固原市原州區第五中學校本教材系列丛书

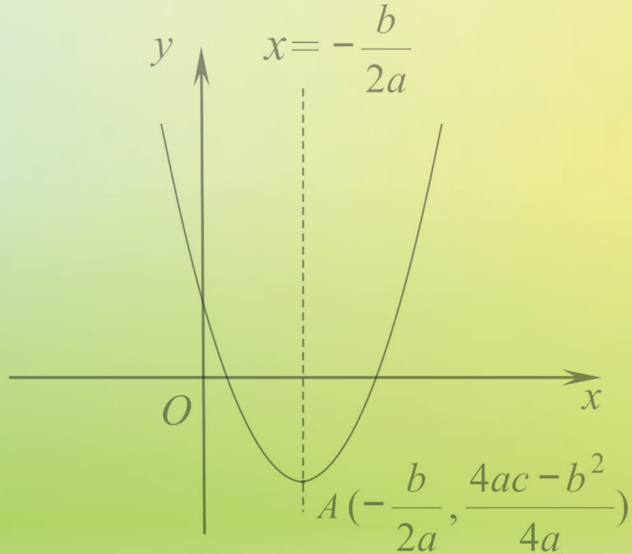
主编◎康玉玺

初高中数学补充内容

（衔接知识）

Chu Gaozhong Shuxue Buchong Neirong

邱云飞◎编著



黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

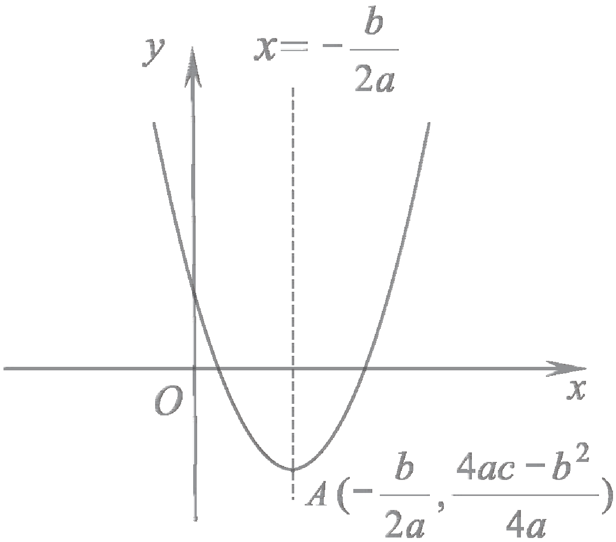
固原市原州区第五中学校本教材系列丛书 主编◎康玉玺

初高中数学
补充内容

（衔接知识）

Chu Gaozhong Shuxue Buchong Neirong

邱云飞◎编著



黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初高中数学补充内容/康玉玺主编. —3 版. —银川:宁夏人民教育出版社,2011.8
ISBN 978-7-80764-565-8

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①康… Ⅲ. ①中学数学课—课外读物
Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 175286 号

初高中数学补充内容 康玉玺 主编

责任编辑 柳毅伟 超 楠
封面设计 万明华
责任印制 刘 丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地 址 银川市北京东路 139 号出版大厦 (750001)
网 址 www.yrpubm.com
网上书店 www.hh-book.com
电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com
邮购电话 0951-5014284
经 销 全国新华书店
印刷装订 宁夏雅昌彩色印务有限公司

开本 787 mm×1092 mm 1/16 印张 5.75 字数 120 千
印刷委托书号(宁)0006897 印数 1500 册
版次 2011 年 8 月第 1 版 印次 2011 年 8 月第 1 次印刷
书号 ISBN 978-7-80764-565-8/G·1478

定价 14.80 元

“原州区第五中学校本教材系列丛书”
编 写 委 员 会

编者的话

Ⅰ　初高中数学衔接的必要性

在新课程教学中，教师和学生的行为都有了很大转变，对提高学生素质和能力，与以往相比有很大的改进.我们知道，由于国家实行义务教育和素质教育，现行初中教材与过去教材相比，部分内容被弱化或删除了，在初高中数学知识衔接上出现了断层，在学习高中数学时，就需要把必须具备的基础性、工具性知识进行强化或补充.

另外，随着教育事业的快速发展，高中办学规模不断扩大，给越来越多的学生提供了接受高中教育的机会，如何解决对数学教师难教、学生难学，是我们每一位教师要思考的问题.了解学生初中数学基础知识状况，做好初高中数学的知识衔接，为学生构建完整的知识体系，是教学必不可少的一个环节.针对初高中数学知识出现断层现象，就需要把强化或补充的知识整理出来，作好初高中数学衔接.该强化的知识必须强化，该补充的知识必须补充.

Ⅱ　初高中数学衔接的补充内容

1. 立方和与差的公式、和的立方与差的立方公式初中已删去不讲，而高中数学运算还要用到.

2. 分解因式初中一般只限于二次三项式，且二次项系数为 1 的多项式，对系数不为 1 的多项式涉及不多，对高次多项式因式分解几乎不作要求，但高中作为基本运算经常要用.

3. 二次根式中对分子、分母有理化初中不作要求，而在高中阶段是常用的解题技巧.

4. 在数轴上两点间的距离及中点坐标公式和在坐标系中两点的中点坐标公式及简单应用，是用代数方法解决几何问题的初步渗透，应该使学生掌握.

5. 二次方程的根与系数关系(韦达定理)在初中不作要求，高中教材却未安排专门的讲授.初中教材对二次函数要求较低，学生处于了解水平，但二次函数却是高中贯穿始终的重要内容.

6. 函数图象的对称、平移变换，初中只作简单介绍，而在高中讲授函数后，对其图象的上下、左右平移，两个函数的图象关于坐标原点、坐标轴的对称问题等，作为函数图象的基本变换，学生必须掌握.

7. 含有参数的函数、方程、不等式，初中不作要求，只作定量研究，而高中这部分内容为重难点，同时方程、不等式、函数的综合考查是数学考查的重点.对含参数的简单问题应该做一些渗透.

8. 几何部分很多概念(如三角形的重心、垂心等)和定理(如平行线分线段比例定理、比例的性质、射影定理等)初中生大都没有学习，而高中都要涉及.

另外，配方法、换元法、待定系数法、十字相乘法等数学方法，在初中数学中弱化了，不利于高中数学知识的学习，需要加强训练.

III　初高中数学衔接的几个层面

第一，明确初中数学知识要求层次，做好高中数学学习的知识准备.教师对初中所学数学知识及要求层次，要做到心中有数；对初中所学的数学方法及熟练程度要心中有数. 教师对高中常用的基础性和工具性的数学知识，在初中弱化或删除的部分要做一系统归纳、及时补充，为学生顺利学习高中数学知识做好准备.

第二，重视基础，注意难度，逐步提升.初中学生都是带着一种好奇与向往之心来到高中的.他们即使基础较差，也都渴望在高中阶段取得理想成绩.教师对学生初中数学知识结构及掌握情况，要有比较准确的了解.如果教师一开始讲授过快、过难，多数学生会跟不上，学生满腔的热情可能会因几次课听不懂，几次考试成绩不佳而丧失.好多学生在高中开始学习数学时，学习积极性受挫.高中数学的每一节内容，都是在初中基础上发展而来的，在引入新知识、新概念时，应注意旧知识的复习，用学生已熟悉的知识进行铺垫和引入.

第三，对学生进行学法指导，培养学生良好学习习惯.初中数学主要是从直观、形象、具体事例出发，概括出一般结论，然后教师讲解典型问题，学生反复练习，直至掌握为止. 而高中数学从特殊到一般，概括性、抽象性、逻辑性明显增强，要求学生思维广阔，注重严密逻辑推理，要善于从不同角度挖掘出问题的实质.在高一开始学习数学时，要多进行学习方法上的指导，让学生逐步养成独立思考、自我总结的良好习惯，善于从典型问题中悟出一般解题规律，在理解的基础上形成解题技能，做到从懂到会的转化，注重数学思想方法教学，要求学生能举一反三；重视学生基础知识、基本方法和基本技能的领会和训练.

基于上述认识，通过自己的教学实践，以及和我校数学组教师的交流，我把需要强化或补充的知识内容进行了整理. 李宗荣老师初高中数学课标教材都教过，熟悉初高中数学内容，我和李宗荣老师多次商讨，确定了一些需要强化或补充的具体内容，李宗荣老师对部分例题给出了完整的解答过程，本书在整个编写过程中，得到我校校长、中学数学特级教师康玉玺同志的指导，同时也得到学校其他领导的帮助. 本书还存在不到位或不恰当的地方，恳请各位同仁评批、指正.

序　言

康玉玺

原州区第五中学是成立于 1969 年 1 月,2002 年 8 月整体搬迁至固原市试验区的一所完全中学.在党和政府的关心支持下,现已发展为有 220 名教师 4 000 多名学生,环境优美、设施齐全、教学质量不断提升、有办学特色的完全中学.学校先后被评为全国和谐校园,自治区级师德建设先进单位,自治区校本培训先进集体,全区德育示范校,全区绿化先进单位.

自 2002 年迁建以来的近十年是五中扩规模、提质量、创特色的十年,也是与新一轮教改同步共振的十年,是教科研成果开花结果的十年.

十年来,学校从底子薄弱、生源无优势的实际出发,秉承提高教师素质、发展学生能力、科研兴校的理念,大力营造教育科研氛围,积极引导教师专业发展.从起步阶段的集体备课,常规“三课”,到学习洋思经验,实行“四清”;从写好一篇教学反思,设计一套成功的试题,到每学期写一篇论文,每周命制一套适合学情的形成性测试题;从每学期办 3 期 8 开校报到现在每月出 1 期《五中校报》、每学期出 2 本《春草》(学生优秀作品选集)、每学期出 2 本共 100 多万字的《五中教科研》(教师教科研优秀作品选集);从浏览网页、下载资料到以学校网站(http://www.gywznx.30edu.com/)为依托,100 多名教师经营自己的 office(个人教育博客);全校形成了以常规教科研为基础,以学术刊物为提升,以 office 网校为特色(在全国 office 网校中排名在 30 多位)的立体型教育科研网络.十年来,一步一个脚印,一步一个台阶,走过了扎扎实实的教改之路、教研之路,成果可观.

在学校总体教育科研蓬勃发展的同时,骨干教师群体、科研型教师群体也在逐渐壮大,以褚广涵、邱云飞、高丽君等为代表的科研型教师,已经走上由自发到自觉,初步形成了自己科研成果的专业发展之路.学校坚持教师的教育科研要以促进教育教学质量为目标,以促进学生发展为重点,提倡和鼓励教研成果的针对性、实效性,同时允许百花齐放,尊重教师的个性特长发挥;做到学校教育科研有目标、有方向,有特色.我校从今年起将陆续出版的“原州区五中校本教材系列丛书”已明确体现这些思想.

《原州区五中“十二五”教育发展规划》提出,从今年起的五年内,我校将整理挖掘已有的科研成果,积极培育新的教研生长点,以服务学生、提升教师为目的,以开发初高中校本教材为抓手,充分发挥教研团队力量,促使学校办学层次有质的提升.

新课改的纲领性文件——《基础教育课程改革纲要》规定:“为保障和促进课程适应不同地区、学校、学生的要求,实行国家、地方和学校三级课程管理.”“学校在执行国家课程和地方课程的同时,应视当地社会、经济发展的具体情况,结合本校的传统和优势、学生的兴趣和需要,开发或选用适合本校的课程.”这些精神对我们开发校本课程提供了充足的政策依据,学校从政策、人力、资金等方面对教研组、教师个人开发校本课程给予大力支持,计划在五年内出版10本左右的系列校本教材,以彰显我校内涵式发展的新成果.

我代表学校对付出辛勤劳动的教材编者表示衷心的感谢, 祝愿他们在教育事业的光荣道路上青春永驻,硕果累累! 感谢为“原州区五中校本教材系列丛书”提供大力支持的所有朋友!

最后,恳请专家、学者、教育科研人员、使用本书的师生对本系列教材的错误与不足提出宝贵批评意见,我们将不胜感激.

2011年7月

目录

第一章 数与式

第二章 函数与方程

目录

第一章 数与式

本章学习含字母的绝对值的一些运算,根式的分母或分子有理化,繁分数与繁分式的简单运算,还补充学习几个多项式的乘法公式,分解因式的几种方法.

一、绝对值概念是在初一学习的,它是初等数学的重要概念之一,贯穿于整个中学数学,随着知识的发展,不断深化.继续学习一些含字母的绝对值的一些运算,对含多个绝对值的的式子进行讨论,结合数轴解决一些问题.

二、分数与分式是我们熟悉的概念.在高中数学中,将涉及繁分数与繁分式的简单运算,这些运算容易出现错误.需要对繁分数与繁分式的运算加强训练,要能对其进行正确、便捷的运算.

三、在初中我们学习了二次根式,在高中数学中,涉及根式的变形与比较大小,需要掌握根式的分母或分子有理化这一基本变形方法.

四、代数式的恒等变形是数学中的常见运算.利用多项式的乘法公式可以简化运算,在初中所学基础上再补充学习几个乘法公式.代数式的分解因式是常见变形,需要有灵活的运算技巧.

1.1　数与式的运算

1.1.1 绝对值

绝对值的代数意义　正数的绝对值是它的本身,负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值仍是零,即

$$|a|=\begin{cases}a, a>0,\\0, a=0,\\-a, a<0.\end{cases}$$

我们把正数和零统称为非负数,也可以说非负数的绝对值是它的本身,负数的绝对值是它的相反数,即

$$|a|=\begin{cases}a, a\geqslant 0,\\-a, a<0.\end{cases}$$

实数绝对值的几何意义　一个实数的绝对值，是这个实数在数轴上对应的点到原点的距离.

由实数绝对值的几何意义可以知道,一个实数的绝对值一定是非负数,即$|a|\geqslant 0$.一个实数与它的相反数的绝对值相等，即$|a|=|-a|$对于任意两个实数 a,b，由于 $a-b$ 与 $b-a$ 互为相反数,所以$|a-b|=|b-a|$.

根据实数绝对值的几何意义,一个实数对应的点到原点的距离可以用这个实数表示.实数 a,b 在数轴上对应的点 A,B 如图 1.1-1 所示,则$|OA|=a$,$|OB|=-b$.

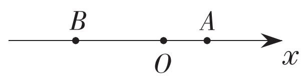


图 1.1-1

两个重要结论

1. 在数轴上的两点 A,B 对应的实数分别为 a,b,则 A,B 两点间的距离$|AB|=|a-b|=|b-a|$.

证明:(1)当点 A,B 中有一点在原点时,不妨设 B 在原点,如图 1.1-2 所示,则$|AB|=|OA|=|a|=|a-b|$;

图 1.1-2

(2)当点 A,B 都不在原点时,

①点 A,B 都在原点右侧,如图 1.1-3 所示,

则$|AB|=||OA|-|AB||=|a-b|$;

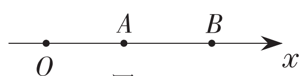


图 1.1-3

②点 A,B 都在原点左侧,如图 1.1–4 所示,

则 $|AB|=||OA|-|OB||=|-a+b|=|a-b|$;

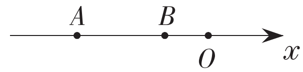


图 1.1–4

③点 A,B 在原点两侧,不妨设点 A 在原点左侧,

如图 1.1–5 所示,则 $|AB|=||OA|+|OB||=|a-b|$.

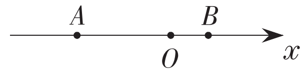


图 1.1–5

综上所述，在数轴上的两点 A,B 对应的实数分别为 a,b,则 A,B 两点间的距离 $|AB|=|a-b|=|b-a|$.

2. 在数轴上的两点 A,B 对应的实数分别为 a,b，线段 AB 的中点 M 对应的实数为 $x=\frac{a+b}{2}$.

证明:不妨设 $a>b$,设线段 AB 的中点 M 对应的实数为 x.

由于 $|AM|=|BM|$,所以 $a-x=x-b$ 即 $x=\frac{a+b}{2}$.

例 1　已知 $\sqrt{2x-1}+|y+3|+(z-1)^2=0$,那么 $x=$________,$y=$________,$z=$________.

解:$\because \sqrt{2x-1}\geqslant 0,|y+3|\geqslant 0,(z-1)^2\geqslant 0$;

$\therefore 2x-1=0,y+3=0,z-1=0$,

即 $x=\frac{1}{2},y=-3,z=1$.

例 2　实数 a、b 在数轴上对应的点如图 1.1–6 所示,则下列结论中错误的是(　　).

A. $b>a$　　　B. $b>0>a$

C. $b<a$　　　D. $a<0<b$

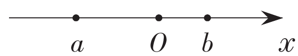


图 1.1–6

解:根据已知得 $a<0,b>0$,所以选 C.

例 3　已知 $|2x-5|=3$,求 x 的取值.

解:由 $|2x-5|=3$ 可得 $2x-5=\pm3$,所以 $x=4$ 或 $x=1$.

例 4　已知 $-5\leqslant x\leqslant 3$,求 $|x|$ 的取值范围.

解:根据一个实数的绝对值是数轴上表示它的点到原点的距离,可得 $0\leqslant|x|\leqslant 5$.

例 5　已知 x 是一个实数,求 $|x-2|+|x-5|$ 的最小值.

解:当 $x<2$ 时,$|x-2|+|x-5|=2-x+5-x=-2x+7>3$,

当 $2\leqslant x\leqslant 5$ 时,$|x-2|+|x-5|=x-2+5-x=3$,

当 $x>5$ 时,$|x-2|+|x-5|=x-2+x-5=2x-7>3$,

所以 $|x-2|+|x-5|$ 的最小值是 3.

练　习

1. 填空题：

(1)若$|x|=5$,则$x=$______________；若$|x|=|-4|$,则$x=$______________.

(2)在数轴上,实数x和-2对应的两点A,B之间的距离$|AB|=$____________,若$|AB|=2$,则x为______________________.

2. 选择题：

下列结论正确的是(　　).

A. 若$|a|=|b|$,则$a=b$　　　　B. 若$|a|>|b|$,则$a>b$

C. 若$a<b$,则$|a|<|b|$　　　　D. 若$|a|=|b|$,则$a=\pm b$

3.已知$|x|=3$,$|y|=2$,且$xy<0$,求$x+y$的值.

4. 化简$|x-5|-|2x-13|$($x>5$).

5. 当式子$|x+1|+|x-2|$取最小值时,求x的取值范围.

1.1.2 乘法公式

我们在初中已经学习了下列乘法公式：

(1)平方差公式　　　　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

(2)完全平方公式　　　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

我们还可以利用多项式乘法得到下列乘法公式：

(1)三数和平方式　　　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$;

(2)立方和公式　　　　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

(3)立方差公式　　　　$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;

(4)两数差立方公式　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

(5)两数和立方公式　　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

我们在做具有上面形式的乘法时,可以利用公式,直接写出结果.

例 1　计算：$(x-2)(x^2+2x+4)$.

解答：$(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-2^3=x^3-8$

例 2　已知$x=2$,求$(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)-2^9$的值.

解：由于$(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)-2^9$

$=(x^3+1)(x^6-x^3+1)-2^9$

$=x^9+1-2^9$,

所以$x=2$时,$(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)-2^9=2^9+1-2^9=1$.

例 3　已知 $x^2-3x+1=0$，求 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 的值.

解：$\because\ x+\dfrac{1}{x}=3$，

$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})(x^2-1+\dfrac{1}{x^2})=(x+\dfrac{1}{x})[(x+\dfrac{1}{x})^2-3]=18$

例 4　已知 $a+b+c=4$，$ab+bc+ac=4$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

解：$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=8$.

多项式乘法公式除了用于乘法运算外，像 x^2+4x+4，x^2-2x+1 这样的式子，逆用乘法的完全平方公式，可以变形为一个式子平方的形式.

例 5　在横线上填写恰当的数或式，将所给的式子化为一个完全平方式：

(1)$x^2+6x+\underline{\qquad}=x^2+2\times x\times\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=(x+3)^2$；

(2)$x^2-4x+\underline{\qquad}=x^2+2\times x\times\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=(x\qquad)^2$；

(3)$x^2+px+\underline{\qquad}=x^2+2\times x\times\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=(x\qquad)^2$；

(4)$x^2-px+\underline{\qquad}=x^2+2\times x\times\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=(x\qquad)^2$.

解：(1)$x^2+6x+\underline{\quad 9\quad}=x^2+2\times x\times\underline{\quad 3\quad}+\underline{\quad 3^2\quad}=(x+3)^2$；

(2)$x^2-4x+\underline{\quad 4\quad}=x^2-2\times x\times\underline{\quad 2\quad}+\underline{\quad 2^2\quad}=(x\,\underline{-2}\,)^2$；

(3)$x^2+px+\underline{\quad \dfrac{p^2}{4}\quad}=x^2-2\times x\times\underline{(\dfrac{p}{2})}+\underline{(\dfrac{p}{2})^2}=(x\underline{+\dfrac{p}{2}})^2$；

(4)$x^2-px+\underline{\quad \dfrac{p^2}{4}\quad}=x^2+2\times x\times\underline{(\dfrac{p}{2})}+\underline{(\dfrac{p}{2})^2}=(x\underline{-\dfrac{p}{2}})^2$.

一般地，形如 ax^2+bx+c 的二次三项式，利用配方法可以化成 $a(x-h)^2+k$ 的形式. 变形过程如下：

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

像上面将一个数学式子配凑成一个完全平方式与一个数和的形式，这种定向变形方法我们把它叫做配方法.在学习二次函数、一元二次方程时，经常要对变量或未知数的二次式，利用配方法将其化成一个完全平方式和一个常数和的形式.

例 6　利用配方法，将下列式子化为 $a(x-h)^2+k$ 这种形式：

(1)x^2-x；　(2)$-x^2+4x$；　(3)$2x^2+6x$.

解：(1)$x^2-x=x^2-x+(\dfrac{1}{2})^2-(\dfrac{1}{2})^2=(x-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}$；

(2)$-x^2+4x=-(x^2-4x)=-(x^2-4x+4-4)=-(x-2)^2+4$;

(3)$2x^2+6x=2(x^2+3x)=2[x^2+3x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2]=2(x+\frac{3}{2}{}^{2})-\frac{9}{2}$.

练　习

1. 填空题:

(1)$(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b)(\qquad\qquad)=\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2$;

(2)$(4m+\qquad)^2=16m^2+4m+(\qquad\qquad)$.

2. 选择题:

(1)若 $x^2+\frac{1}{2}mx+k$ 是一个完全平方式,则 k 等于(　　　).

A. m^2　　B. $\frac{1}{4}m^2$　　C. $\frac{1}{3}m^2$　　D. $\frac{1}{16}m^2$

(2)不论 a、b 为何实数,$a^2+b^2-2a-4b+8$ 的值(　　　).

A. 总是正数　B. 总是负数　C. 可以是零　D.可以是正数也可以是负数

3. 计算:

(1)$(2x+1)^3$;　(2)$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$;

(3)$(a+2)(a-2)(a^4+4a^2+16)$.

4. 计算:

(1)$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$;　(2)$(a+b+c)^2$.

利用上面计算结果,通过比较写出下列算式的结果:

(1)$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$;　(2)$(a-b-c)^2$.

1.1.3 分母(或分子)有理化

一般地,形如$\sqrt{a}$($a\geqslant0$)的代数式叫做二次根式.被开方数中含有字母,且不能够开得尽方的式子称为无理式. 例如 $3a+\sqrt{a^2+b}+2b$,$\sqrt{a^2+b^2}$ 等是无理式,而 $x^2+\sqrt{2}xy+y^2$,$\sqrt{a^2}$ 等是有理式.

1. 二次根式$\sqrt{a^2}$ 的意义

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, a\geqslant0,\\-a, a<0.\end{cases}$$

2. 分母(或分子)有理化

我们可以把$\frac{1}{\sqrt{2}}$与$\frac{a}{\sqrt{a}}$变形,使分母中不含根号.能否把$\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-6}$变形,使分

母中不含根号吗？

把分数或分式中，分母（或分子）中的根号化去，叫做分母（或分子）有理化.为了进行分母（或分子）有理化，需要引入有理化因式的概念.两个含有二次根式的代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，我们就说这两个代数式互为有理化因式.一般地，$a\sqrt{x}$与$\sqrt{x}$，$a\sqrt{x}+b$与$a\sqrt{x}-b$，$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$与$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$互为有理化因式.

分母有理化是分母和分子都乘以分母的有理化因式，化去分母中的根号的过程；而分子有理化是分母和分子都乘以分子的有理化因式，化去分子中的根号的过程.

3. 最简二次根式

在一些关于二次根式的运算中，需要将二次根式化为最简二次根式.最简二次根式是指二次根式满足下列两个条件：（1）被开方数的因数是整数，因式是整式；（2）被开方数中不含能开得尽的因数或因式.

例 1　将下列式子化为最简二次根式：

（1）$\sqrt{12b}$；　（2）$\sqrt{a^2b}\,(a\geqslant 0)$；　（3）$\sqrt{4x^6y}\,(x<0)$；　（4）$\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,(a>0,b>0)$.

解：（1）$\sqrt{12b}=2\sqrt{3b}$；

（2）$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=a\sqrt{b}\,(a\geqslant 0)$；

（3）$\sqrt{4x^6y}=2|x^3|\sqrt{y}=-2x^3\sqrt{y}\,(x<0)$；

（4）$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\sqrt{\dfrac{ab}{a^2}}=\dfrac{1}{a}\sqrt{ab}$.

例 2　把下列各式的分母有理化：

（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$；　（2）$\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$；　（3）$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

解：（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2\sqrt{3}+3$；

（2）$\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}=\dfrac{(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\sqrt{ab}}=\dfrac{ab\sqrt{a}+ab\sqrt{b}}{ab}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5-2\sqrt{6}$.

例 3　试比较下列数的大小：

（1）$\sqrt{12}-\sqrt{11}$和$\sqrt{11}-\sqrt{10}$；　（2）$\dfrac{2}{\sqrt{6}+4}$和$2\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

解：（1）$\because\sqrt{12}-\sqrt{11}=\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{11}}{1}=\dfrac{(\sqrt{12}-\sqrt{11})(\sqrt{12}+\sqrt{11})}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$