经人民教育出版社授权

配人教版®

总主编◎李朝东

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，輮以为轮，其曲中规；虽有槁暴，不复挺者，輮使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。

吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

积土成山，风雨兴焉；

小流，无以成江海。

牙之利，筋骨之

精讲精练

修订版

经纶学典

本册主编：杨雪峰　李从仁

学生用书

选修2–3

高中数学

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练:人教A版. 高中数学. 2-3:选修 / 李朝东主编.
—银川:宁夏人民教育出版社,2009.10(2013.1重印)

ISBN 978-7-80764-210-7

Ⅰ. ①精… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第188518号

精讲精练——数学 选修2-3(人教A版) 李朝东 主编

责任编辑 柳毅伟

封面设计 杭永鸿

责任印制 刘 丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地 址 银川市北京东路139号出版大厦(750001)

网 址 www.yrpubm.com

网上书店 www.hh-book.com

电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com

邮购电话 0951-5014294

经 销 全国新华书店

印刷装订 宁夏精捷彩色印务有限公司

开 本 880mm×1230mm 1/16 印 张 7

印刷委托书号 (宁)0010841 字 数 140千 印 数 5126册

版 次 2009年10月第1版 印 次 2013年1月第4次印刷

书 号 ISBN 978-7-80764-210-7/G·1147

定 价 9.42元

目 录

CONTENTS

第一章 计 数 原 理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 理解分类加法计数原理和分步乘法计数原理.
2. 会用分类加法计数原理和分步乘法计数原理分析和解决一些简单的实际问题.

基础梳理
jichushuli

1. 分类加法计数原理

(1) 分类加法计数原理: 完成一件事有两类不同方案,在第 1 类方案中有 m 种不同的方法,在第 2 类方案中有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

(2) 推广到一般: 完成一件事有 n 类不同方案,在第 1 类方案中有 m_1 种不同的方法,在第 2 类方案中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类方案中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=$______________种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

(1) 分步乘法计数原理: 完成一件事需要两个步骤,做第 1 步有 m 种不同的方法,做第 2 步有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

(2) 推广到一般: 完成一件事需要 n 个步骤,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=$______________种不同的方法.

【参考答案】

1. (1) $m+n$ (2) $m_1+m_2+\cdots+m_n$
2. (1) $m\times n$ (2) $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 对两个计数原理的理解

(1) 分类加法计数原理中各类方法相互独立,各类中的各种方法也相互独立,用任何一类中的任何一种方法都可以单独完成这件事,这也是判断分类加法计数原理的关键所在.

(2) 分步乘法计数原理是完成一件事要分为若干个步骤,各个步骤相互依存,完不成任何一步就不能完成这件事,只有当各个步骤都完成后,才能完成该事件,这也是判断分步乘法计数原理的关键所在.

2. 两个计数原理的区别与联系

(1) 共同点: 两个原理都是把一个原始事件分解成若干个事件来完成.

(2) 不同点: 两个计数原理的条件和结论互不相同,分类加法计数原理与分类有关,计数方式是求和,分步乘法计数原理与分步有关,计数方式是求积. 应用分类加法计数原理时,“类”与“类”之间是独立和并列的,彼此之间交集为空集,并集为全集;应用分步乘法计数原理时,“步”与“步”之间是连续的,彼此之间具有相继性.

3. 用两个计数原理解决问题时应注意的问题

(1) 在解决简单问题时,首先要弄清是“分类”还是“分步”. 判断的主要方法是结合题目中的条件、结论,研究题中涉及到的方法能否独立完成任务,若能独立完成,则用分类加法计数原理解决,在此种方法中应注意各类方法不重不漏;若所涉及方法不能单独完成任务,则用分步乘法计数原理解决,在此方法中要合理设计步骤、顺序,各步互不干扰. 最后利用分类加法计数原理或分步乘法计数原理的计数公式解决即可.

(2) 对一些较复杂的题目,我们可以根据题意恰当地画出示意图或者列出表格,使问题的实质直观地显现出来,然后利用分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决.

典型题解
dianxingtijie

题型1 分类加法计数原理的应用

例 1 在所有的两位数中,个位数字比十位数字大的有多少个?

[解析] 本题可以按照个位数字进行分类. 可分为个位数字为 9,8,7,6,5,4,3,2 共 8 类. 对应的每一类分别有 8,7,6,5,

4,3,2,1 种方法,且每一种方法都能独立完成“找到符合要求的一个两位数”这件事,根据分类加法计数原理知,本题可以用这一原理进行解答.

［答案］ 分析个位数字,可分以下几类:

个位数字是 9,则十位数字可以是 1,2,3,…,8 中的一个,共有 8 个;

个位数字是 8,则十位数字可以是 1,2,3,…,7 中的一个,共有 7 个;

个位数字是 7,则十位数字可以是 1,2,3,…,6 中的一个,共有 6 个;

……

个位数字是 2,则十位数字只能为 1,共有 1 个.

由分类加法计数原理可知,满足条件的两位数有:

$1+2+3+4+5+6+7+8=36$(个).

［点评］ 所谓“完成一件事有几类方法”,这里是指完成这件事的所有方法的一个分类. 分类时,首先要根据问题的特点确定一个适合它的分类标准,然后在这个标准下进行分类;其次分类时要注意满足一个基本要求:完成这件事的任何一种方法必须属于某一类,并且分别属于不同类的两种方法是不同的方法,只有满足这些条件,才可以用分类加法计数原理.

［借题发挥 1］ 将正整数 n 表示成 k 个正整数的和(不计各数次序),称为正整数 n 分为 k 部分的一个划分,两个划分中,如果各加数不全相同,则称为不同的划分,将正整数 n 分成 k 部分的不同划分的个数记为 $P(n,k)$,则 $P(10,3)$ 等于 ( )

A. 15　　B. 10　　C. 8　　D. 3

题型2 分步乘法计数原理的应用

例 2 已知集合 $M=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$,$P(a,b)$ 表示平面上的点($a,b\in M$),问:

(1) P 可表示平面上多少个不同的点?

(2) P 可表示平面上多少个第二象限的点?

(3) P 可表示多少个不在直线 $y=x$ 上的点?

［解析］ 完成“确定点 P”这件事需依次确定横、纵坐标,应用分步乘法计数原理.

［答案］ (1) 确定平面上的点 $P(a,b)$ 可分两步完成:第 1 步确定 a 的值,共有 6 种确定方法;第 2 步确定 b 的值,也有6 种确定方法. 根据分步乘法计数原理,得到平面上不同点的个数是 $6\times6=36$.

(2) 确定第二象限的点,可分两步完成:第 1 步确定 a,由于 $a<0$,故有 3 种确定方法;第 2 步确定 b,由于 $b>0$,故有 2 种确定方法. 由分步乘法计数原理,得到第二象限点的个数是 $3\times2=6$.

(3) 点 $P(a,b)$ 在直线 $y=x$ 上的充要条件是 $a=b$,因此 a 和 b 必须在集合 M 中取同一元素,共有 6 种取法,即在直线 $y=x$ 上的点有 6 个. 由(1) 得不在直线 $y=x$ 上的点共有 $36-6=30$(个).

［点评］ 利用分步乘法计数原理解决问题:(1) 要按事件发生的过程合理分步,即分步是有先后顺序的;(2) 各步中的方法互相依存,缺一不可,只有各个步骤都完成才算完成这件事.

［借题发挥 2］ 计划在 4 个体育馆举办排球、篮球、足球 3 个项目的比赛,每个项目的比赛只能安排在一个体育馆进行,则在同一个体育馆比赛的项目不超过两项的安排方案共有 ( )

A. 24 种　　B. 36 种　　C. 42 种　　D. 60 种

题型3 两个计数原理的综合应用

例 3 现有高一四个班学生共 34 人,其中一、二、三、四班各有 7 人、8 人、9 人、10 人,他们自愿组成数学课外小组.

(1) 选其中一人为负责人,有多少种不同的选法?

(2) 每班选一名组长,有多少种不同的选法?

(3) 推选二人作总结发言,这二人需来自不同的班级,有多少种不同的选法?

［解析］ (1) 是从四个班的 34 人中选一人,应分类求解;(2) 是从各班中选一人,共选 4 人,应分步求解;(3) 是先根据不同班级分类,再分步从两个班级中各选 1 人.

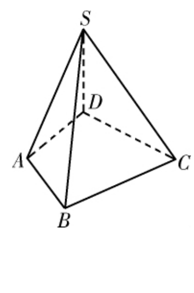
［答案］ (1) 分四类:第 1 类,从一班学生中选 1 人,有 7 种选法;第 2 类,从二班学生中选 1 人,有 8 种选法;第 3 类,从三班学生中选 1 人,有 9 种选法;第 4 类,从四班学生中选 1 人,有 10 种选法,由分类加法计数原理,得不同的选法有 $N=7+8+9+10=34$(种).

(2) 分四步,第一、二、三、四步分别从一、二、三、四班学生中选一人任组长,由分步乘法计数原理,得不同的选法有 $N=7\times8\times9\times10=5\,040$(种).

(3) 分六类,每类又分两步,从一、二班学生中各选 1 人,有 7×8 种不同的选法;从一、三班学生中各选 1 人,有 7×9 种不同的选法;从一、四班学生中各选 1 人,有 7×10 种不同的选法;从二、三班学生中各选 1 人,有 8×9 种不同的选法;从二、四班学生中各选 1 人,有 8×10 种不同的选法;从三、四班学生中各选 1 人,有 9×10 种不同的选法,∴ 共有不同的选法 $N=7\times8+7\times9+7\times10+8\times9+8\times10+9\times10=431$(种).

［点评］ 对于复杂问题,不能只用分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决时,可以综合应用两个原理,可以先分类,在某一类中再分步,也可以先分步,在某一步中再分类.

［借题发挥 3］ 如图,将四棱锥 $S-ABCD$ 的每个顶点染上一种颜色,并使同一棱上的两端异色,如果只有 5 种颜色可供使用,求不同的染色方法的总数.



提·升·训·练

1. 某班有男生26人,女生24人,从中选一位同学为数学课代表,则不同选法的种数是 ( )

A. 50 B. 26 C. 24 D. 624

2. 某商场共有4个门,购物者若从一个门进,则必须从另一个门出,则不同走法的种数是 ( )

A. 8 B. 7 C. 11 D. 12

3. 已知 $x\in\{2,3,7\}$, $y\in\{-31,-24,4\}$,则 xy 可以表示不同的值的个数是 ( )

A. $1+1=2$ B. $1+1+1=3$

C. $2\times3=6$ D. $3\times3=9$

4. 已知两条异面直线 a、b 上分别有5个点和8个点,则这13个点可以确定不同平面的个数为 ( )

A. 40 B. 16 C. 13 D. 10

5. 若一系列函数的解析式相同,值域相同,但其定义域不同,则称这些函数为"同族函数",那么函数解析式为 $y=x^2$,值域为$\{1,4\}$的"同族函数"共有 ( )

A. 7个 B. 8个 C. 9个 D. 10个

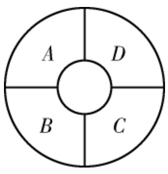
6. 用0~9这10个数字,可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为 ( )

A. 324 B. 328 C. 360 D. 648

7. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$,其中 a、b、$c\in\{0,1,2,3,4\}$,则不同的二次函数的个数为 ( )

A. 125 B. 15 C. 100 D. 10

8. 如图,一环形花坛分成 A、B、C、D 四块,现有4种不同的花供选种,要求在每一块里只种1种花,且相邻2块种不同的花,则不同的种法有 ( )



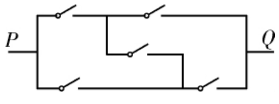
(第8题)

A. 96种 B. 84种 C. 60种 D. 48种

9. 有不同颜色的上衣5件,裤子3件,从中选一件送予他人,则有________种不同的选法;若从中选出一套送予他人,则有________种不同的选法.

10. 椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 的焦点在 y 轴上,且 $m\in\{1,2,3,4,5\}$, $n\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$,则满足题意的椭圆的个数为________.

11. 如图,已知图中每一个开关都有闭合与不闭合两种可能,因此5个开关的闭合情况有 2^5 种可能,在这 2^5 种可能中,电路从 P 到 Q 接通的情况有________种.



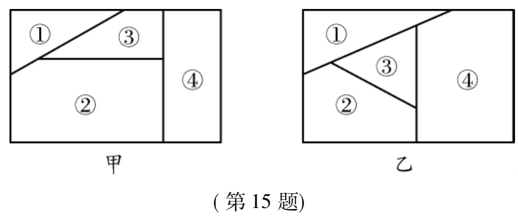
(第11题)

12. 将3个不同的小球放入编号分别为1,2,3,4,5,6的盒子内,6号盒子中至少有一个球的放法有________种.

13. 已知 $a\in\{3,4,6\}$, $b\in\{1,2,7,8\}$, $r\in\{8,9\}$,则方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 可表示多少个不同的圆?

14. 某城市提供甲、乙、丙、丁四个企业给该市某高中三年级三个班的学生进行社会实践活动,其中企业甲是市明星企业,必须有班去企业甲进行社会实践,所有不同的安排社会实践的方案有多少种?

15. 有 n 种不同颜色供下列两块广告牌着色,要求①②③④四个区域中相邻(有公共边界)的区域不能使用同一种颜色:



(第15题)

(1) 若 $n=6$,则甲着色共有多少种不同方法?

(2) 若为乙着色共有120种不同方法,求 n.

1.2 排列与组合

1.2.1 排　　列

自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 通过实例理解排列的概念.
2. 能用列举法、树形图列出排列.
3. 能用计数原理推导排列数公式,并能解决简单的实际问题.
4. 从列举过程中体会排列数与计数原理的关系,体会将实际问题化归为计数问题的方法.

基础梳理
jichushuli

1. 排列与排列数
   (1) 从 n 个不同的元素中,任取 $m(m\leq n)$ 个元素,按照一定的________排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.
   (2) 两个排列相同,当且仅当两个排列的元素完全相同,且元素的________也相同.
   (3) 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leq n)$ 个元素的所有不同排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号________表示,其中 $m、n\in \mathbf{N}^*$ 且 $m\leq n$.
2. 排列数公式
   $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=$________$(n、m\in \mathbf{N}^*$,且 $m\leq n)$.
3. 全排列
   n 个不同元素全部取出的一个排列,叫做 n 个元素的一个全排列,全排列数公式为 $A_n^n=$______________.
4. 阶乘
   正整数 1 到 n 的连乘积,叫做 n 的阶乘,用________表示. 故全排列数公式可写为 $A_n^n=$________,规定 $0!=$________.

注意:(1) 对有限制条件的排列问题要考虑全面,否则,求解时极易造成重复或遗漏.

(2) 含有排列数的方程都是在正整数范围内求解.

【参考答案】

1. (1) 顺序　(2) 排列顺序　(3) A_n^m
2. $\dfrac{n!}{(n-m)!}$
3. $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$
4. $n!$　$n!$　1

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 对排列的定义的理解

(1) 排列的定义包括两个基本内容:一是"取出元素";二是"按照一定的顺序排成一列". 研究的 n 个元素是互不相同的,取出的 m 个元素也是互不相同的.

(2) 从定义知,只有当元素完全相同,并且元素的排列顺序也完全相同时,才是同一个排列. 元素完全不同,或元素部分相同,或元素完全相同而顺序不同的排列都不是同一排列.

(3) 判断一个具体问题是否为排列问题,就看取出元素时是有序的还是无序的,而检验它是否有序的依据就是变换元素的位置(这里的位置应视具体问题的性质和条件来决定),看其结果是否有变化,有变化就是有序,无变化就是无序.

2. "排列数"与"一个排列"的区别

"一个排列"是指"从 n 个不同元素中取出 m 个元素,按照一定的顺序排成一列",它不是一个数,是一件事. "排列数"是指"从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列的个数",这是一个正整数.

例如,从 $a、b、c$ 中任取 2 个排列有 $ab、ba、ac、ca、bc、cb$,其中每一个都叫做一个排列,共有 6 个,6 就是从 $a、b、c$ 中任取 2 个的排列数.

3. 有限制条件的排列问题

解决有限制条件的排列问题常用的方法有"直接法"和"间接法"(又称排除法),当问题的正面分类较多或计算较复杂而问题的反面分类较少或计算更简便时往往使用"间接法". 而用"直接法"解有限制条件的排列问题的基本方法有:元素分析法——即以元素为主,优先考虑特殊元素,再考虑其他元素;位置分析法——即以位置为主,优先考虑特殊位置,再考虑其他位置.

(1) "捆绑"排列问题

排列问题中诸如将某些元素必须安排在一起(如相邻)的问题,我们称之为"捆绑"排列问题,也称为"集团排列"问题,即先排"集团内部"的元素,再把它们看成一个整体作为一个大"元素",与其他元素一起排列.

(2)间隔排列问题——“插空法”

我们把排列中部分元素不能相邻的排列问题称为间隔排列问题,解决间隔排列问题的常用方法是“插空法”,也就是先排不需要间隔(可以相邻)的元素,再将需要间隔的元素用插空方式插入排列即可.

(3)某些元素顺序确定的排列问题

在某些排列问题中,某些元素的前后顺序是固定的(不一定相邻),解决这类问题的基本方法是整体法,即若有 $m+n$ 个元素排成一列,其中有 m 个元素之间的顺序固定不变,将这 $m+n$ 个元素任意排成一列,共有 A_{m+n}^{m+n} 种不同的排法,其中顺序不变的 m 个元素在任意排列时有 A_m^m 种不同的排法,而这 m 个元素的排列顺序固定不变只有一种,故共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种不同的排法.

典型题解
dianxingti jie

题型1 排列数公式的应用

例1 求解下列问题:

(1)用排列数表示 $(55-n)(56-n)\cdots(69-n)$ ($n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n<55$);

(2)计算: $\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$;

(3)解方程: $A_{2x+1}^4=140A_x^3$.

[**解析**] (1)由于 $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$,$(55-n)(56-n)\cdots(69-n)$ 共有 15 个因式相乘,故 $(55-n)(56-n)\cdots(69-n)=A_{69-n}^{15}$;(2)主要用排列数公式转化为连乘积再化简计算;(3)由排列数公式先转化为关于 x 的方程,再由隐含条件 $\begin{cases}2x+1\geqslant4,\\x\geqslant3,x\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ 可解方程.

[**答案**] (1)$\because 55-n,56-n,\cdots,69-n$ 中的最大数为 $69-n$,且共有 $69-n-(55-n)+1=15$(个)数,

$\therefore (55-n)(56-n)\cdots(69-n)=A_{69-n}^{15}$.

(2) $\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$

$=\frac{2\times8\times7\times6\times5\times4+7\times8\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1-9\times8\times7\times6\times5}$

$=\frac{8\times7\times6\times5\times(8+7)}{8\times7\times6\times5\times(24-9)}=1$.

(3)根据题意 x 应满足 $\begin{cases}2x+1\geqslant4,\\x\geqslant3,x\in\mathbf{N}^*\end{cases}$,解得 $x\geqslant3$,$x\in\mathbf{N}^*$.

根据排列数公式,原方程化为 $(2x+1)\cdot2x\cdot(2x-1)\cdot(2x-2)=140x\cdot(x-1)(x-2)$.

$\because x\geqslant3$,两边同除以 $4x(x-1)$,

得 $(2x+1)(2x-1)=35(x-2)$.

即 $4x^2-35x+69=0$,解得 $x=3$ 或 $x=5\frac{3}{4}$($\because x$ 为整数,$\therefore$ 应舍去).

$\therefore$ 原方程的解为 $x=3$.

[**点评**] 注意 A_n^m 中隐含了 3 个条件:n、$m\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant m$,A_n^m 的运算结果为正整数.在解与排列数有关的方程或不等式时,应先求出未知数的取值范围,再利用排列数公式化简方程或不等式,最后得出问题的解.

[**借题发挥1**] 求解下列问题:

(1)计算: $\frac{A_{n-1}^{m-1}\cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}}$;

(2)解不等式: $A_9^x>6A_9^{x-2}$.

题型2 无限制条件的排列问题

例2 (1)8 个人排成一排,共有多少种不同的排法?

(2)8 个人排成两排,前后两排各 4 人,共有多少种不同的排法?

(3)8 个人排成两排,前排 3 人,后排 5 人,共有多少种不同的排法?

[**解析**] (1)由排列的定义,知共有 A_8^8 种不同的排法;(2)8 人排成前后两排,相当于排成一排,从中间分成两部分,其排列数等于 8 人排成一排的排列法.也可以分步进行,第 1 步:从 8 人中任选 4 人放在前排共有 A_8^4 种排法,第 2 步:剩下的4 人放在后排共有 A_4^4 种排法,由分步乘法计数原理,知共有 $A_8^4\times A_4^4=A_8^8$(种)排法.同理可得出问题(3)的排法.

[**答案**] (1) A_8^8 种. (2) $A_8^4\times A_4^4=A_8^8$(种). (3) $A_8^3\times A_5^5=A_8^8$(种).

[**点评**] 无限制条件的排列问题,主要根据排列数的定义及分步乘法计数原理解决问题.n 个人排队或 n 个元素排成若干排的问题(无限制条件排列问题),可采用统一排成一排的方法,也可用分步乘法计数原理分步进行.

[**借题发挥2**] 某合唱团有 6 名成员,排成三排,第一排 1 人,第二排 2 人,第三排 3 人,共有多少种排法?

题型3 有限制条件的排列问题

例3 甲、乙等6人按下列要求站成一排,分别有多少种不同站法?

(1)甲不站在最左边,也不站在最右边;

(2)甲、乙不相邻;

(3)甲、乙之间恰好相隔2人;

(4)甲不站在最左边,乙不站在最右边.

[**解析**] 对于"人站队"问题,由于有顺序,所以是排列问题;又由于安排甲、乙时有限制,所以这又是有限制条件的排列问题,应先考虑特殊元素甲、乙或特殊位置左、右两边,再考虑其他的情况.

[**答案**] (1)方法一(位置分析法):∵甲不站在最左边,也不站在最右边,而其余5人站队时无约束条件,故分两步完成:

第1步,先从除甲以外的5人中选2人站在最左边与最右边,有A_5^2种站法;

第2步,再让剩下的4人(含甲)站在剩下的4个不同的位置上,有A_4^4种站法.

由分步乘法计数原理,共有$A_5^2A_4^4=480$(种)不同的站法.

方法二(元素分析法):分两步完成:

第1步,先让甲站在除最左边、最右边之外的任一位置上,有A_4^1种站法;

第2步,再让其余5人站在剩下的5个位置上,有A_5^5种站法.

由分步乘法计数原理,共有$A_4^1\cdot A_5^5=480$(种)不同站法.

方法三(插入法):分两步完成:

第1步,先让除甲以外的5人站队,有A_5^5种不同站法;

第2步,让甲插入这5个人之间的4个空当中,有A_4^1种插法.

由分步乘法计数原理,共有$A_5^5\cdot A_4^1=480$(种)不同站法.

方法四(间接法):甲、乙等6人在无约束条件下排队的排列数为A_6^6,其中甲站在最左边或最右边的排列数为$2A_5^5$,

∴共有$A_6^6-2A_5^5=480$(种)不同站法.

(2)方法一(插入法):分两步完成:

第1步,先让除甲、乙以外的4人站队,有A_4^4种站法;

第2步,将甲、乙2人插入4个站好队的人形成的5个空当中(含最左、最右的2个位置),有A_5^2种插法.

由分步乘法计数原理,共有$A_4^4\cdot A_5^2=480$(种)不同站法.

方法二(间接法):甲、乙等6人在无约束条件下排队的排列数为A_6^6,其中甲、乙相邻的排列数可以这样计算:将甲、乙看作一个整体(即捆绑),作为一个元素与另外的4人站队,有$A_5^5A_2^2$种站法,∴共有$A_6^6-A_5^5A_2^2=480$(种)不同站法.

(3)方法一:分三步完成:

第1步,从除甲、乙之外的4人中选2人站在甲、乙之间,有A_4^2种站法;

第2步,甲、乙两人自身站队有A_2^2种站法;

第3步,将甲、乙及中间2人看作一个元素与余下的2人站队,有A_3^3种站法.由分步乘法计数原理,共有$A_4^2A_2^2A_3^3=144$(种)不同站法.

方法二(插入法):分两步完成:

第1步,先让除甲、乙之外的4人站队,有A_4^4种站法;

第2步,自左向右按条件插入甲、乙或乙、甲,有$3A_2^2$种插法.

由分步乘法计数原理,共有$A_4^4\cdot 3A_2^2=144$(种)不同站法.

(4)方法一(直接法):从元素甲的位置进行考虑,可分两类:

第1类,甲站在最右边只有1种站法,其余5人的站法有A_5^5种;

第2类,甲站在中间的4个位置之一,这时分三步完成,第1步,先让甲站队,有A_4^1种站法;第2步,让乙站队,乙不站在最右边,有A_4^1种站法;第3步,让余下的4人站队,有A_4^4种站法.第2类共有$A_4^1\cdot A_4^1\cdot A_4^4$种站法.

由分类加法计数原理,共有$A_5^5+A_4^1\cdot A_4^1\cdot A_4^4=504$(种)站法.

方法二(间接法):甲、乙等6人在无约束条件下排队的排列数为A_6^6,其中不符合要求的分别为:甲站在最左边时有A_5^5种,乙站在最右边时有A_5^5种,而甲站在最左边且乙站在最右边时有A_4^4种,故共有$A_6^6-2A_5^5+A_4^4=504$(种)不同的站法.

[**点评**] "在"与"不在","相邻"与"不相邻"是常见的有约束条件的排列问题."在"一般用直接法,既可以从元素入手,也可以从位置入手,方法是:谁"特殊"谁优先."不在"常采用间接法,转化为"在"求解,要注意,有重复多减的要将多减的部分补回来,也可以用直接法分类求解."相邻"问题常用"捆绑法",即把它们看作一个元素来处理,要注意它们自身的排列问题."不相邻"问题常用"插空法".

[**借题发挥3**] (1)8名学生和2位老师站成一排合影,2位老师不相邻的排法共有 ( )

A. $A_8^8A_9^2$种 B. A_{10}^{10}种

C. $A_8^8A_7^2$种 D. $A_8^8A_2^2$种

(2)一排七个座位,甲、乙两人就座,要求甲与乙之间至少有一个空位,则不同的坐法有 ( )

A. 30种 B. 28种 C. 42种 D. 16种

例4 用0,1,2,3,4,5这六个数字:

(1)能组成多少个无重复数字的四位偶数?

(2)能组成多少个无重复数字且为5的倍数的五位数?

(3)能组成多少个比1 325大的四位数?

[**解析**] 该题目中特殊元素为0,特殊位置为首位,根据先特殊后一般的原则,可将问题分解为几个易求解的简单问题.

[**答案**] (1)符合要求的四位偶数可分为三类:

第1类:0在个位时,有A_5^3个;

第2类:2在个位时,先排首位,因为不能排0,只能从1,3,4,5中选,有A_4^1种,再排十位和百位,有A_4^2种,于是有$A_4^1A_4^2$个;

第3类:4在个位时,与第2类同理,也有$A_4^1A_4^2$个.

由分类加法计数原理得,共有$A_5^3+A_4^1A_4^2+A_4^1A_4^2=156$(个).

(2)为5的倍数的五位数可分为两类:

第1类:个位上为0的五位数有A_5^4个;

第2类:个位数上为5的五位数有$A_4^1A_4^3$个.

故满足条件的五位数共有$A_5^4+A_4^1A_4^3=216$(个).

(3)比1 325大的四位数可分为三类:

第1类:形如2□□□,3□□□,4□□□,5□□□的四位数共有$A_4^1A_5^3$个;

第2类:形如14□□,15□□的四位数共有$A_2^1A_4^2$个;

第3类:形如134□,135□的四位数共有$A_2^1A_3^1$个.

由分类加法计数原理可得,比1 325大的四位数共有:

$A_4^1A_5^3+A_2^1A_4^2+A_2^1A_3^1=270$(个).

[点评] 数字排列问题是排列问题的重要题型,解题时要着重注意从附加限制条件入手分析,找出解题的思路.常见的附加限制条件有:(1)首位不能为0;(2)有(或无)重复数字;(3)奇(或偶)数;(4)某数的倍数;(5)大于(或小于)某数.

[借题发挥4] 由1,2,3,4,5,6组成没有重复数字且1,3都不与5相邻的六位偶数的个数是 ( )

A. 72　　B. 96

C. 108　　D. 144

提·升·训·练

1. $\dfrac{A_7^6-A_6^5}{A_5^4}$等于 ( )

A. 12　　B. 24

C. 30　　D. 36

2. 信号兵用3面不同颜色的旗子按从上到下的顺序挂在旗杆上表示信号,每次打出3面,最多能打出不同的信号有 ( )

A. 1种　　B. 3种

C. 6种　　D. 27种

3. 设$x\in\mathbf{N}^*$且$x<23$,则$(23-x)(24-x)\cdot\cdots\cdot(30-x)$可化简为 ( )

A. A_{23-x}^8　　B. A_{30-x}^{23-x}

C. A_{30-x}^7　　D. A_{30-x}^8

4. 在1,2,3,4的排列a_1,a_2,a_3,a_4中,满足$a_2>a_3$的排列有 ( )

A. 10种　　B. 12种

C. 24种　　D. 26种

5. 由0,1,2,3,4,5这六个数字组成的无重复数字的六位数中,不出现“135”与“24”的六位数的个数为 ( )

A. 582　　B. 504

C. 490　　D. 486

6. 某教师一天上3个班级的课,每班一节,如果一天共9节课,上午5节、下午4节,并且教师不能连上3节课(第5节和第6节不算连上),那么这位教师一天课的所有排法有 ( )

A. 474种　　B. 77种

C. 462种　　D. 79种

7. 某会议室第一排共有8个座位,现有3人就座,若要求每人左右均有空位,那么不同的坐法种数为 ( )

A. 12　　B. 16

C. 24　　D. 32

8. 摄影师要为5名学生和2位老师拍照,要求排成一排,2位老师相邻且不排在两端,不同的排法共有________种.

9. 由0,1,2,…,9这十个数字组成的、无重复数字的四位数中,个位数字与百位数字之差的绝对值等于8的个数为________个.

10. 安排7位工作人员在10月1日到10月7日值班,每人值班一天,其中甲、乙两人都不能安排在10月1日和10月2日,不同的安排方法共有________种.

11. 由1,3,4,6,x五个数字组成没有重复数字的五位数,所有这些五位数各位数字之和为2 640,则$x=$________.

12. 有A、B、C、D、E五位学生参加网页设计比赛,决出了第一到第五的名次.A、B两位学生去问成绩,教师对A说:你的名次不知道,但肯定没得第一名;又对B说:你是第三名.请你分析一下,这五位学生的名次排列共有________种不同的可能.(用数字作答)

13. 计算下列各题:

(1)A_{15}^2;

(2)$1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!$;

(3)$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}$.

14. 一条铁路线原有 n 个车站,为了适应客运需要,新增加了 m 个车站($m>1$),客运车票增加了62种,问原有多少个车站?现有多少个车站?

15. 3名男生,4名女生,按照不同的要求排队,求不同的排队方案的方法种数.

(1) 全体站成一排,其中甲只能在中间或两端;

(2) 全体站成一排,其中甲不在最左端,乙不在最右端;

(3) 全体站成一排,男、女各站在一起;

(4) 全体站成一排,男生不能排在一起.

1.2.2 组　　合

自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 理解组合及组合数的定义.

2. 掌握组合数公式,并会应用求值.

3. 理解掌握组合数的两个性质,并能用性质进行求值、化简和证明有关问题.

4. 应用组合知识解决简单的实际问题.

基础梳理
jichushuli

1. 组合

(1) 一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素________,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

(2) 组合与元素的顺序无关,只要两个组合中的元素相同,不论元素的________如何,都是相同的组合.

(3) 排列与组合的异同:排列与组合的相同点是,两者都是从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素;不同点是,排列与元素的顺序有关,而组合与元素的顺序无关,故与元素顺序有关的属于排列问题,与元素的顺序无关的属于________问题.

2. 组合数

(1) 组合数的定义:从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同________,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示,其中 m、$n\in\mathbf{N}^*$,并且 $m\leqslant n$.

(2) 组合数公式:

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

规定 $\mathrm{C}_n^0=1$,这里 m、$n\in\mathbf{N}^*$,$m\leqslant n$.

(3) 组合数的两个性质:

①$\mathrm{C}_n^m=$________;②$\mathrm{C}_{n+1}^m=$________.

变式:$\mathrm{C}_n^m=\frac{n}{m}\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$,$\mathrm{C}_n^m=\frac{n}{n-m}\mathrm{C}_{n-1}^m$,$\mathrm{C}_n^m=\frac{m+1}{n-m}\mathrm{C}_n^{m+1}$,

$\mathrm{C}_n^m=\frac{m+1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$,$\mathrm{C}_n^m=\frac{n-m+1}{m}\mathrm{C}_n^{m-1}$ 等.

【参考答案】

1. (1) 合成一组　(2) 顺序　(3) 组合

2. (1) 组合的个数　(2) $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$　(3) ①C_n^{n-m}　②$\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$

重·难·点·突·破

疑难剖析 yinanpouxi

1. 对组合定义的理解

(1)组合的定义中包括两个基本内容:一是“取出元素”,二是“并成一组”.“并成一组”即表示与顺序无关.如果两个组合中的元素完全相同,不管它们的顺序如何,都是相同的组合的特征.

(2)区分某一问题是组合问题还是排列问题的关键是看取出的元素有无顺序,有顺序是排列问题,无顺序是组合问题.如数的运算中,加法、乘法是组合问题,减法、除法是排列问题;火车票是排列问题,而票价是组合问题;写信是排列问题,握手是组合问题,等等.判定取出的元素是否有顺序的方法是:将元素取出来,看“交换元素的顺序对结果有无影响”,有影响就是有顺序,无影响就是无顺序.

2. 组合数的两个性质

(1)性质1:$C_n^m=C_n^{n-m}$

注意:①该性质反映了组合数的对称性,其意义是:从n个不同的元素中取出m个元素后,就剩下$n-m$个元素,因此从n个不同元素中取出m个元素的方法与从n个元素中取出$n-m$个元素的方法是一一对应的,也就是说是一样多的.因此,从n个不同的元素中取出m个元素的每一个组合,都对应着从n个不同的元素中取出$n-m$个元素的唯一的一个组合,反过来也一样,故$C_n^m=C_n^{n-m}$.

②当$m>\frac{n}{2}$时,直接计算C_n^m较麻烦,通常改为计算C_n^{n-m}.

(2)性质2:$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$

证法一:
$$\begin{aligned}C_n^m+C_n^{m-1}&=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)!\,[n-(m-1)]!}\\&=\frac{n!\,(n-m+1)+n!\,m}{m!\,(n-m+1)!}\\&=\frac{n!\,(n-m+1+m)}{m!\,(n-m+1)!}\\&=\frac{(n+1)!}{m!\,[(n+1)-m]!}=C_{n+1}^m,\end{aligned}$$

故$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

证法二:可以根据组合的定义与分类加法计数原理得出,从$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$这$n+1$个不同的元素中取出m个元素的组合数是C_{n+1}^m,这些组合可以分为两类,一类含有a_1,一类不含a_1.含有a_1的组合是从$a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$这n个不同的元素中取出$m-1$个元素与a_1组成的,共有C_n^{m-1}个;不含a_1的组合是从$a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$这n个不同的元素中取出m个元素组成的,共有C_n^m个.根据分类加法计数原理,得$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

注意:①公式特点:左端下标为$n+1$,右端下标为n,相差1;左端上标与右端的一个上标一样,比右端的另一个上标多1.

②要注意公式$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$的正用、逆用、变形运用:正用(即顺用)是将一个组合数拆成两个;逆用是“合二为一”;变形为对$C_n^{m-1}=C_{n+1}^m-C_n^m$的使用,为某些前后项相互抵消带来方便,在解题中注意灵活运用.

典型题解 dianxingti jie

题型1 组合数的两个性质的应用

例1 求解下列问题:

(1)解方程:$C_{16}^{x^2+3x+2}=C_{16}^{5x+5}$;

(2)求值:$C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{20}^3$.

[**解析**] (1)关键是将原方程转化为一元二次方程,由题意及组合数性质$C_n^m=C_n^{n-m}(n、m\in\mathbf{N}^*$,且$m\leqslant n)$得$x^2+3x+2=5x+5$或$(x^2+3x+2)+(5x+5)=16$.求出一元二次方程的解后,要代入原方程检验,要满足x^2+3x+2和$5x+5$都是自然数且都小于或等于16;

(2)关键是将C_3^3化为C_4^4,然后依次连续使用组合数性质$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

[**答案**] (1)$\because C_{16}^{x^2+3x+2}=C_{16}^{5x+5}$,$\therefore x^2+3x+2=5x+5$或$(x^2+3x+2)+(5x+5)=16$,即$x^2-2x-3=0$或$x^2+8x-9=0$,$\therefore x=-1$或$x=3$或$x=-9$或$x=1$.经检验,$x=3$和$x=-9$不符合题意,舍去,故原方程的解为$x_1=-1,x_2=1$.

(2)原式$=C_4^4+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{20}^3=C_5^4+C_5^3+\cdots+C_{20}^3=\cdots=C_{20}^4+C_{20}^3=C_{21}^4=5\,985$.

[**点评**] (1)解含有组合数的方程或不等式的步骤为:①化简:先用组合数的性质进行化简;②转化:利用组合数公式构建常见方程或不等式,要注意根据式子的结构特点灵活选择公式;③求解:对不等式或方程求解;④验根:结合组合数自身的条件限制对所求根进行检验;⑤作答:得出正确答案.

(2)要注意性质$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$的正用、逆用、变形用.正用是将一个组合数拆成两个,逆用则是“合二为一”.变形为$C_n^{m-1}=C_{n+1}^m-C_n^m$的使用,另外,结合$A_n^m=C_n^mA_m^m$,可以实现组合数与排列数的转化,为某些项抵消提供了方便,在解题中要注意灵活运用.

[**借题发挥1**] 计算下列各题:

(1)$C_{98}^{97}+2C_{98}^{96}+C_{98}^{95}$;

(2)$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{10}^2$;

(3)$C_{2n}^{17-n}+C_{13+n}^{3n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

题型2 组合应用题

例 2 “抗震救灾,众志成城”,在 5·12 抗震救灾中,某医院从 10 名医疗专家中抽调 6 名奔赴救灾前线,这 10 名医疗专家中有 4 名是外科专家. 问:

(1) 抽调的 6 名专家中恰有 2 名是外科专家的抽调方法有多少种?

(2) 抽调的 6 名专家中至少有 2 名是外科专家的抽调方法有多少种?

(3) 抽调的 6 名专家中至多有 2 名是外科专家的抽调方法有多少种?

[**解析**] 本题是组合问题,解答本题应首先分清“恰有”“至少”“至多”的含义,正确地分类或分步解决.

[**答案**] (1) 分两步解决:首先从 4 名外科专家中任取 2 名,有 C_4^2 种选法,再从除去外科专家的 6 名专家中任取 4 名,有 C_6^4 种选法,所以共有 $C_4^2C_6^4=90$(种) 抽调方法.

(2) 方法一(直接法):按选取的外科专家的人数分类:

①选 2 名外科专家,共有 $C_4^2C_6^4$ 种选法;

②选 3 名外科专家,共有 $C_4^3C_6^3$ 种选法;

③选 4 名外科专家,共有 $C_4^4C_6^2$ 种选法.

根据分类加法计数原理,共有 $C_4^2C_6^4+C_4^3C_6^3+C_4^4C_6^2=185$(种) 抽调方法.

方法二(间接法):不考虑是否有外科专家,共有 C_{10}^6 种选法. 考虑选取 1 名外科专家参加,有 $C_4^1C_6^5$ 种选法;考虑没有外科专家参加,有 C_6^6 种选法,所以共有 $C_{10}^6-C_4^1C_6^5-C_6^6=185$(种) 抽调方法.

(3) “至多 2 名”包括“没有”“有 1 名”“有 2 名”三种情况,分类解答:

①没有外科专家参加,共有 C_6^6 种选法;

②有 1 名外科专家参加,共有 $C_4^1C_6^5$ 种选法;

③有 2 名外科专家参加,共有 $C_4^2C_6^4$ 种选法.

所以共有 $C_6^6+C_4^1C_6^5+C_4^2C_6^4=115$(种) 抽调方法.

[**点评**] 解答有限制条件的组合问题的基本方法有“直接法”和“间接法(排除法)”:用直接法求解时,应依据“特殊元素优先考虑”的原则,即优先安排特殊元素,再安排其他元素;选择间接法的原则是“正难则反”,也就是若正面问题分类较多、较复杂或计算较大时,不妨从反面考虑,特别是涉及“至多”“至少”等组合问题时更是如此.

[**借题发挥 2**] 某校开设 A 类选修课 3 门,B 类选修课 4 门,一位同学从中选 3 门. 若要求两类课程中各至少选一门,则不同的选法共有 ( )

A. 30 种　B. 35 种　C. 42 种　D. 48 种

题型3 组合在几何中的应用

例 3 过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条,其中异面直线有 ( )

A. 18 对　B. 24 对

C. 30 对　D. 36 对

[**解析**] 此题可以使用“间接法”,从 15 条直线中任选两条共 C_{15}^2 种,再减去共面的(即平行或相交的情况);也可以使用“直接法”,即直接分类求解.

方法一:采用排除法,15 条直线中任选两条,有 $C_{15}^2=105$(对) 直线;其中每个侧面都有 C_6^2 对共面直线,每个底面上都有 C_3^2 对共面直线,另外,每个顶点处由底面上的棱和侧面的对角线(不在同一个侧面或底面上) 可组成 3 对相交直线,∴ 共有 $C_{15}^2-3C_6^2-2C_3^2-3\times6=36$(对) 异面直线,故选 D.

方法二:直接分类讨论,上、下底面的棱可以构成 6 对异面直线;侧棱不能构成异面直线;侧面的对角线相互可以构成 $\frac{6\times2}{2}=6$(对) 异面直线;底面上的棱与侧棱可以构成 6 对异面直线;底面上的棱与侧面的对角线(不在同一个侧面或底面上) 可以构成 $6\times2=12$(对) 异面直线;侧棱与侧面的对角线可以构成 $3\times2=6$(对) 异面直线. 于是共可以构成 $6+6+6+12+6=36$(对) 异面直线,故选 D.

[**答案**] D

[**点评**] 解几何组合应用题首先应注意应用组合问题的常规方法解决问题;其次应注意从不同类型的几何问题抽象出一个组合模型加以处理;第三,必须注意几何问题本身的限制条件,如共线、共面、交点等,要注意分清对应关系;第四,图形多少的问题通常是组合问题,要注意共线、共点、共面、异面等情形,防止重复,可用“直接法”,也可用“间接法”.

[**借题发挥 3**] 四面体的顶点和各棱的中点共有 10 个点,在其中取 4 个不共面的点,不同的取法共有多少种?

题型4 排列组合的综合应用

例 4 登山运动员 10 人,平均分为两组,其中熟悉道路的有 4 人,每组都需要 2 人,那么不同的分配方法有 ( )

A. 30 种　B. 60 种　C. 120 种　D. 240 种

[**解析**] 本题是分组与分配问题,解答本题应首先分清“分组”与“分配”的含义,正确理解“分组”与顺序无关,“分配”与顺序有关.

按照"先分后排"的原则,先将4个熟悉道路的人平均分成两组有$\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{A_2^2}$种,再将余下的6人平均分成两组有$\frac{C_6^3\cdot C_3^3}{A_2^2}$种,然后这四个组自由搭配还有$A_2^2$种,故最终分配方法有$\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{A_2^2}\cdot\frac{C_6^3\cdot C_3^3}{A_2^2}\cdot A_2^2=60$(种).

[**答案**] B

[**点评**] "分组分配"问题是一种典型的排列组合综合题,解这类问题的关键在于分组,"分组"又分"平均分组"与"非平均分组","平均分组"与顺序无关,"非平均分组"与顺序有关.若要平均分成m组,则分法$=\frac{\text{取法}}{m!}$.

[**借题发挥4**] 将6位志愿者分成4组,其中两个组各2人,另外两个组各1人,分赴世博会的四个不同场馆服务,不同的分配方案有________种.(用数字作答)

例5 有4个不同的小球,4个不同的盒子,现要把球全部放进盒子内.

(1)恰有1个盒子不放球,共有多少种方法?

(2)恰有2个盒子不放球,共有多少种方法?

[**解析**] 恰有1个空盒,说明必定有1个盒子要放入2个球,先分组再排列计算;恰有2个空盒,4个球放在2个盒子内要注意分类计数.

[**答案**] (1)确定1个空盒有C_4^1种方法;选2个球捆在一起有C_4^2种方法;把捆在一起的2个小球看成一个整体,则意味着将3个球分别放入3个盒子内,有A_3^3种方法.故共有$C_4^1C_4^2A_3^3=144$(种).

(2)确定2个空盒有C_4^2种方法,4个球放进2个盒子可分成(3,1)、(2,2)两类,第一类有序不均匀分组有$C_4^3C_1^1A_2^2$种方法;第二类有序均匀分组有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_2^2$种方法.故共有:

$$C_4^2\left(C_4^3C_1^1A_2^2+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_2^2\right)=84(\text{种}).$$

[**点评**] 排列组合综合题目,一般是将符合要求的元素取出(组合)或进行分组,再对取出的元素或分好的组进行排列.其中分组时,要注意"平均分组"与"不平均分组"的差异及分类的标准.

[**借题发挥5**] 有6名男医生,4名女医生,从中选3名男医生,2名女医生到5个不同的地区巡回医疗,但规定男医生甲不能到地区A,共有多少种不同的分派方法?

提·升·训·练

1. 若$A_n^3=12C_n^2$,则n等于 ( )

A. 8　B. 5或6

C. 3或4　D. 4

2. 若$C_{n+1}^7-C_n^7=C_n^8$,则n等于 ( )

A. 12　B. 13

C. 14　D. 15

3. 从5位同学中选派4位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动,其中要求每人一天,星期五有2人参加,星期六、星期日各有1人参加.则不同的选派方法共有 ( )

A. 40种　B. 60种

C. 100种　D. 120种

4. 已知集合$A=\{5\}$,$B=\{1,2\}$,$C=\{1,3,4\}$,从这三个集合中各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标,则确定的不同点的个数为 ( )

A. 33　B. 34

C. 35　D. 36

5. 设m、n都是不大于6的自然数,则方程$C_6^mx^2-C_6^ny^2=1$表示双曲线的个数是 ( )

A. 6　B. 12

C. 16　D. 15

6. 从0,1,2,3,4,5这六个数字中任取两个奇数和两个偶数,组成没有重复数字的四位数的个数为 ( )

A. 300　B. 216

C. 180　D. 162

7. 我国部分地区由于遭遇雪灾,电煤库存吃紧.为了支援这部分地区抗灾救灾,国家统一部署,加紧从某采煤区调运电煤.某铁路货运站对6列电煤货运列车进行编组调度,决定将这6列列车编成两组,每组3列,且甲与乙两列列车不在同一小组.如果甲所在小组3列列车先开出,那么这6列列车先后不同的发车顺序共有 ( )

A. 36种　B. 108种

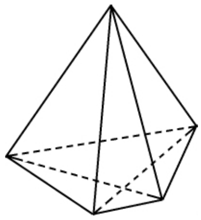
C. 216种　D. 432种

8. 从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形,其中直角三角形的个数为 ( )

A. 56　B. 52

C. 48　D. 40

9. 如图,如果一个凸多面体是 n 棱锥,那么这个凸多面体的所有顶点所确定的直线共有________条. 这些直线中共有 $f(n)$ 对异面直线,则 $f(4)=$________;$f(n)=$________. (答案用数字或 n 的解析式表示).



(第 9 题)

10. 由 4 个不同的数字 1,4,5,$x(x\neq 0)$ 组成没有重复数字的所有的四位数的各位数字之和为 288,则 $x=$________.

11. 为预防和控制流感,某学校医务室欲将 23 个相同的温度计分发到高三年级 10 个班级中,要求分发到每个班级的温度计不少于 2 个,则不同的分发方式共有________种.

12. 计算:

(1) $C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}$;

(2) $C_{13+n}^{3n}+C_{12+n}^{3n-1}+C_{11+n}^{3n-2}+\cdots+C_{2n}^{17-n}$.

13. 有 8 名男生和 5 名女生,从中任选 6 人.

(1) 有多少种不同的选法?

(2) 其中有 3 名女生,有多少种不同的选法?

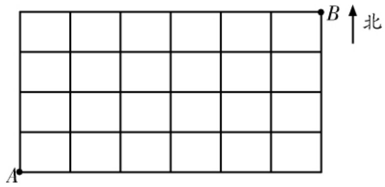
(3) 其中至多有 3 名女生,有多少种不同的选法?

(4) 其中有 2 名女生,4 名男生,分别负责 6 种不同的工作,共有多少种不同的分工方法?

14. 某市有 7 条南北向街道,5 条东西向街道(如图所示).

(1) 图中共有多少个矩形?

(2) 从 A 点走到 B 点最短路线的走法有多少种?



(第 14 题)

1.3 二项式定理

自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 掌握二项式定理及二项展开式的通项公式.

2. 能运用二项式定理展开某些二项式,会求某些特定项.

3. 会逆用二项式定理.

4. 了解杨辉三角,会用杨辉三角求二项式乘方次数不大时的各项二项式系数.

5. 了解二项式系数的性质,并灵活运用.

基础梳理
jichushuli

1. 二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*)$,这个公式叫做二项式定理,它是一个恒等式,右边的多项式叫做$(a+b)^n$的二项展开式,其中各项的系数__________叫做二项式系数.

2. 二项展开式的通项

二项展开式的第________项$C_n^ka^{n-k}b^k$叫做二项展开式的通项,用T_{k+1}表示,即通项为展开式的第$k+1$项:$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$(其中$0\leqslant k\leqslant n,k\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}^*$),利用二项展开式的通项公式可以求出展开式中任意指定的项(或系数),如常数项、系数最大的项、有理项等.

3. 二项式系数的性质

(1) 对称性:在二项展开式中,与首末两端"等距离"的两个二项式系数________,即$C_n^0=C_n^n,C_n^1=C_n^{n-1},\cdots,C_n^r=C_n^{n-r}$.这实际上反映了组合数的性质$C_n^m=C_n^{n-m}$.

(2) 增减性与最大值:二项式系数C_n^k,当$k<\dfrac{n+1}{2}$时,二项式系数逐渐增大;当$k>\dfrac{n+1}{2}$时,二项式系数逐渐________.当n是偶数时,展开式中间一项$T_{\frac{n}{2}+1}$的二项式系数最大;当n是奇数时,展开式中间两项$T_{\frac{n+1}{2}}$与$T_{\frac{n+1}{2}+1}$的二项式系数相等且最大.

(3) 各二项式系数的和:二项展开式中各个二项式系数的和为2^n,即$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=$________,并且奇数项的二项式系数之和等于偶数项的二项式系数之和,且都等于2^{n-1}.即$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

【参考答案】

1. $C_n^k(k\in\{0,1,2,\cdots,n\})$
2. $k+1$
3. (1) 相等 (2) 减小 (3) 2^n

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 对二项式定理的理解

(1) 二项式$(a+b)^n$的展开式有$n+1$项,是和的形式,各项的幂指数规律是:①各项的次数都等于二项式的幂指数n.②字母a按降幂排列,从第一项起,次数由n逐项减1直到0;字母b按升幂排列,从第一项起次数由0逐项加1直到n.

(2) 二项式定理中的a、b不能交换,即$(a+b)^n$与$(b+a)^n$的展开式是有区别的(虽然结果相同),二者的展开式中项的排列顺序是不同的.

(3) 二项式定理表示一个恒等式,对于任意的a、b,该等式都成立.通过对a、b取不同的特殊值,可给某些问题带来方便,如:a、b都取1时得$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$;$a=1,b=-1$时有$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+C_n^k(-1)^k+\cdots+C_n^n(-1)^n=0$.二项式定理通常有如下两种变形:$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+\cdots+(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n$.

$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$.

2. 对二项展开式的通项的理解

(1) 通项$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$是$(a+b)^n$的展开式的第$r+1$项,而不是第r项,这里$r=0,1,\cdots,n$.

(2) 二项式系数与项的系数是完全不同的两个概念.二项式系数是指$C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$,它只与各项的项数有关,而与a、b的值无关;而项的系数是指该项中除变量外的常数部分,它不仅与各项的项数有关,而且也与a、b的值有关,如$(a+bx)^n$的展开式中,第$r+1$项的二项式系数是C_n^r,而该项的系数是$C_n^ra^{n-r}b^r$.当然,在某些二项展开式[如$(a+b)^n$]中,各项的系数与二项式系数是相等的.

(3) 运用通项求展开式的一些特殊项,通常都是由题意列方程求出r,再求所需的某项;有时需先求n,计算时要注意n和r的取值范围及它们之间的大小关系.另外,求展开式中的指定项,要把该项完整写出,不能仅仅说明是第几项.

典型题解
dianxingtijie

题型1 二项式定理的正用、逆用

例1 (1) 展开$\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$;

(2) 化简:$1+3C_n^1+9C_n^2+\cdots+3^nC_n^n$.

[解析] (1) 可以直接利用二项式定理展开并化简,也可以先化简,再利用二项式定理展开;(2) 注意到式子的结构特点,可以逆用展开式进行化简.

[答案] (1) 方法一:$\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5=C_5^0(2x)^5-C_5^1(2x)^4\cdot\dfrac{1}{x^2}+C_5^2(2x)^3\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2-C_5^3(2x)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^3+C_5^4(2x)\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^4-C_5^5\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^5=32x^5-80x^2+\dfrac{80}{x}-\dfrac{40}{x^4}+\dfrac{10}{x^7}-\dfrac{1}{x^{10}}$.

方法二:

$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^5&=\left[\frac{1}{x^2}(2x^3-1)\right]^5\\&=-\frac{1}{x^{10}}(1-2x^3)^5\\&=-\frac{1}{x^{10}}[1-C_5^1(2x^3)+C_5^2(2x^3)^2-C_5^3(2x^3)^3\\&\quad+C_5^4(2x^3)^4-C_5^5(2x^3)^5]\\&=-\frac{1}{x^{10}}+\frac{10}{x^7}-\frac{40}{x^4}+\frac{80}{x}-80x^2+32x^5.\end{aligned}$$

(2) 在二项展开式中$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n$.令

$x=3$,得$(1+3)^n=C_n^0+C_n^1\cdot 3+C_n^2\cdot 3^2+\cdots+C_n^n\cdot 3^n$,即$1+3C_n^1+9C_n^2+\cdots+3^nC_n^n=4^n$.

[**点评**] 运用二项式定理展开二项式,要记准展开式,对于较复杂的二项式,有时先化简再展开更简洁;逆用二项式定理可将多项式化简,对于这类问题的求解,要熟悉公式的特点、项数、各项幂指数的规律以及各项的系数.

[**借题发挥1**] (1)展开:$\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x}-3x\right)^3$;

(2)化简:$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$.

题型2 求展开式中的特定项

例2 在$(x+\sqrt[4]{3}y)^{20}$的展开式中,系数为有理数的项共有________项;

(2)在$\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$的二项展开式中,常数项是________.

[**解析**] (1)系数为有理数的项,就是通项中系数的指数为整数的项;(2)展开式中的常数项是指展开式中不含未知数x的项,解决这一问题有两种解法:一是写出展开式的通项,并令x的指数为零,再求相应的r,写出所求项;二是用"搭配法",即根据组合的概念,判断如何选取因式相乘会出现所求的项.

(1)展开式的通项

$T_{r+1}=C_{20}^rx^{20-r}(\sqrt[4]{3}y)^r=3^{\frac{r}{4}}C_{20}^rx^{20-r}y^r$,

由$0\leqslant r\leqslant 20$,$\dfrac{r}{4}\in\mathbf{Z}$,得$r=0,4,8,12,16,20$,所以系数为有理数的项共有6项.

(2)方法一:$\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$的展开式的通项

$T_{r+1}=C_6^r2^{6-r}x^{12-2r}x^{-r}=2^{6-r}C_6^rx^{12-3r}$,其中$0\leqslant r\leqslant 6$,$r\in\mathbf{Z}$.

令$12-3r=0$,得$r=4$,故展开式中的常数项是$T_5=60$.

方法二:$\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$表示6个$\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)$相乘,若要出现常数项,则必须从其中2个因式中取$2x^2$,其余4个中取$\dfrac{1}{x}$相乘,所有的取法有$C_6^2$种,故常数项为$C_6^22^2=60$.

[**答案**] (1)6 (2)60

[**点评**] 求展开式中某些特定的项,应先利用通项公式确定那些项是要求的项,再用通项公式求解.常见问题如:求常数项(未知数的指数为零),求有理项(项的指数为整数),求某一项的系数,注意某项的系数与某项的二项式系数的区别."搭配法"的关键是搭配要做到不重不漏,我们常用其处理三项及三项以上展开式的系数问题.

[**借题发挥2**] (1)在$\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)^{20}$的展开式中含$x^{-17}$项的系数是________;(用数字作答)

(2)求$(1+x+x^2)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$展开式中的常数项.

例3 $(1+2x)^n$的展开式中第6项与第7项的系数相等,求展开式中二项式系数最大的项和系数最大的项.

[**解析**] 根据已知条件可求出n,再根据n的奇偶性,确定二项式系数最大的项;系数最大的项则由不等式组确定.

[**答案**] $\because T_6=C_n^5(2x)^5$,$T_7=C_n^6(2x)^6$,

由题意,知$C_n^52^5=C_n^62^6$,得$n=8$.

$\therefore (1+2x)^8$的展开式中,二项式系数最大的项为

$T_5=C_8^4(2x)^4=1\ 120x^4$.

设第$r+1$项系数最大,则有

$$\begin{cases}C_8^r2^r\geqslant C_8^{r-1}2^{r-1},\\ C_8^r2^r\geqslant C_8^{r+1}2^{r+1},\end{cases}$$

即$$\begin{cases}\dfrac{8!\times 2}{r!\ (8-r)!}\geqslant\dfrac{8!}{(r-1)!\ (8-r+1)!},\\ \dfrac{8!}{r!\ (8-r)!}\geqslant\dfrac{8!\times 2}{(r+1)!\ (8-r-1)!}.\end{cases}$$

解得$5\leqslant r\leqslant 6$,$\because r\in\mathbf{N}$,$\therefore r=5$或$r=6$.

$\therefore$ 系数最大的项为$T_6=1\ 792x^5$,$T_7=1\ 792x^6$.

[**点评**] (1)求二项式系数最大的项,直接根据二项式系数的性质去求;求系数最大的项,则要根据比较系数法去求.即设第$r+1$项系数最大,再由$\begin{cases}T_{r+1}\text{的系数}\geqslant T_r\text{的系数},\\ T_{r+1}\text{的系数}\geqslant T_{r+2}\text{的系数},\end{cases}$求$r$的值.

(2)注意展开式中系数最大的项与二项式系数最大项的区别.