

大學叢書

統計學

下冊

陳超塵編著

臺灣商務印書館發行

統 計 學

下 冊

目 次

第十四章 機率與常態分配

一、機率·····	381
二、希望數與變異數·····	388
三、超幾何分配·····	393
四、二項分配·····	399
五、常態分配·····	408
六、常態分配之應用·····	420
七、波爾生分配·····	429
八、理論分配之性質與功用·····	436
問題 1-4·····	439
本章摘要·····	441

第十五章 樣本統計量分配

一、樣本統計量分配之意義及其由來·····	445
二、樣本平均數分配·····	448
三、 χ^2 分配·····	453
四、 F 分配·····	463

五、 t 分配	469
六、相關係數 r 之分配	474
七、比率分配	477
八、其他樣本統計量分配	481
九、樣本統計量分配總論	487
問題十五	492
本章摘要	493

第十六章 統計推定

一、統計推定之意義及其方法之種類	499
二、點推定法——最適法	501
三、優良點推定值所應具備之條件	509
四、區間推定之原理與步驟	514
五、母羣體算術平均數之區間推定	520
六、母羣體變異數之區間推定	528
七、母羣體相關係數之區間推定	531
八、母羣體迴歸直線之區間推定	533
九、母羣體比率之區間推定	540
十、區間推定總論	545
問題十六	546
本章摘要	547

第十七章 統計假設之檢定

一、統計檢定之意義及其特性	553
二、一母羣體平均數假設之檢定	564
三、兩母羣體平均數差假設之檢定	568

四、母羣體變異數假設之檢定	574
五、母羣體相關係數假設之檢定	579
六、母羣體相關比及複相關係數假設之檢定	586
七、母羣體迴歸直線假設之檢定	589
八、母羣體比率假設之檢定	599
九、計數資料之檢定問題	611
十、統計檢定總論	622
問題十七	625
本章摘要	627

第十八章 逐次分析法

一、逐次分析法之意義與原理	638
二、母羣體平均數假設檢定之逐次分析	641
三、母羣體比率假設檢定之逐次分析	644
問題十八	649
本章摘要	650

第十九章 變異數與互變數分析

一、變異數分析之意義與原理	651
二、一因子變異數分析法	660
三、集區設計與拉丁方格設計	662
四、二因子變異數分析法	675
五、三因子變異數分析法	682
六、互變數分析法	695
七、變異數與互變數分析總論	702
問題十九	705

本章摘要·····	708
-----------	-----

第二十章 品質管制

一、品質管制之意義與功用·····	711
二、品質管制圖·····	714
三、平均數與全距管制圖·····	720
四、平均數與標準差管制圖·····	725
五、不良率與不良數管制圖·····	731
六、缺點數管制圖·····	734
問題二十·····	736
本章摘要·····	738

第二十一章 無母數統計方法

一、無母數統計方法之意義與特質·····	741
二、容受限界之推定方法·····	743
三、符號檢定法·····	745
四、中位數檢定法·····	749
五、 U 檢定法·····	753
六、連檢定法·····	755
七、序列相關檢定法·····	759
問題二十一·····	763
本章摘要·····	765

第二十二章 抽樣調查方法

一、抽樣調查之功用與種類·····	769
二、立意抽樣法·····	771

三、單純隨機抽樣法	772
四、分層比例抽樣法	787
五、牛曼及談明分層抽樣法	794
六、部落抽樣法	800
七、兩段抽樣法	807
八、單純系統抽樣法	814
九、抽樣方法總論	817
問題二十二	822
本章摘要	824

附 表

一、二項分配機率表	831
二、波爾生分配機率表	832
三、標準常態分配數值表	833
四、 χ^2 分配數值表	836
五、 F 分配數值表	837
六、 t 分配數值表	841
七、 r 與 z 變換表	842
八、品質管制圖因子數值表	843
九、隨機亂數表	844
十、常用對數表	850
十一、平方、平方根及倒數表	852

主要參考書目錄	863
---------	-----

索 引	865
-----	-----

第十四章 機率與常態分配 (Probability and Normal Distribution)

一、機 率

前在第一章說明統計學術發展史時，即已提及近代統計學（即抽樣統計學）係建立於機率論之基礎上，故在討論各種抽樣統計方法之前，應先說明機率之意義與性質。

14-1 機率之定義——出現事象 A 之機率為出現事象 A 之次數與出現各種事象(Event)總次數之比。其定義式如下：

$$P(A) = \frac{r}{n} \dots\dots\dots \text{(公式 1)}$$

式中 $P(A)$ 代表出現事象 A 之機率。

例如擲骰子一粒，其出現奇數點之機率為何？一粒骰子有六面，有六種不同的點數，故出現各種事象之總次數為 6，亦即 $n=6$ 。在六種不同的點數中，有三種點數，即 1, 3 及 5 為奇數點，故出現奇數點即事象 A 之次數為 3，亦即 $r=3$ 。故擲一粒骰子其出現奇數點之機率為：

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

14-2 機率之基本性質——有下列四種：

(1) 倘一事象 A 必定出現，其機率為 1，即

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

例一袋內有黑球五個，任抽一球其為黑色之機率為何？五個球中每一球皆可能被抽，故有五種抽法，亦即總次數 $n=5$ 。五球皆為黑色，均屬於事象 A ，故 $r=5$ 。因此任抽一球為黑色之機率為：

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{5}{5} = 1$$

(2) 倘一事象 A 必不能出現，其機率為 0，即

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

例如在前袋中，任抽一球為白色之機率為何？因袋中無白球，各球均不屬於事象 A ，故 $r=0$ ，因此任抽一球為白色之機率為：

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{0}{5} = 0$$

(3) 故知機率之所在範圍為：

$$0 \leq P \leq 1$$

(4) 發生 A 之機率與發生非 A 之機率之和為 1。發生非 A 之機率為：

$$P(\bar{A}) = \frac{n-r}{n}$$

式中 $\bar{A}$ 代表事象非 A 。

$$\text{故 } P(A) + P(\bar{A}) = \frac{r}{n} + \frac{n-r}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

普通稱發生 A 之機率為成功的機率，以 p 表示之。發生非 A 之機率為失敗的機率，以 q 表示之。故上述關係式亦可寫成下列形式：

$$p + q = 1 \dots\dots\dots (\text{公式 } 2)$$

例如擲骰子一粒，出現奇數點之機率與出現偶數點之機率之和為

1。假定奇數點為事象 A ，偶數點為非 A ，則

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A) + P(\bar{A}) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

14-3 先天機率與經驗機率 (Priori probability and empirical probability)——先天機率即根據事物本性推理而得之機率。譬如一枚銅元有正反兩面，其出現正面之機率，不待實驗即可推知其為 $\frac{1}{2}$ 。所謂經驗機率即根據實際現象歸納衆多次數而得之機率。例如某縣某年內共出生嬰兒 6437 人，其中男嬰為 3275 人，故該縣男嬰出生之機率為：

$$P = \frac{3275}{6437} = 0.51$$

此種機率即為經驗的機率。反之如根據生物學之知識推斷，出生男嬰之機率應與女嬰相等，即各為 $\frac{1}{2}$ ，則此種機率為先天的機率。

當觀察次數十分衆多時，經驗的機率已非常接近於先天的機率，而觀察次數愈多，則愈接近於先天的機率，此一原理在統計學上稱之為大數法則。根據此原理在先天機率無法推知的情況下，可以依衆多次數歸納而得之經驗機率，以代替先天機率而從事種種研究分析，此種情形在社會現象研究上尤所常見。

14-4 事象之種類——可分為下列兩大類：

(1) 互斥事象與非互斥事象——倘一事象出現後他事象即不能出現時，則此類事象稱之為互斥事象 (Mutually exclusive events)。例如擲骰子一粒，出現一點後其他各點即不能出現，故知骰子各面的出現為互斥事象。倘一事象出現後他事象亦能同時出現時，則此類事象

稱之爲非互斥事象。例如在一副橋牌中，出現黑桃是一種事象，出現老 K 是另一種事象，該兩事象可以同時出現，即一張牌是黑桃老 K ，故黑桃與老 K 爲非互斥事象。

(2) 獨立事象與從屬事象——倘一種事象出現後不影響他一事象出現之機率時，則該兩事象稱之爲獨立事象(Independent events)。例如一袋內有白球兩個、黑球三個，抽取一球爲白色之機率爲 $P = \frac{2}{5}$ ，此爲第一事象。今將抽出之白球仍投返袋內，再抽一球仍爲白色之機率亦仍爲 $P = \frac{2}{5}$ ，此爲第二事象。第一事象出現後，因其將抽出之球仍投返袋內，故並不影響第二事象出現之機率，因此該兩事象爲獨立事象。倘一事象出現後影響他一事象出現之機率時，則該兩事象稱之爲從屬事象(Dependent events)。上例中倘第一次抽出之白球不投返袋內，則第二次抽取一球爲白色之機率改爲 $P = \frac{1}{4}$ ，而非 $\frac{2}{5}$ ，故知第一事象之出現影響第二事象出現之機率，因此該兩事象爲從屬事象。

此間有一點值得注意者，即互斥事象與非互斥事象均發生於簡單事件中，而獨立事象與從屬事象均發生於複雜事件中。所謂簡單事件即一個個體試行一次之事件，例如一粒骰子擲一次即爲簡單事件。所謂複雜事件即一個個體試行數次或數個個體試行一次之事件，例如一粒骰子連擲兩次或兩粒骰子擲一次均爲複雜事件。計算簡單事件與複雜事件發生之機率所用之定理不同，此將在下兩節中說明之。

14-5 機率之加法定理——用以計算簡單事件發生之機率，其公式因事象互斥與否而略有差異，茲分別說明如下：

(1) 互斥事象——倘兩事象 A 與 B 爲互斥事象，則在同一次試行中發生 A 或 B 之機率爲該兩事象分別發生機率之和，即

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \dots\dots\dots(\text{公式 3})$$

式中 $P(A+B)$ 代表出現事象 A 或事象 B 之機率。例如擲一粒骰子，出現一點或兩點之機率為何？假定出現一點為事象 A ，出現兩點為事象 B ，骰子出現一點後，即不能出現兩點，故知該兩事象為互斥事象，因此擲一粒骰子出現一點或兩點之機率為出現一點之機率與出現兩點之機率之和，即

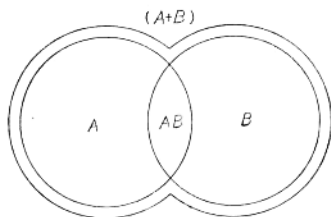
$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

(2) 非互斥事象——倘兩事象 A 與 B 為非互斥事象，則在同一次試行中發生 A 或 B 之機率為該兩事象分別發生機率之和，減去該兩事象同時發生之機率，即

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \dots\dots\dots (\text{公式 4})$$

式中 $P(AB)$ 代表 A, B 兩事象同時發生之機率。

圖 14-1 機率之和或積的圖解說明



由上圖知， $P(A)$ 相當於 A 圓之面積， $P(B)$ 相當於 B 圓之面積， $P(AB)$ 相當於 AB 重合部份之面積， $P(A+B)$ 相當於 A 及 B 所覆蓋之總面積。故知 $P(A+B)$ 之面積為 $P(A)$ 及 $P(B)$ 兩面積之和，減去一個 $P(AB)$ 之面積，因 $P(AB)$ 在 $P(A)$ 及 $P(B)$ 中重複計算兩次，故應減去一個。

例如在一副橋牌中任抽一張為黑桃或老 K 之機率為何？假定出現黑桃為事象 A ，出現老 K 為事象 B ，則任抽一張為黑桃或老 K 之機

率爲出現黑桃之機率與出現老 K 之機率之和，減去黑桃與老 K 同時出現之機率，即

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} \end{aligned}$$

14-6 機率之乘法定理——用以計算複雜事件發生之機率，其公式因事象獨立與否而略有差異，茲分別說明如下：

(1) 獨立事象——倘兩事象 A 與 B 爲獨立事象，則在兩次試行中， A 與 B 同時發生之機率爲發生 A 之機率與發生 B 之機率之相乘積，即

$$P(AB) = P(A)P(B) \dots\dots\dots (公式 5)$$

例如擲銅元兩枚，同時出現正面之機率爲何？假定第一枚銅元出現正面爲事象 A ，第二枚銅元出現正面爲事象 B ，第一枚銅元出現正面不影響第二枚銅元出現正面，故知該兩事象爲獨立事象。因此擲兩枚銅元，同時出現正面之機率爲第一枚銅元出現正面之機率乘上第二枚銅元出現正面之機率之積，即

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(2) 從屬事象——倘兩事象 A 與 B 爲從屬事象，則在兩次試行中， A 與 B 同時發生之機率爲發生 A 之機率與發生 A 後再發生 B 之機率之相乘積，或爲發生 B 之機率與發生 B 後再發生 A 之機率之相乘積，即

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B|A) \\ &= P(B)P(A|B) \dots\dots\dots (公式 6) \end{aligned}$$

式中 $P(B|A)$ 代表發生事象 A 後再發生事象 B 之機率， $P(A|B)$

代表發生事象 B 後再發生事象 A 之機率。

例如一袋內有白球兩個、黑球三個，抽取兩球同為白色之機率為何？兩球同時抽取，事實上即等於抽取第一球後，不予投返，再抽第二球。假定第一球為白色時為事象 A ，第二球為白色時為事象 B ，第一球抽出後不再投返，影響第二球出現之機率，故知該兩事象為從屬事象。第一球為白色之機率為 $P(A) = \frac{2}{5}$ ，抽取一個白球後，不予投返，故袋內僅餘一個白球及三個黑球，因此抽取第二球仍為白色之機率改為 $P(B|A) = \frac{1}{4}$ ，故抽取兩球同為白色之機率為：

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

14-7 解決機率問題之步驟——綜合以上所述，吾人可歸納出下列兩個解決機率問題之步驟：

第一步：先檢查該機率問題係屬於簡單事件抑屬於複雜事件，如為簡單事件用加法定理，如為複雜事件用乘法定理。

第二步：決定用加法定理或乘法定理後，在加法定理方面，再檢查該一簡單事件係屬於互斥事象抑屬於非互斥事象，如為互斥事象用公式 3，如為非互斥事象用公式 4。在乘法定理方面，再檢查該一複雜事件係屬於獨立事象抑屬於從屬事象，如為獨立事象用公式 5，如為從屬事象用公式 6。

事實上多數機率問題常分為兩個階段，其第一個階段多屬於複雜事件，應用乘法定理；其第二個階段多屬於簡單事件，應用加法定理，將第一個階段各機率之積加起來，本章問題中之第三題即屬一例。解決此種機率問題之方法首將問題分成兩個階段，再按上述解決機率問題之步驟決定各階段所需應用之公式即可。

二、希望數與變異數

14-8 希望數 (Expectation) 之意義——設一變數各不同變量之出現為互斥事象，且各變量發生機率之總和為一，則該變數之希望數為該變數各變量與其發生機率乘積之和。設 X 變數各變量為：

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$$

各變量為互斥事象，其發生之機率分別為：

$$p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$$

$$\text{且 } p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots + p_n = 1$$

則 X 變數之希望數為：

$$\begin{aligned} E(X) &= p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_i X_i + \dots + p_n X_n \\ &= \sum_{i=1}^n p_i X_i = \sum pX \dots \dots \dots (\text{公式 7}) \end{aligned}$$

式中 $E(X)$ 代表變數為 X 之希望數。

例如某人擲骰子一粒，規定如出現一點即贏得一元，兩點贏兩元，餘依次類推，則此人擲骰子一次平均可望贏得幾元？骰子每面出現之機率為 $\frac{1}{6}$ ，故贏得一元之機率為 $\frac{1}{6}$ ，贏得兩元之機率亦為 $\frac{1}{6}$ ，餘依此類推，故此人擲骰子一次平均可望贏得：

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum pX = p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3 + p_4 X_4 + p_5 X_5 + p_6 X_6 \\ &= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 \\ &= 3.5 \text{ 元} \end{aligned}$$

此人擲骰子一次，其實際贏得之數可能超過 3.5 元，亦可能低於 3.5 元，但從機率觀點言之，此人平均可望贏得 3.5，故 3.5 元為此人擲骰子一次可能贏款之希望數。

一變量出現之次數與其觀察總次數之比為該變量出現之經驗機率。前述當觀察次數十分衆多時，則經驗機率即頗接近於先天機率，故當觀察次數相當巨大時，該變數之算術平均數即為該變數之希望數，其證明如下：

設 X 變數各變量出現之次數分別為：

$$f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n$$

$$\text{其總次數 } N = f_1 + f_2 + \dots + f_i + \dots + f_n$$

當 $N \rightarrow \infty$ 時

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{N} (f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_i X_i + \dots + f_n X_n) \\ &= \frac{f_1}{N} X_1 + \frac{f_2}{N} X_2 + \dots + \frac{f_i}{N} X_i + \dots + \frac{f_n}{N} X_n \\ &= p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_i X_i + \dots + p_n X_n \\ &= E(X) \dots \dots \dots (\text{公式 8}) \end{aligned}$$

式中 μ 為當觀察次數 $N \rightarrow \infty$ 時之算術平均數，當 $N \rightarrow \infty$ 時，實際次數分配即趨近於理論次數分配，故 μ 亦稱之為理論上的算術平均數。

由此可知，希望數與算術平均數之意義甚為相似，僅希望數含有機率之概念，成為平均可望出現之數。

14-9 希望數之性質——主要者有下列四種：

$$(1) E(b) = b \dots \dots \dots (\text{公式 9})$$

式中 b 為常數，此式意為任何常數之希望數仍為該常數，其證明如下：

$$\begin{aligned} E(b) &= p_1 b + p_2 b + \dots + p_i b + \dots + p_n b \\ &= b(p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots + p_n) \\ &= b \end{aligned}$$

$$(2) E(aX) = aE(X) \dots\dots\dots(\text{公式10})$$

式中 a 爲常數，此式意爲一變數與一常數乘積之希望數等於該變數之希望數與該常數之乘積，其證明如下：

$$\begin{aligned} E(aX) &= p_1 aX_1 + p_2 aX_2 + \dots\dots + p_i aX_i + \dots\dots + p_n aX_n \\ &= a(p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots\dots + p_i X_i + \dots\dots + p_n X_n) \\ &= aE(X) \end{aligned}$$

(3) 倘 X, Y 兩變數成對出現時，則

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \dots\dots\dots(\text{公式11})$$

意即兩變數之和之希望數等於兩變數之希望數之和，其證明如下：

因 X, Y 兩變數成對出現，故同一對 X, Y 變量之出現機率相同。

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= p_1(X_1+Y_1) + p_2(X_2+Y_2) + \dots\dots \\ &\quad + p_i(X_i+Y_i) + \dots\dots + p_n(X_n+Y_n) \\ &= (p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots\dots + p_i X_i + \dots\dots + p_n X_n) \\ &\quad + (p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \dots\dots + p_i Y_i + \dots\dots + p_n Y_n) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

$$(4) E(aX+b) = aE(X) + b \dots\dots\dots(\text{公式12})$$

式中 a, b 爲常數，其證明如下：

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= E(aX) + E(b) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

(5) 倘 X, Y 爲成對出現且互相獨立之變數時，則

$$E(XY) = E(X)E(Y) \dots\dots\dots(\text{公式13})$$

意即兩變數之積之希望數等於兩變數之希望數之積，其證明如下：

設 ρ 爲 X, Y 兩變數間之相關係數， σ_x 及 σ_y 分別爲 X, Y 兩變數之標準差，則

$$\rho = \frac{\sum f_{ij}(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{N\sigma_x\sigma_y}$$

當觀察次數 $N \rightarrow \infty$ 時

$$\rho = \frac{\sum f_{ij}(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$\begin{aligned} \therefore \rho\sigma_x\sigma_y &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E[XE(Y)] - E[YE(X)] + E[E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

$$\text{即 } E(XY) = E(X)E(Y) + \rho\sigma_x\sigma_y$$

所謂 X, Y 兩變數互相獨立，意即該兩變數間相關係數 $\rho = 0$ ，故上式可化成下列形式：

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

14-10 變異數 (Variance) 之意義——變數之變異數為該變數各變量對其希望數之差之平方的希望數。設變數為 X ，則其變異數如下：

$$V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} \dots\dots\dots (\text{公式14})$$

式中 $V(X)$ 代表變數為 X 之變異數。

上式可變化為下列形式：

$$\begin{aligned} V(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \end{aligned}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \dots\dots\dots (\text{公式15})$$

此為 $V(X)$ 之簡捷式。