

普通高等院校规划教材

# 趣味数学

杨 明 彭康清 主 编

西南交通大学出版社

· 成 都 ·



## 前 言

游戏是指运用知识的大众化智力娱乐活动. 数学游戏寓数学问题于游戏之中, 使人们能够在做游戏的同时潜移默化地学到数学的知识、思想和方法. 因此, 凡是蕴含着数学原理, 并在娱乐和消遣过程中运用数学知识或方法的智力游戏均可归结为数学游戏.

数学游戏是一种寓教于乐的休闲娱乐活动, 是人们在没有负担、没有外界压力和评判标准的情况下, 做使自己精神愉快的并探究问题答案的学习活动. 而数学游戏的产生, 通常是由数学家加工并构造出来, 或者是把精深的数学理论以轻松活泼的形式表现出来, 以增强大众的可接受性和可理解性; 或者是流传于民间的智力游戏经数学家的加工, 揭示出其一定的数学内涵.

近年来, 有教育取向的数学教育的教育价值得到了学界的普遍认同, 并且在数学教学实践中得到了广泛应用, 同时也产生了一些有研究价值的问题. 譬如, 探讨数学游戏对于激发学生数学学习兴趣的作用、开发数学游戏作为数学教学中创设数学问题情境的资源、开展对数学游戏教学设计的理论与实践研究, 等等. 通过对这





些问题的研究，无疑将对数学教育教学实践产生重大影响，对现今数学课程改革也具有重大的理论和实践意义。这是因为：

第一，数学游戏具有趣味性。

比如，初中数学中的“镶嵌问题”游戏就是用形状相同或者不同的正多边形来镶嵌一个平面，学生可以用六个三角形或者四个正方形来镶嵌一个平面，操作很简单；也可以用多个正多边形或者多种正多边形组合在一起进行镶嵌；还可以用任意三角形、平行四边形、构造五边形等进行镶嵌，变化很多，可以创造出样式不同的图案，充满了乐趣。

第二，数学游戏能激发学生的好奇心。

例如，在“用字母代表数”一课的教学中，教师可以用“猜年龄”的游戏来激发学生学习的兴趣。在游戏前教师先公布游戏规则：让学生先在心里想一个数字（最好不超过 100），然后进行一系列的运算：把你的年龄乘以 2，加上 5，把所得之数再乘以 50，加上你心里想好的数，再减去一年（平年）的天数，然后把最后的答数告诉我。教师根据学生说出的数字能马上准确地猜中学生的年龄和学生心里所想的数。当学生们看到教师一一猜中他们的年龄之后，都很惊讶，急切地想知道其中的奥秘，这样就成功地引导学生投入到学习活动中。尝试将数学游戏引入到数学的课堂教学中，让学生感受到数学是“好玩”的，从而达到愿意学数学、喜欢学数学的目的。

第三，数学游戏能让学生愉快地学习。

通过游戏能够让学生体会数学的趣味性，能够使学生从中感受到数学带给他们的快乐，这是一种集知识性、趣味性和娱乐性为一体的好的学习方式，也是学生普遍比较喜欢的一种方式。

第四，数学游戏能培养学生的创造性。

数学游戏能给人带来异乎寻常的智力上的挑战。许多游戏看似简单，但用常规方法解决却需要耗费大量的精力，此时若能打开思路，有了打破常规的灵机一动，从另一个角度去考虑，就可能事半功倍，得到一种简洁而优美的解法。如哥尼斯堡七桥问题、四色问题、菲波那契数列、邮递员问题，等等，都是人们耳熟能





详的数学游戏，对这些问题的研究开创了数学研究的新的分支方向，激发了许多重要数学思想的产生。也就是说，数学游戏不但可以促进数学知识的传播，还可以促进人们对数学的研究，对于培养学生的创造性思维起着不可低估的作用。

第五，数学游戏具有交互性和生成性。

数学游戏一般需要两人甚至多人共同完成，通过互动能加深同学之间的相互了解，增进了友谊，甚至还有可能成为一生的好朋友；在游戏过程中，其操作步骤通过不断地优化，有可能进一步抽象为数学方法，进而内化为解决同类数学问题的程序性知识与策略性知识。

出于对数学游戏探究的兴趣，通过十余年来不断的搜集和整理，目前已遴选和积累了 180 多个数学游戏，在此向这些作者表示衷心的感谢。为了将其进行科学的分类和系统化，探究其在教学中使用的可行性和有效性，在 2008 年面向天水师范学院数学系的学生开设了数学游戏与欣赏选修课。经过几年的教学实践，证明将数学游戏引入到数学课堂教学中是有意义和可行的。首先，对遴选的数学游戏进行分析，重点探讨数学解答和生活智慧如何实现对接；探讨学生的学习兴趣、好奇心和创造性是如何被激发的；探讨学生的动手探索、合作交流等有效学习活动是如何展开的。其次，在课堂上展开实验研究，认真总结每一节课，观察学生在课堂上的反应，收集学生的反馈意见，并和学生一起尝试设计数学游戏。

本书以与数学学科课程相关为标准的划分方法，将内容整理为七章：

第一章，算术问题。包括猜数、24 点、遗产分割、5 猴分桃、黄金分割等。

第二章，数论问题。包括与二进制有关的尼姆问题，与三进制有关的找次品、砝码问题、翻杯游戏，与同余有关的约瑟夫斯问题等。

第三章，几何问题。包括种树问题、图形的分割与剪拼、棋盘覆盖、平面镶嵌、猫捉老鼠、火柴问题等。





第四章，运筹问题。包括过河问题、关羽放曹、调车游戏、走马换将等。

第五章，逻辑推理问题。包括逻辑推理、集合运算推理、计算推理、概率推理等。

第六章，拓扑问题。包括捏橡皮泥、毛线衫翻面、双人脱困游戏等。

第七章，包括概率、悖论、魔方、幻方等问题。

本书可作为高等院校文理科各专业数学公共选修课教材使用。也可作为中小学数学教师的参考书。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点和错误，希望读者提出批评指正。

编者

2015年10月





## 目 录

第 1 章 代数问题 .....	001
1.1 4 个 4 .....	001
1.2 24 点 .....	002
1.3 火柴游戏 .....	002
1.4 速 算 .....	003
1.5 算式复原 .....	004
1.6 巧译密码 .....	006
1.7 猜生日 .....	007
1.8 猜年龄 .....	008
1.9 巧猜年龄与口袋里的钱 .....	009
1.10 背后长着眼睛 .....	010
1.11 奇妙的 89 .....	011
1.12 乱指钟面猜数 .....	014
1.13 最后剩下谁 .....	015
1.14 不能减就算输 .....	015
1.15 遗产分割 .....	016





1.16	小姑娘排队	018
1.17	哪些灯是关着的	019
1.18	一面喝酒一面漏	020
1.19	5猴分桃	021
1.20	帕费姆夫人抽烟	022
1.21	有多少客人	022
1.22	不走运的管理员	022
1.23	分割问题	023
1.24	黄金分割	028
1.25	上楼	033
<b>第 2 章 数论问题</b>		<b>034</b>
2.1	尼姆游戏	034
2.2	一圈硬币	036
2.3	取火柴游戏	036
2.4	吃糖果游戏	037
2.5	猜数	037
2.6	猜生日	040
2.7	找次品	042
2.8	只称一次	049
2.9	砝码问题	051
2.10	翻转问题	054
2.11	翻杯游戏	056
2.12	配对问题	060
2.13	约瑟夫斯问题	064
2.14	扑克牌表演	071
2.15	乒乓球赛	074
2.16	平分问题	074
<b>第 3 章 几何问题</b>		<b>077</b>
3.1	种树问题	077
3.2	八后问题	080



3.3	母鸡下蛋	081
3.4	足 球	082
3.5	一半在圆内，一半在圆外	083
3.6	兄弟分家	084
3.7	切蛋糕	085
3.8	拿破仑分地	086
3.9	巧分图形	087
3.10	五个剪拼成一个	088
3.11	五块“四小方”	088
3.12	棋盘覆盖问题	090
3.13	巧算枫叶面积	090
3.14	平面镶嵌	092
3.15	铺砖难题	096
3.16	修女问题	097
3.17	四只蜘蛛	098
3.18	寻找真理的蟑螂	100
3.19	回到起点	101
3.20	逃脱的兔子	101
3.21	猫捉老鼠	102
3.22	狐狸和鹅	103
3.23	漆上颜色的立方体	105
3.24	火柴问题	105
<b>第 4 章 运筹问题</b>		<b>106</b>
4.1	过河问题	106
4.2	亲疏问题	107
4.3	17 位科学家	108
4.4	六位音乐家	108
4.5	关羽放曹	109
4.6	幸运的“7”	111
4.7	独立钻石棋	112







4.8	十五棋子排列问题	113
4.9	走马换将	114
4.10	不和睦的邻居	115
4.11	调车游戏	116
<b>第 5 章 逻辑推理问题</b>		<b>123</b>
5.1	奎伯的另一杯子问题	123
5.2	开关与灯	123
5.3	男孩没时间上学	124
5.4	真假难辨	125
5.5	两个部落	125
5.6	真真假假，时真时假	126
5.7	帽子的颜色	127
5.8	白帽子和黑帽子	128
5.9	三条领带	129
5.10	聪明的服务员	129
5.11	葫芦里卖的什么药	130
5.12	选购宝石与满足问题	131
5.13	比赛几场	131
5.14	阿里巴巴和 40 大盗	132
5.15	海盗的难题	133
5.16	病狗问题	136
5.17	骰子面的方位	137
5.18	评定分数	139
5.19	英俊舞伴	140
5.20	招侦察员	140
5.21	发生在海边的案件	141
5.22	死刑犯	141
5.23	九死一生	141
<b>第 6 章 拓扑变换问题</b>		<b>143</b>
6.1	毛线衫翻面	143



6.2 捏橡皮泥 .....	144
6.3 两物分离游戏 .....	145
6.4 你能打一个结吗 .....	146
6.5 双人脱困游戏 .....	146
6.6 硬币能穿过小洞吗 .....	147
6.7 位置移动 .....	148
<b>第 7 章 其他问题 .....</b>	<b>149</b>
7.1 蒙特·霍尔问题 .....	149
7.2 连胜两局 .....	150
7.3 三只猫 .....	151
7.4 悖 论 .....	152
7.5 幻 方 .....	153
7.6 魔 方 .....	158
<b>参考文献 .....</b>	<b>162</b>



## 第1章 代数问题

### 1.1 4个4

用4个4和 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 四种运算符号，列出一个算式，得出1到10的结果。

**解** 对于1到10的结果，我们仅各举一例：

$$\frac{44}{44}=1, \quad \frac{4}{4}+\frac{4}{4}=2, \quad \frac{4+4+4}{4}=3, \quad 4\times(4-4)+4=4,$$

$$\frac{4\times 4+4}{4}=5, \quad 4+\frac{4+4}{4}=6, \quad 4+4-\frac{4}{4}=7,$$

$$4+4+4-4=8, \quad 4+4+\frac{4}{4}=9, \quad \frac{44-4}{4}=10.$$

如果再添上平方根符号、小数点符号、阶乘符号等，可得出11至20的结果。

$$\frac{4}{4}+\frac{4}{0.4}=11, \quad 4\times\left(4-\frac{4}{4}\right)=12, \quad \frac{44}{4}+\sqrt{4}=13, \quad 4\times 4-\frac{4}{\sqrt{4}}=14,$$





$$\begin{aligned} \frac{44}{4} + 4 &= 15, \quad (4 \times 4) - \frac{4}{4} = 15, \quad (4 \times 4) + 4 - 4 = 16, \\ 4 \times \sqrt{4} + 4 \times \sqrt{4} &= 16, \quad 4 \times 4 + \frac{4}{4} = 17, \quad 4 \times 4 + \frac{4}{\sqrt{4}} = 18, \\ \frac{4+4-0.4}{0.4} &= 19, \quad \frac{\frac{4!}{\sqrt{4}} + \sqrt{0.4}}{\sqrt{0.4}} = 19, \quad 4! - \frac{\sqrt{4}}{0.4} = 19, \\ 4! - 4 - \frac{4}{4} &= 19, \quad 4 \times \left( 4 + \frac{4}{4} \right) = 20. \end{aligned}$$

大于 20 的数的表示，我们仅举几例。

$$\frac{4! + 4.4}{0.4} = 71, \quad \frac{\sqrt[4]{4} + 0.4}{0.4} = 73, \quad \frac{4!}{0.4 + \sqrt{0.4}} = 85, \quad \frac{4! + \sqrt{4}}{0.4} + 4! = 89.$$

请问还有哪些数可以用 4 个 4 来表示呢？

## 1.2 24 点

从一副扑克牌（去掉大小王）中任意抽取 4 张扑克，运用数学运算符号列出一个算式，得出结果 24。

**解** 这里仅举几例：

$$(1+1+1+1)!, \quad 1 \times 12 \times \sqrt{\frac{8}{2}}, \quad 11+11+\sqrt{12-8}, \quad 4 \times \left( 5 + \frac{9}{9} \right).$$

## 1.3 火柴游戏

### 1.3.1 火柴移动

要求只动一根火柴，使答案变成 130，你能做到吗？

$$| + | = ||$$



解

$$|4| - ||$$

### 1.3.2 火柴添加

有两根火柴，组成一个数字  $||$ ，请你再添加两根火柴，使它变成 1.

解

$$1 \times 1, \sqrt{1}, |-1|, |1|, 1=1, +1, \frac{1}{1}.$$

### 1.3.3 拆图形

用 12 根火柴可以摆成上下两边各有 5 根火柴的长方形. 现在, 请你把这个长方形拆开并摆成纵横各三列, 每列都有 4 根火柴, 怎样摆?

**解** 把火柴摆成三行三列, 每个位置 1 根火柴, 还剩下 3 根, 将这 3 根火柴分别放在不同行且不同列上就行了.

## 1.4 速 算

### 1.4.1 计算 40 与 60 之间的平方数

要计算 40 与 60 之间的数  $y$  的平方, 可以用 25 加上超过 50 的“过剩数”或减去不足 50 的“亏损数”, 并在此结果的后面串联上过剩数或亏损数的平方. 用公式表示为:

$$(50 \pm x)^2 = (25 \pm x) \times 100 + x^2.$$

例如, 对  $54^2$  而言,  $54 - 50 = 4$ , 此过剩数是 4, 加上 25 以后得出 29, 再在其后面加上 4 的平方 16, 于是马上得出 2916, 它就是 54 的平方.





类似地，再求 57 的平方，此时有  $25+7=32$ ，而  $7^2=49$ ，从而立即得出 3249.

### 1.4.2 速算

请大家随便挑出两个自然数，再把这两数相加，得出第 3 个数；再将第 2 个数与第 3 个数相加，得出第 4 个数；依此类推，直到得出第 10 个数为止. 当然这 10 个数是必须公开亮相的，以防作弊. 最后，把这 10 个数统统相加，求出它们的和. 刚说完，有位同学就问：“开头的两个数，有什么限制条件吗？”我说：“没有别的限制，只要求它们是自然数.”他说：“好极了，既然如此，今天正好是 11 月 15 日，我就用 11 与 15 来试一试.”接着，他迅速地写出一排数字：

$$11+15+26+41+67+108+175+283+458+741=?$$

**解** 把第 7 个数乘以 11，结果为 1925.

一般地，设前两个数为  $a, b$ ，由上述方法得出的数列的前 10 项和为：

$$\begin{aligned}& a+b+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)+(5a+8b)+ \\& (8a+13b)+(13a+21b)+(21a+34b) \\& =11 \times (5a+8b).\end{aligned}$$

### 1.5 算式复原

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad * . * * * \\ ** \overline{) * * * * } \\ \quad \quad \quad * * \\ \quad \quad \quad \underline{* *} \\ \quad \quad \quad \quad * * \\ \quad \quad \quad \quad \underline{* *} \\ \quad \quad \quad \quad \quad * * \\ \quad \quad \quad \quad \quad \underline{* *} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad * * \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{* * *} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad * * * \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{* * *} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \end{array}$$





上面这个除法算式中数字已经完全湮灭，一点儿也不能辨认，不过还剩下草式的格局和模样，你能将它复原吗？

**解** 首先，两个整数相除而能除尽，并且商数正好有三位小数，除数必然是8或8的倍数。又由于被除数是三位整数，而商的第一位与除数相乘后又得出了两位数，根据除法算式前三行的情况可以推出，当被除数与除数分别为100和32时，“复原”后的算式为：

$$\begin{array}{r}
 3.125 \\
 \hline
 32 \overline{)100} \\
 \underline{96} \\
 40 \\
 \underline{32} \\
 80 \\
 \underline{64} \\
 160 \\
 \underline{160} \\
 \hline
 \text{—}
 \end{array}$$

需要说明的是，该题为多解题，共有79个解。如：

$$114 \div 16 = 7.125, \quad 876 \div 96 = 9.125,$$

等等。

如果把题目改成商有四位小数的情况，如：

$$\begin{array}{r}
 6.3125 \\
 \hline
 16 \overline{)101} \\
 \underline{96} \\
 50 \\
 \underline{48} \\
 20 \\
 \underline{16} \\
 40 \\
 \underline{32} \\
 80 \\
 \underline{80} \\
 \hline
 \text{—}
 \end{array}$$





共能找出多少个解？

## 1.6 巧译密码

试译出密码：

$$\begin{array}{r}
 THE \\
 EARTH \quad (\text{地球}) \\
 VENUS \quad (\text{金星}) \\
 SATURN \quad (\text{土星}) \\
 + URANUS \quad (\text{天王星}) \\
 \hline
 NEPTUNE \quad (\text{海王星})
 \end{array}$$

上面每个字母均代表一个数字.

解 列方程：

$$\begin{cases}
 E + H + 2S + N = E + 10m_1 & (1) \\
 H + T + 2U + R + m_1 = N + 10m_2 & (2) \\
 T + R + 2N + U + m_2 = U + 10m_3 & (3) \\
 2A + E + T + m_3 = T + 10m_4 & (4) \\
 E + V + A + R + m_4 = P + 10m_5 & (5) \\
 S + U + m_5 = E + 10N & (6)
 \end{cases}$$

显然  $N=1$ . 因为设  $N=2$  或  $0$  将得出矛盾.

由 (1) 式得：

$$H + 2S = 9 + 10(m_1 - 1), \quad (7)$$

故  $H=5$ ,  $S=7$ ,  $m_1=2$ , 因为其他数对  $(H, S)$  都将得出矛盾.

由 (2) 式得：

$$2U + T + R = 4 + 10(m_2 - 1), \quad (8)$$

从而  $m_2=2$ .

由 (3) 式得：

$$T + R = 6 + 10(m_3 - 1), \quad (9)$$





由(8)、(9)式得:

$$U=4, m_3=1, T+R=6, \quad (10)$$

即  $T, R=6, 0$ . 不过次序还不能肯定, 因为剩下未被利用的数字还有 2, 3, 8, 9.

由(4)式得:

$$2A+E=9+10(m_4-1), \quad (11)$$

所以  $A=8, E=3, m_4=2$ .

由(5)式得:

$$V+R=P+7+10(m_5-2), \quad (12)$$

其中  $m_5=2, R=0, 6$ , 而  $P, V=2, 9$ , 次序可能不定. 但是, 在(11)、(12)式中, 只有当  $P=2, V=9, R=0, T=6$  时才成立, 因此, 密码可以译成:

$$\begin{array}{r} 653 \\ 38065 \\ 93147 \\ 786401 \\ + 408147 \\ \hline 1326413 \end{array}$$

## 1.7 猜生日

用  $Y$  表示年,  $M$  表示月,  $D$  表示日, 并请同学们计算下面  $N$  的值:

$$N=612Y+37M+18D.$$

然后把结果告诉老师, 老师就能知道他或她是哪年哪月哪日生的.

解法如下:

把七位数  $N$  的各位数字相加, 直到得出一个一位数  $A$  为止. 如果  $N$  与  $A$  同为奇数或同为偶数,  $A$  就等于月份  $M$ ; 如果  $N$  与  $A$  一奇