高职数学

下册

三年制

曾乐辉 主编

电子科技大学出版社

高职数学

下　册

三年制

主　编　曾乐辉　主　审　韩乐文
副主编　徐江涛　郭　思
编　者　(以姓氏笔画为序)
徐江涛　徐　敏　郭　思
梁　静　曾乐辉　燕长轩

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据
高职数学(下册)/曾乐辉主编—成都:电子科技大学出版社,2005.8
ISBN 7-81094-825-3
Ⅰ.高... Ⅱ.曾 Ⅲ.高职数学－高等学校－教材 Ⅳ.O32
中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第074639号

高职数学 三年制
下 册

曾乐辉 主编

出　　版:电子科技大学出版社
（成都建设北路二段四号　邮编:610054)
责任编辑:徐守铭
发　　行:新华书店经销
印　　刷:成都光电印刷厂
开　　本:787×1092　1/16　印张:13.2　字数:327千字
版　　次:2005年8月第一版
印　　次:2005年8月第一次印刷
书　　号:ISBN 7-81094-825-3/O·41
印　　数:8000册
定　　价:19.80元

前　言

教育部高等教育司《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》指出，各类高职高专院校，都要按照教育部制定的高职高专教育基础课程教学基本要求和专业培养规格编写教材。同时，要注意编写适用于不同地区、不同学校、各具特色的系列教材. 根据这一精神，同时根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，针对高职教育既属高等教育层次，又属职业教育类型的特征，我们组织了一批富有高等职业教育教学经验的专家编写了这套《高职数学》上、下册.

本教材的特点是:

1. 较准确地把握了“必需、够用”的尺度

本教材是在对高职工科类和经济类各专业进行了数学工具的需求问卷调查后确定编写内容的. 对于多数专业所必需的函数，一元函数微积分，常微分方程，空间解析几何与向量代数，线性代数，概率统计等内容，是本教材选编的重点. 对于需求量较小，要求较弱的内容，如极限与连续、多元函数微分学、二重积分、级数等，我们进行了适当的精简. 这样供给对准需求，充分体现了高职教育“以服务为宗旨”的指导思想.

2. 强化了数学在实际中的应用

(1) 概念的引入一律从实际问题入手，遵循了从感性到理性的认知规律，同时也是为下一步理论在实际中的应用推出了范例.

(2) 编入了大量有实际应用背景的例题、习题及讨论课题，落实以应用为目的的原则. 其中还选编了经济工作中的边际、弹性、求总量、优化等微积分的应用问题，增加了数学应用的深度和广度.

(3) “数学建模”进一步强化了数学的应用. 除在函数的应用、求最值、线性规划等处穿插了数学建模外，附录中还集中编写了“数学建模简介”，用以提高学生用数学的兴趣和能力.

3. 进一步降低了深奥的数学理论和计算难度

与以往的教材相比,在必学内容中删去了只具理论价值,在实际中用处不大的纯理论.

不少定理省去了严格的理论证明,只给出几何解释或归纳.

由于教材中使用了计算机软件进行数学运算和数值计算,因此必学内容中删减了一些人工运算技巧和繁难的计算.

4. 优化了内容结构

如用拉普拉斯变换与二阶常系数线性微分方程相结合,代替了以往的特征方程法和待定自由项法. 另外还对有的章节进行了合并.

5. 以生为本,分层次教学

考虑到高职生源的多渠道,基础不一致的特点,为了兼顾全体学生的个体差异,我们在调查了生源的入学分数的基础上,进行了聚类分析处理,然后在教材中进行了分层次教学安排. 未打 * 号的内容为必学,打* 号的内容为选学,每章提高篇中的内容供学有余力的优生进一步学习.

6. 数学与计算机软件相结合

教材中几乎每一章都有数学软件 MATLAB 的应用,附录中还集中介绍了 MATLAB 使用基础. 软件的应用减少了计算的难度,运用软件演示,使得数学教学手段更加现代化,教学更加直观和动态.

7. 注重教学互动,改变学生学习方式

以往以罗列知识为表现形式的陈述式教材与注入式的教学相适应. 本教材试图体现教学的启发式,改学生的被动接受为主动参与,因此教材中设置一些"学习活动","研究课题","讨论","观察与思考"等形式生动的栏目,加强了教与学,学与学的交流与互动,让学生通过积极思维,相互启发,发挥主观能动性,提高学习效率.

8. 改革了教材版面的呈现形式

教材中穿插了大量图标、图形和图示,图文并茂. 每章的开头配有标志性的插图和带启发性的引言. 正文的右边留有空白栏,可供编者适时地进行注解,也可供学生学习时批注. 教材版面的人性化使学生易于接受,乐于接受.

编写组成员

上册: 主　编　龙　辉　　主　审　李和逊

副主编　向以华　郑　文

参　编　李坤琼　廖嘉庆　周国清　张　焰

下册: 主　编　曾乐辉　主　审　韩乐文

副主编　徐江涛　郭　思

参　编　梁　静　徐　敏　燕长轩

本书在编写过程中得到了重庆市数学会高职专委会的指导,得到了在渝主要高职院校以及一些举办了高职、高专教育的各级各类学校领导和教师的大力支持和帮助,在此表示诚挚的感谢.

本教材上册基本学时数为 64 学时,下册基本学时数为 66 学时,使用者可根据专业需求适当增删.

本教材可供三年制高职、高专使用,也可供招收初中毕业生的五年制高职选用.

由于本教材具有创新的模式,编写它是一种尝试,且编者水平有限,因此难免有缺点和错误,恳请读者批评指正.

《高职数学》教材编写组

2005 年 4 月

目　录

第 12 章　概率与数理统计

附录

第 8 章

常微分方程

函数是客观事物的内部联系在数量上的反映. 在研究科学技术现象的某一客观规律时,往往需要找出变量之间的函数关系. 因此,如何寻求函数关系,在实践中具有重要意义. 事实上,由于客观世界的复杂性,在很多情况下,直接找到某些函数关系是不太容易的,但有时可以建立函数及其导数之间的关系式,通过这种关系式我们便可以得到所要求的函数. 这就是所谓的微分方程.

微分方程在自然科学、工程技术、生物、经济、物理、地质等领域都有广泛的应用,甚至在考古研究中,都可以一展身手. 法国著名的拉斯考(Lascaux) 岩洞住居坑道是一处著名的史前人类遗址,岩洞中精彩的图画让人叹为观止. 但是,这些图画产生于什么年代? 不同的地质学家存在着较大的争议,直到 1949 年,采用利比(Libby) 发明的碳—14(C^{14}) 年龄测量法,这个问题才得以圆满解决. 这种方法的依据是: 地球周围大气不断受到宇宙射线的轰击,这些宇宙射线使地球的大气中产生中子,这些中子同氮发生作用产生 C^{14}. 因为 C^{14} 会发生放射性蜕变,通常也称之为放射性碳. 这些放射性碳在大气中又结合成二氧化碳,被植物吸收,动物通过摄取植物又把放射性碳带到自体的组织中. 在活的组织中,摄取 C^{14} 的速率正好同已有的 C^{14} 的蜕变速率相平衡,然后组织死亡之后,就停止摄取 C^{14},因此的 C^{14} 的浓度通过已有的 C^{14} 的蜕变而减少. 地球的大气被宇宙射线轰击的速率始终不变,这是一个基本的物理假设. 也就是说,在像木炭这样的样品中,C^{14} 原来蜕变的速率同现在测量出的速率相同,这个假设使我们能够测定木炭样品的年龄. 根据 1950 年测量出的有关数据,对取自拉斯考岩洞住居坑道的木炭进行测定,利用微分方程的知识,可以计算出该坑道住居图画可能产生的年代为公元前 13553 年.

本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常见的微分方程的解法.

8.1 微分方程的概念

下面我们通过两个具体例子来说明微分方程的基本概念.

引例 1 已知曲线过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$,求这条曲线的方程.

解 设所求曲线的方程是 $y=f(x)$. 根据导数的几何意义,可知未知函数 $y=f(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{1}$$

两边积分,得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x$$

即

$$y=x^2+C \tag{2}$$

其中 C 是任意常数. 此外,未知函数还应该满足下列条件

$$\text{当 } x=1 \text{ 时}, y=2 \tag{3}$$

把(3)式代入(2)式,有

$$2=1^1+C$$

由此确定出

$$C=1$$

把 $C=1$ 代入(2)式,即得所求曲线方程

$$y=x^2+1 \tag{4}$$

引例 2 已知自由落体运动的速度方程是 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt$,求自由落体运动的路程 s 与时间 t 的函数关系.

解 由已知

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt \tag{1'}$$

两边积分,得

$$s=\int gt\mathrm{d}t$$

即

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C \tag{2'}$$

其中 C 是任意常数.

此外,根据自由落体运动规律,此方程还应该满足下列条件,当

$$t=0 \text{ 时}, s=0 \tag{3'}$$

把(3′)式代入(2′)式,有

$$0=\frac{1}{2}g\cdot 0^2+C$$

由此确定出 $C=0$

把 $C=0$ 代入(2′)式,即得自由落体运动的位移方程

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{4'}$$

上述两个引例中的(1),(1′)式都含有未知函数的导数,它们都

是微分方程．一般地，含有未知函数的导数或微分的方程叫做**微分方程**．其中，未知函数是一元函数的，叫做**常微分方程**；未知函数是多元函数的，叫做**偏微分方程**．本章只讨论常微分方程．

例如　(a) $y'+x=0$

(b) $xy^2\mathrm{d}x+x^3y\mathrm{d}y=0$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=a$

(d) $xy'''-x^2y''=y^3$

等等，都是微分方程．

微分方程中所出现的未知函数的最高阶的阶数，叫做**微分方程的阶**．例如上述(a)和(b)是一阶微分方程，(c)是二阶微分方程，(d)是三阶微分方程．

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后找出满足微分方程的函数．如果把某一函数代入一个微分方程后，使得该方程成为恒等式，那么这个函数就叫做**微分方程的一个解**．例如两个引例中的(4)，(4′)式分别是微分方程(1)，(1′)式的解．

如果微分方程中含有任意常数，且任意常数相互独立（即它们不能合并而使得任意常数的个数减少）的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的**通解**．例如引例中的(2)，(2′)式就是微分方程(1)，(1′)式的通解．

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性．要完全确定地反映客观事物的规律性，必须确定这些常数的值．不含有任意常数的解，即确定了通解中任意常数的值的解叫做**特解**．例如引例中的函数(4)，(4′)就是微分方程(1)，(1′)的特解．

用来确定微分方程通解中任意常数的条件叫做**初始条件**．例如引例中的(3)，(3′)式就是初始条件．

带有初始条件的微分方程的求解问题叫做初值问题．例如两个引例都是初值问题．

一般地，平面上微分方程的一个解对应于平面上的一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**；通解对应于平面上的无穷多条曲线，称为该方程的**积分曲线族**．

例 1　验证函数
$$s=C_1\cos kt+C_2\sin kt \tag{5}$$
是微分方程
$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+k^2s=0 \tag{6}$$
的解．

证　求所给函数(5)的导数
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_1 \sin kt$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \tag{8}$$

将(5)式和(8)式代入微分方程(6)后成为一个恒等式,即函数(5)是微分方程(6)的解.

例 2 已知函数(5)是微分方程(6)的通解,求满足初始条件 $s|_{t=0} = A, \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ 的解.

解 将 $s|_{t=0} = A, \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ 代入(5)和(7),得

$$C_1 = A, C_2 = 0 \tag{9}$$

将(9)代入(5),得所求的特解为

$$s = A\cos kt$$

例 3 求微分方程 $y''' = \mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解 对 $y''' = \mathrm{e}^{2x}$ 两边积分得

$$y'' = \int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_1$$

再两边积分得

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C_1 x + C_2$$

再次两边积分得

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C_1 x + C_2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_1 x^2 + C_3 \end{aligned}$$

即为原方程的通解.

习题 8.1

1. 说出下列微分方程的阶数.

(1) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$　　(2) $x^2 y'' - xy' + y = 0$

(3) $xy''' + 2y' + x^2 y^5 = 0$　　(4) $(7x - 5y)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y = 0$

2. 判断下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

(1) $xy' = 2y, y = 5x^2$　　(2) $y'' - 2y' + y = 0, y = x^2\mathrm{e}^x$

3. 求下列微分方程的通解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5$　　(2) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \cos x$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$　　　　(4) $\frac{d^2y}{dx^2}=x^2$

4. 求出下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $\frac{dy}{dx}=\sin x, y|_{x=0}=1$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}=6x, y|_{x=0}=0, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=2$

8.2　可分离变量的微分方程

8.2.1　定义

如果一个一阶微分方程能化成 $g(y)dy=f(x)dx$ 的形式,那么原方程叫做**可分离变量的微分方程**.

8.2.2　解可分离变量的微分方程的一般步骤

(1) 分离变量　　$g(y)dy=f(x)dx$

(2) 两边积分　　$\int g(y)dy=\int f(x)dx$

(3) 求积分得通解　　$G(y)=F(x)+C$

其中　　$G'(y)=g(y), F'(x)=f(x)$

(4) 若给出了初始条件,确定 C 的值,求出特解.

例 1　求微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解　此微分方程是可分离变量的. 分离变量得

$$\frac{dy}{y}=2xdx$$

两边积分,得

$$\int\frac{1}{y}dy=\int 2xdx$$

$$\ln|y|=x^2+C_1$$

$$y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}$$

因为 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数,把它记作 C,得方程的通解为

$$y=Ce^{x^2}$$

例 2　求微分方程 $y'=e^{x-y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}$ 的特解.

解　分离变量得

$$e^y dy=e^x dx$$

两边积分得

$$\int e^y dy=\int e^x dx$$

$$e^y = e^x + C$$

将 $y\big|_{x=0}=0$ 代入,得 $C=0$

于是所求微分方程的特解是

$$e^y = e^x, \text{即 } y = x$$

例 3 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素,铀的含量就不断减少,这种现象叫做衰变. 由原子物理学知道,铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0,求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律.

解 铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{dM}{dt}$. 由于铀的衰变速度与其含量成正比,故得微分方程

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M \tag{1}$$

其中,$\lambda(\lambda>0)$ 是常数,叫做衰变系数. λ 前置负号是由于当 t 增加时 M 单调减少,即 $\frac{dM}{dt}<0$ 的缘故.

根据题意,初始条件为: $M\big|_{t=0}=M_0$

方程(1)是可分离变量的. 分离变量后得

$$\frac{dM}{M} = -\lambda dt$$

两边积分,得

$$\int \frac{dM}{M} = \int(-\lambda)\,dt$$

以 $\ln C$ 表示任意常数,考虑到 $M>0$,得到方程的通解

$$\ln M = -\lambda t + \ln C,$$

即
$$M = Ce^{-\lambda t}$$

将初始条件代入上式,得

$$M_0 = Ce^0 = C$$

则方程的特解
$$M = M_0 e^{-\lambda t}$$

这就是所求铀的衰变规律. 由此可见,铀的含量随时间的增加而按指数规律衰减(图 8.1).

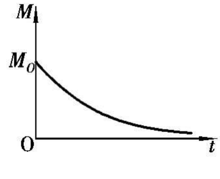

图 8.1

例 4 设降落伞从跳伞塔下落之后,所受空气阻力与速度成正比,并设降落伞离开跳伞塔时 $t=0$ 速度为零. 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v=v(t)$. 降落伞在空中下落时,同时受到重力 P 与阻力 R 的作用(图 8.2). 重力大小为 mg,方向与 v 一致;阻力大小为 kv(k 比例系数),方向与 v 相反. 从而降落伞所受到的外力为

$$F = mg - kv$$

又根据牛顿第二运动定律知

$$F = ma$$

其中 a 为加速度，$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

因此函数 $v = v(t)$ 应满足微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv \qquad (2)$$

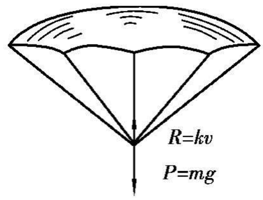

图 8.2

由于方程(2)是可分离变量的，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg - kv} = \frac{\mathrm{d}t}{m}$$

两边积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{mg - kv} = \int \frac{\mathrm{d}t}{m}$$

由于 $mg - kv > 0$，积分得方程(2)的通解为

$$-\frac{1}{k}\ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C_1$$

即 $$mg - kv = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t - kC_1}$$

或 $$v = \frac{mg}{k} + C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

其中，$C = -\frac{\mathrm{e}^{-kC_1}}{k}$.

根据题意，初始条件为 $v\big|_{t=0} = 0$，代入上式，得

$$C = -\frac{mg}{k}$$

于是方程(2)的特解是 $v = \frac{mg}{k}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$

可以看出，随着时间 t 的增大，速度 v 逐渐接近于常数$\frac{mg}{k}$，且不会超过$\frac{mg}{k}$，也就是说，跳伞后开始阶段是加速运动，但以后逐渐接近于等速运动.

例 5　某企业的经营成本 c 随产量 x 增加而增加，其变化率为$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = (2 + x)c$，且固定成本为 5. 求成本函数 $c = c(x)$.

解　$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = (2 + x)c$ 是可分离变量的微分方程，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} = (2 + x)\,\mathrm{d}x$$

两边积分得 $$\int \frac{\mathrm{d}c}{c} = \int (2 + x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\ln c &= 2x+\frac{1}{2}x^2+\ln C_0\\&=\ln e^{2x+\frac{1}{2}x^2}+\ln C_0\\&=\ln C_0 e^{2x+\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

因此微分方程的通解是

$$c=C_0 e^{2x+\frac{1}{2}x^2}$$

将初始条件 $x=0, c=5$ 代入上式，得 $C_0=5$

因此成本函数为 $C=5e^{2x+\frac{1}{2}x^2}$

习题 8.2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $3x^2+5x-5y'=0$　　(2) $y'=\dfrac{\cos x}{3y^2+e^y}$

(3) $xy'=y\ln y$　　(4) $y'=10^{x+y}$

2. 求微分方程满足已给初始条件的特解.

(1) $\sin y\cos x\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x, y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$

(2) $y'=e^{2x-y}, y|_{x=0}=0$

3. 一曲线上动点的坐标(x,y)满足方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2xy}{h}=0$，其中 h 为已知常量. 并且曲线经过点$(0,a)$，求此曲线的方程.

4. 快艇以匀速 $v_0=5\mathrm{m/s}$ 在静水中前进，当停止发动机后 5s 速度减少到 3m/s，已知阻力与速度成正比，试求船速随时间的变化规律.

5. 镭的衰变有如下规律：镭的衰变的速度与它的现有量 R 成正比，由实验材料得知，镭 1600 年后只有原始量 R_0 的一半，求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

6. 某企业的边际成本 $c'(x)=(x+x^2)c$，且固定成本为 10 元，求成本函数 $c(x)$.

7. 已知储存在仓库中汽油的加仑数 y 与支付仓库管理费 x 之间满足关系：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ax+b$（其中 a,b 为常数），且知当 $x=0$ 时 $y=y_0$，试求 y 与 x 之间的函数关系.

8.3　一阶线性微分方程

8.3.1　一阶线性微分方程的定义

方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$
叫做**一阶线性微分方程**．其中，$P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是 x 的连续函数．

例如： (a) $3y'+2y=x^2$

(b) $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\sin x$

(c) $y'+y\sin x=0$

(d) $y'-y^2=0$

(e) $yy'+y=\sin x$

(f) $y'-\sin y=0$

上述方程中，(a)，(b)，(c) 都是一阶线性微分方程，(d)，(e)，(f) 都不是一阶线性微分方程．

8.3.2　一阶线性微分方程的分类

1. 一阶齐次线性微分方程

当 $Q(x)=0$ 时，方程(1) 变成
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{2}$$
方程(2) 称为**一阶齐次线性微分方程**．上面的方程中(c) 就是一阶齐次线性微分方程．

2. 一阶非齐次线性微分方程

当 $Q(x)\neq0$ 时，方程(1) 称为一阶非齐次线性微分方程．上面的方程中(a) 和(b) 就是**一阶非齐次线性微分方程**．

8.3.3　一阶线性微分方程的解法

1. 一阶齐次线性微分方程的解法

因为一阶齐次线性微分方程(即方程(2)) 是可分离变量的微分方程，分离变量后得
$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\,\mathrm{d}x$$
两边积分得
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\,\mathrm{d}x$$