性质	271
第三节	拉氏逆变换	275
第四节	拉氏变换的应用	282
第五节	MATLAB 在积分变换中的主要应用举例	283
本章小结		284
习题十 (1)		285
习题十 (2)		285
自测题十		286



第十一章 概率论初步	287
第一节 随机事件与概率	287
第二节 随机变量及其分布	299
第三节 随机变量的数字特征	309
第四节 MATLAB 在概率论中的主要应用举例	312
本章小结	314
习题十一 (1)	314
习题十一 (2)	316
自测题十一	318
附录 A 习题答案	320
附录 B 标准正态分布表	340

## 第一章 函数与极限



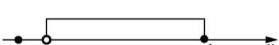


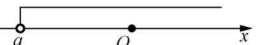
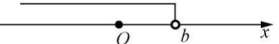
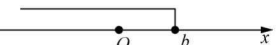

函数是高等数学研究的基本对象，极限是研究函数的主要工具，在后面的几章中可以看到，微积分中的重要概念都是通过极限来定义的。函数的连续性则是与极限概念紧密联系的一个重要概念，它是函数的一个基本属性。本章将在初等数学关于函数概念的基础上进一步深入研究函数的性质，分析初等函数的结构，介绍极限的概念、性质及运算法则，在此基础上建立函数连续的概念，讨论连续函数的性质。

### 第一节 函 数

#### 一、区间与邻域

下面我们将各种区间的类型、记号、集合表示及数轴表示列于表 1-1。

表 1-1

类型	名 称	记 号	集 合 表 示	数 轴 表 示
有限区间	开区间	$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	
	闭区间	$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
	左开右闭区间	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
	左闭右开区间	$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
无穷区间	开区间	$(-\infty, +\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	
	开区间	$(a, +\infty)$	$\{x \mid x > a\}$	
	开区间	$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
	左开右闭区间	$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
	左闭右开区间	$[a, +\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	

在表 1-1 中，实数  $a$  与  $b$  称为区间的端点，数  $b-a$  称为有限区间的长度，从数轴上可以看出，有限区间的长度为有限的，无穷区间的长度为无限的，数轴上的实点记号“·”表示该区间包含端点，空点记号“。”表示该区间不包含端点。

符号“ $+\infty$ ”（读做“正无穷大”）和“ $-\infty$ ”（读做“负无穷大”）不是数，仅是一个

记号.

以后还会经常遇到一种以点  $x_0$  为中心的特殊的开区间, 称为  $x_0$  的邻域, 确切地说, 设  $x_0$  与  $\delta > 0$  是两个实数, 则开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  称为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域, 记为  $O(x_0, \delta)$ , 即  $O(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ , 点  $x_0$  称为  $O(x_0, \delta)$  的中心,  $\delta$  称为  $O(x_0, \delta)$  的半径 (见图 1-1).

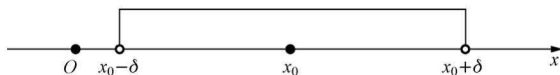


图 1-1

在极限中用到的邻域还需要把邻域的中心去掉, 称为  $x_0$  的去心邻域 (见图 1-2), 记为  $\hat{O}(x_0, \delta)$ , 即  $\hat{O}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ ,  $0 < |x - x_0| < \delta$  中的  $|x - x_0| > 0$  表示  $x \neq x_0$ .

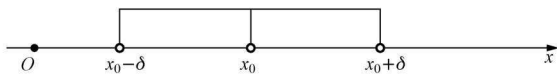


图 1-2

值得一提的是, 邻域的半径  $\delta$  一般是很小的正数.

## 二、函数的概念

### 1. 函数的定义

在某一变化过程中, 数值保持不变的量称为常量, 可以变化的量称为变量.

在圆的面积公式  $A = \pi r^2$  中,  $\pi$  是常数, 而半径  $r$  是随圆的大小而变化,  $A$  又随  $r$  的变化而变化.  $\pi$  是常量,  $r$  和  $A$  都是变量.

如果在某个变化过程中有两个变量  $x$ 、 $y$ , 对于  $x$  在某个范围内的每一个确定的值, 按照某个对应法则,  $y$  总有唯一确定的值与之对应, 那么  $y$  称为  $x$  的函数, 记为

$$y = f(x)$$

其中  $x$  称为自变量,  $x$  的取值范围称为函数的定义域, 记为  $D$ .

当  $x$  在定义域  $D$  内取定值  $x_0$  时, 与  $x_0$  对应的  $y$  的数值称为函数在点  $x_0$  处的函数值, 记为

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{或} \quad y_0 = y|_{x=x_0}$$

当  $x$  遍取  $D$  中的一切数值时, 对应的函数值的集合为

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

**【例 1-1】** 设  $f(x) = 2x^2 + 3$ , 求  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $f(x_0)$ ,  $f(a+1)$ .

**解** 由函数的定义可知

$$f(0) = 2 \times 0^2 + 3 = 3, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3 = 4$$

$$f(x_0) = 2x_0^2 + 3, \quad f(a+1) = 2(a+1)^2 + 3 = 2a^2 + 4a + 5$$

函数  $y = f(x)$  中的符号“ $f$ ”表示  $x$  与  $y$  之间的某种对应关系. 如圆的面积公式中的  $A$

与  $r$  之间的对应关系可以表示成  $A = f(r)$ , 即  $f(r) = \pi r^2$ . 有时为了区别不同的函数, 函数也可以记为  $y = F(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $s = s(t)$  等.

具体给出  $f(x)$  的表达式称为函数的解析式, 如  $y = \sin x$ ,  $A = \pi r^2$  都是解析式.

在函数的定义中有两个要素:

- (1) 自变量的取值范围, 即函数的定义域;
- (2) 确定自变量  $x$  与因变量  $y$  之间数值的对应关系.

由此可知, 只有当两个函数的定义域和对应关系都相同时, 这两个函数才称为相等.

**【例 1-2】** 判定下列各对函数是否相等:

- (1)  $f(x) = x$  与  $g(x) = \sqrt{x^2}$ ;
- (2)  $f(x) = \sin x$  与  $g(x) = \frac{x \sin x}{x}$ ;
- (3)  $f(x) = x$  与  $g(x) = x \sin^2 x + x \cos^2 x$ .

**解** (1) 因为  $f(x)$  与  $g(x)$  的对应关系不同, 所以这两个函数不相等.

(2) 因为  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域不同, 所以这两个函数不相等.

(3) 由于  $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ , 因此这两个函数的定义域和对应关系都相同, 故  $f(x)$  与  $g(x)$  相等, 即  $f(x) = g(x)$ .

## 2. 函数定义域的求法

确定函数的定义域通常有两种情形:

(1) 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如在圆的面积公式中的半径  $r$  不可能是负数, 所以我们可以认为函数  $A = \pi r^2$  的定义域为  $D = [0, +\infty)$ .

(2) 用解析式表示的函数的定义域, 是指使得函数有意义的自变量的取值范围, 这种定义域称为自然定义域.

**【例 1-3】** 求函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$  的定义域.

**解** 要使函数  $y$  有意义, 必须同时满足负数不能开方和分母不能为零两个条件, 即

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) > 0$$

由不等式组

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

解得

$$x > 2 \quad \text{或} \quad x < -1$$

因此, 函数的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ .



**注意**

函数的表达式中如果有开偶次方根, 则根号内所含式子的值必须大于或等于零.

**【例 1-4】** 求函数  $y = \lg(1 - x) + \arcsin \frac{x - 1}{3}$  的定义域.

**解** 要使函数  $y$  有意义, 必须使右端的两个表达式同时都有意义. 故  $x$  应满足条件

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ \left| \frac{x-1}{3} \right| \leq 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x < 1 \\ -2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

因此, 函数的定义域为  $[-2, 1)$ .



**注意**

函数表达式中如果有对数符号, 则真数必须大于零; 反正弦函数  $\arcsin u$  或反余弦函数  $\arccos u$  中应使  $|u| \leq 1$ .

应当指出, 根据函数的定义, 对于定义域内的任一  $x$  值, 函数  $y = f(x)$  仅有一个确定的值与之对应, 这类函数称为单值函数. 否则称为多值函数. 例如, 函数  $y = 3x + 1$  是单值函数, 而函数  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$  则是多值函数.

今后, 如果没有特别说明, 我们所提到的函数都是单值函数.

### 三、分段函数

在工程技术和经济领域的实际问题中, 常常会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内是用不同的式子来表示的.

例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

是定义在区间  $(-\infty, +\infty)$  内的一个函数 (见图 1-3).

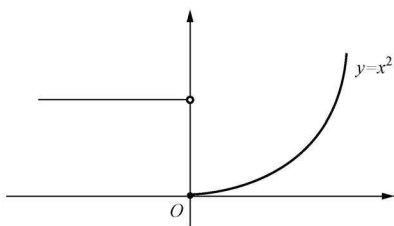


图 1-3

在函数定义域的不同范围内, 用不同的解析式来表示的函数称为分段函数, 使得分段函数的定义域分成几部分的点称为分段点.

值得注意的是, 分段函数尽管在不同的区间内用不同的解析式, 但它表示的是一个函数. 因此, 在画分段函数图像时, 必须画在同一坐标系内. 在求分段函数的函数值时, 应把自变量的值代入对应的解析式中进行计算.

#### 【例 1-5】作出分段函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的图像, 指出分段点, 并求  $f(1)$ ,  $f(-2)$ .

**解** 图像见图 1-4,  $x=0$  为分段点.

因为  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x$ , 所以  $f(1) = x|_{x=1} = 1$ ; 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -x$ , 故有  $f(-2) = (-x)|_{x=-2} = 2$ .

**【例 1-6】** 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 - 1, & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$$

- (1) 在  $x=1$  处函数是否有定义? 为什么?
- (2) 求  $f(x)$  的定义域, 并找出它的分段点;
- (3) 求  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ;
- (4) 画出函数  $f(x)$  的图像.

**解** (1) 因为  $x=1$  不在函数  $f(x)$  的定义域内, 所以函数  $f(x)$  在  $x=1$  处没有定义.

(2)  $f(x)$  的定义域为  $D = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$ ; 分段点是  $x=-1$  和  $x=1$ .

(3) 因为  $x=-2$  在区间  $[-2, -1)$  上, 所以函数值由表达式  $f(x) = x^2 - 1$  确定, 因此

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$$

因为  $x=0$  在区间  $(-1, 1)$  内, 所以函数值由  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  确定, 因此

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

因为  $x=\frac{3}{2}$  在区间  $(1, 2]$  内, 所以

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

(4) 函数  $f(x)$  的图像如图 1-5 所示.

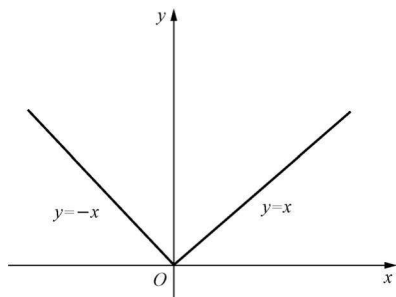


图 1-4

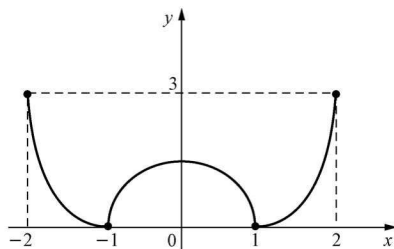


图 1-5

#### 四、函数的基本特征

##### 1. 有界性

设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义. 如果存在正数  $M$ , 对于任意的  $x \in I$ , 其对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有界, 或称在区间  $I$  上  $f(x)$  是有界函数. 若这样的正数  $M$  不存在, 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上无界, 或称在区间  $I$  上  $f(x)$  是无界函数.

例如, 函数  $y = \sin x$ ,  $y = \arctan x$  对于定义域  $(-\infty, +\infty)$  内的一切  $x$ , 都有

$$|\sin x| \leq 1, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}$$

因此, 函数  $y = \sin x$ ,  $y = \arctan x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界, 而函数  $y = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内无界.

事实上, 因为当  $x$  的取值越接近于 0 时, 函数  $y = \frac{1}{x}$  的绝对值就越无限增大, 即不存在正数

$M$ , 使得  $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$ .

### 2. 单调性

如果对于某区间  $I$  内的任意两点  $x_1$ 、 $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ [或 } f(x_1) \geq f(x_2) \text{]}$$

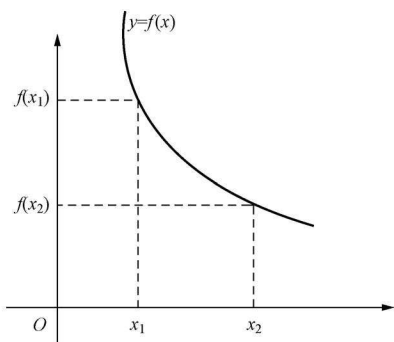


图 1-6

则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  内是单调增加 (或单调减少) 的, 有时也称为单调上升 (或单调下降), 如图 1-6 所示这个函数单调减少.

使函数  $f(x)$  保持单调增加或单调减少的区间称为单调区间;

单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数  $y = x^2$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加, 在  $(-\infty, 0)$  内单调减少. 又如, 函数  $y = x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增加的.

### 3. 奇偶性

设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称. 如果对于任意  $x \in D$ , 都有

$$f(-x) = f(x) \text{ [或 } f(-x) = -f(x) \text{]}$$

则称  $f(x)$  为偶函数 (或奇函数).

偶函数的图形关于  $y$  轴对称; 奇函数的图形关于原点对称.

例如,  $y = x^n$  当  $n$  为奇数时为奇函数, 当  $n$  为偶数时为偶函数;  $y = \sin x$  为奇函数;  $y = \cos x$  为偶函数; 而  $y = x + 1$ ,  $y = x^3 + \cos x$  都是非奇非偶函数.

奇、偶函数的运算满足下述规律:

- (1) 偶函数  $\pm$  偶函数 = 偶函数;
- (2) 偶函数  $\times$  偶函数 = 偶函数;
- (3) 奇函数  $\times$  奇函数 = 偶函数;
- (4) 奇函数  $\times$  偶函数 = 奇函数.

### 4. 周期性

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 如果存在正数  $T$ , 使得对于任意的  $x \in D$ , 有  $x \pm T \in D$ , 且

$$f(x \pm T) = f(x)$$

则称函数  $f(x)$  为周期函数,  $T$  称为  $f(x)$  的周期.

当  $f(x)$  是周期函数时, 有

$$f(x) = f(x \pm T) = f(x \pm 2T) = \cdots = f(x \pm nT)$$

因此,  $T, 2T, \cdots, nT$  都是  $f(x)$  的周期. 但是, 我们通常所说的周期函数的周期是指最小正周期 (如果存在的话).

例如, 函数  $\sin x$ ,  $\cos x$  的周期为  $2\pi$ ; 函数  $\tan x$  的周期为  $\pi$ .

下面给出一个有用的结论：若周期函数  $f(x)$  的周期为  $T$ ，则函数  $f(\omega x + \varphi)$  ( $\omega, \varphi$  为常数,  $\omega > 0$ ) 是周期为  $\frac{T}{\omega}$  的周期函数. 例如, 函数  $y = \sin(4x + 3)$  是以  $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  为周期的周期函数.

如果函数  $f(x)$  的周期为  $T$ ，则在其定义域内长度为  $T$  的区间上，函数图形有相同的形状.

### 五、反函数

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ ，值域为  $W$ ，如果对于  $W$  中的任意一个  $y$  值，按  $y = f(x)$  可以唯一确定  $D$  中的一个  $x$  值，那么就建立起一个由  $W$  对应到  $D$  中的新的函数关系. 记为  $x = f^{-1}(y)$ ，称为  $y = f(x)$  的反函数.

习惯上用  $x$  表示自变量， $y$  表示函数，为了保持一致，记反函数为  $y = f^{-1}(x)$ ，它的定义域为  $W$ ，值域为  $D$ .

根据反函数的定义，如果  $y = f^{-1}(x)$  是  $y = f(x)$  的反函数，那么  $y = f(x)$  也是  $y = f^{-1}(x)$  的反函数（互为反函数）.

**【例 1-7】** 求函数  $y = 2x - 1$  的反函数，并在同一直角坐标系中画出两个互为反函数的图像.

**解** 由  $y = 2x - 1$  解出  $x$ ，可得

$$x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

所求的反函数为

$$y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

函数  $y = 2x - 1$  与反函数  $y = \frac{1}{2}(x + 1)$  的图像如图 1-7 所示.

从图中可以看出，函数  $y = 2x - 1$  的图形与反函数  $y = \frac{1}{2}(x + 1)$  的图形是关于直线  $y = x$  对称的. 这个结论对于一般的函数都成立，即函数  $y = f(x)$  的图形与它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图形是关于直线  $y = x$  对称.

利用这个结论，由函数  $y = f(x)$  的图形就很容易作出它的反函数的图形.

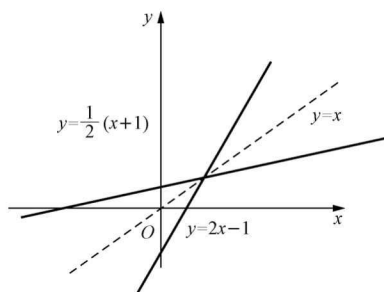


图 1-7

### 注意

并不是任何一个函数都存在反函数. 例如，函数  $y = x^2$  在定义域  $(-\infty, +\infty)$  内就不存在反函数. 事实上，函数  $y = x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的  $y = x^2$  是一个双值函数  $x = \pm\sqrt{y}$ ,  $y \in [0, +\infty)$ . 但是，在区间  $(0, +\infty)$  内， $y = x^2$  有反函数  $x = \sqrt{y}$ ；在区间  $(-\infty, 0)$  内， $y = x^2$  有反函数  $x = -\sqrt{y}$ . 所以我们有以下定理.



**反函数存在的定理** 若函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上是单调函数, 则它的反函数存在, 而且也是单调函数.

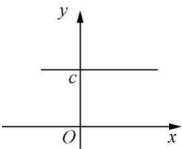
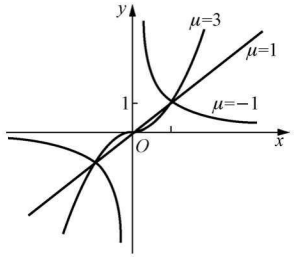
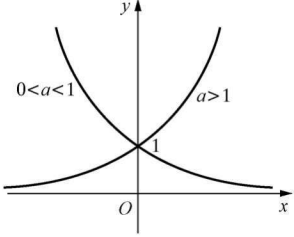
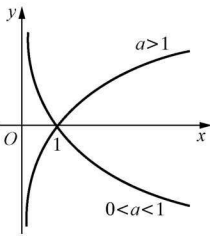
## 六、复合函数、初等函数

### 1. 基本初等函数

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和特性见表 1-2.

表 1-2

函 数	几 何 图 形	基 本 特 征
常函数: $y=c$		定义域: $(-\infty, +\infty)$ 特征: 有界的偶函数
幂函数: $y=x^\mu$		定义域: $\mu=1, 2, \dots, n$ , 时, 为 $(-\infty, +\infty)$ ; 其他由 $\mu$ 的不同而不同 特征: 由 $\mu$ 的不同而不同
指数函数: $y=a^x$ ( $a>0$ , 且 $a\neq 1$ ) (特例: $y=e^x$ )		定义域: $(-\infty, +\infty)$ 特征: 当 $a>1$ 时, 是单调递增的无界函数; 当 $0<a<1$ 时, 是单调递减的无界函数
对数函数: $y=\log_a x$ ( $a>0$ , 且 $a\neq 1$ ) (特例: $y=\ln x$ )		定义域: $(-\infty, +\infty)$ 特征: 当 $a>1$ 时, 是单调递增的无界函数; 当 $0<a<1$ 时, 是单调递减的无界函数