数学解题的五种策略

廉师友

渭南地区数学会
渭南师专数学系

数学解题的五种策略

内 容 提 要

这本小册子从方法论的角度给出了数学解题的五种策略，即所谓“变而解之”、“间接解之”、“试而解之”、“比而解之”和“逐步逼近”。这五种策略对解各种各类数学题都适用，因而具有推广值价（书中部分内容已在有关杂志上发表过）。事实证明，了解和掌握这些策略，将有助于开阔思路，活跃思维，提高数学解题能力和数学思想水平。

该书的特点是：理例结合，图文并茂，例题广泛，适应面宽。故它可供大学生、中学生、数学教师以及自学青年阅读和参考，也可作为“数学方法论”课程的教学参考或补充材料。

前　言

近年来，不论在中学还是在大学，培养和提高学生的能力，普遍受到重视。这本小册子就是从提高能力的目的出发而撰写的。书中从方法论的角度给出了数学解题的五种策略。笔者旨在通过对这五种题解策略的论述，能使读者从思想上建立起一些解题的“宏观”思考方法和技术技巧；同时还想使读者能够把自己已掌握的方法和技巧系统化，条理化。这样，在遇到数学问题时就会思路开阔，心中有“数”，而不至于胡思乱想，或束手无策。为了使读者能深刻领会这些策略的精神实质和具体应用，书中还列举了初等数学和高等数学中的一些典型例题。（只有中学程度的读者可以跳过高等数学例题，这样也并不影响对这五种策略的理解和领会）。如果读者通过对这本小册子的阅读，在思想上确有收益和启发，那么作者将会得莫大的欣慰。

由于自己知识微薄、水平有限，故书中的缺点错误一定不少，敬请读者提出批评意见！

本书的撰写受到渭南地区数学会和渭南师专数学系的领导同志的热情支持，王云山老师在百忙中审阅了手稿。在此，深表谢意！

作者

1986年10月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

数学解题的五种策略

引　言

数学解题，同做其它任何事情一样，需要有一定的方法。但方法中有具体方法，也有一般方法。掌握了具体方法，只能解决某个具体问题；而掌握了一般方法，则可开阔你的思路，活跃你的思维，提高你的能力和水平。这本小册子谈的就是数学解题的一般方法。书中共给出了五种解题的一般方法——称之为数学解题的五种“策略”。下面就一一介绍之。

一、变而解之

所谓“变而解之”，就是当不能顺利解决某个数学问题时，我们就把所考虑的对象或整个问题适当地变个形式；或者换个说法；或者通过某种手续或关系，把原对象或原问题转换成另一个对象或另一个问题，然后再解之。

为什么要这样做呢？这是因为，同一个问题经过适当变形或改写，就可能易于入手、便于分析；或者会使问题“原形毕露”，从而容易找到解决的途径和方法。而把原问题转换成另一个问题，则新问题就可能容易解决；或者所得的新问题已是我们熟悉的问题；或者新问题就可能用别的理论和方法来解决。比如，我们要求$\cos 15^\circ$的值，但其值不能直接求得，那么我们就把它变形为$\cos\frac{30^\circ}{2}$，经这么一变，问题就迎刃而解了。又如，当我们直接证明$f(x)\leqslant g(x)$有困难时，我们把它改写为$f(x)-g(x)\leqslant 0$来证明，有时却很容易。再如，对于一个难以解决的几何问题，我们通过建立坐标系把它转变为代数问题后，就可用代数中的理论和方法来处理了。下面我们再看一些具体的例子。

例1.设n为自然数，试证：n^3+11n能被6整除。

对于这道题，初看可能不易入手。但可以看出，n^3+11n可以变为$(n^3-n)+12n$，进而为

$$(n+1)n(n-1)+12n$$

经这么一变，证明就很容易了。事实上，由于$(n+1)n(n-1)$是三个连续整数之积，故能被$3!=6$

整除。又$12n$也能被6整除，所以，它们之和
$(n+1)n(n-1)+12n=n^3+11n$就能被6整除。

例2．求数列$\frac{1}{1\cdot 2}$，$\frac{1}{1\cdot 3}$，…，$\frac{1}{n(n+1)}$之和。

这个问题乍一看去似乎很困难，但仔细考察，不难发现：

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

经这么一变，则立即可以看出，其和等于$1-\frac{1}{n+1}$.

例3．方程 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$表示什么曲线？

易见，仅从原方程考虑，不易判断其表示的曲线．那么，我们取坐标变换

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}$$

$$y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}$$

则原方程就变为标准方程

$$y'^2=\sqrt{2}\,ax'$$

现在，原方程表示的曲线便一目了然了．

上面这几个例子说明，适当变形，往往能化繁为简，化难为易。

例4．试证：没有整数a、b、c，能够满足

$$a^2+b^2=8c+6$$

这个问题，乍一看去可能会无法下手。但不难看出，它可以改写为：

证明：没有两个整数的平方和被8除余6。

虽然仅仅是换了个说法，但问题易于入手了。事实上，因为每个整数都有下列形式之一：

$$4n,\ 4n+1,\ 4n+2,\ 4n+3$$

它们的平方分别是：

$$16n^2,\ 16n^2+8n+1,\ 16n^2+16n+4,\ 16n^2+24n+9$$

这些数被8除的余数是0，1，4。但容易看出，这三个余数的任意两个（可以相同）之和都不等于6，故原命题成立。即 $a^2+b^2 \neq 8c+6$，对于任何整数a、b、c。

例5．设 a,b,c为互不相等的实数，试证：不论 x 为何实数，总有

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

可以看出，要把上式左端化简为1，则相当麻烦。那么我们设

$$f(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+$$

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1$$

不难看出，f(x)为一二次多项式。于是，原题就可改写为：

试证：多项式f(x)＝0.（其中a、b、c为互不相等的实数）

经这么一改写，问题就很容易解决了。事实上，易见 $f(a)=f(b)=f(c)=0$。所以，a、b、c 都是 f(x)的根。但f(x)是二次多项式，其根最多不能超过两个。而 a、b、c互不相等，故只有f(x)＝0。

这两个例子说明：把问题改写（即换个说法），往往也能使问题易于入手，从而顺利地找到解决的途径甚至捷径。

例6．若 $|a|<1$，$|b|<1$，

试证：$\left|ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right|\leqslant 1$

此不等式若用一般方法证明，将比较麻烦。那么，我们作"变量替换"，令 $a=\sin\varphi$，$b=\cos\Psi$，则原不等式变为

$$\left|\sin\varphi\cos\Psi\pm\cos\varphi\sin\Psi\right|\leqslant 1$$

这个不等式的证明已非常容易．直接应用和角公式即得

$$左端=\left|\sin(\varphi+\Psi)\right|\leqslant 1.$$

例7．如图1，一园台上底半径 γ 为5cm，下底半径R为10cm，母线AB的长度L为20cm，从AB中点M拉一条细绳，围绕园台侧面转到B点。问这条细绳的最短长度应是多少？

这是一个立体几何问题。可以看出，如果我们仅从园台考虑，则问题是不易解决的。于是，我们设想把园台侧面沿线段AB切开并且拉平铺在平面上，不难想到，园台侧面的展开图是一个扇形（如图2）．由图2立即可以看出，原题中细绳的最短长度也就是线段 B_1M 的长度。这样，我们就把一个立体问题转变为平面问题了。它的解决就比较容易了。事实上，设扇形的中心角为 α，因为

$$\overset{\frown}{BB_1}-\overset{\frown}{AA_1}=(L+OA)\cdot\alpha-OA\cdot\alpha=L\cdot\alpha$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{2\pi(R-\gamma)}{L}=\frac{2\pi\cdot 5}{20}=90^\circ$$

又因为 $\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{R}{\gamma}=\dfrac{10}{5}=2$，

$\therefore\quad OA=AB=20cm$

$\therefore\quad OB=OB_1=40cm,\ OM=30cm$

$\therefore\quad B_1M=\sqrt{30^2+40^2}=50(cm)$

即细绳的最短长度应是50cm。

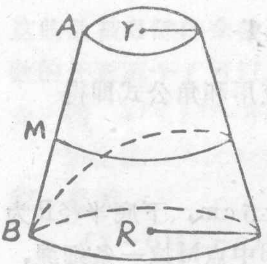


图1

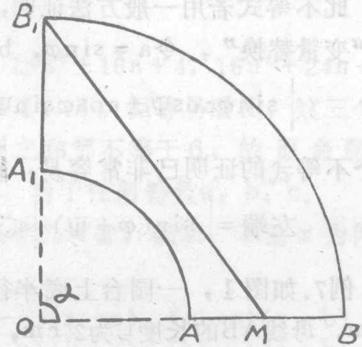


图2

例8.把10个小灯泡连成一串根据各个位置的灯泡亮或不亮表示信号，问：这种装置共能表示多少种不同的信号？

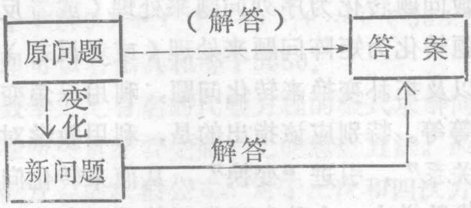
可以看出，这是一个“排列”问题。但究竟是什么排列？一时还使人迷惑不解。那么，我们这样来办：用“1”表示灯亮，用“0”表示灯不亮。于是，这十个灯泡哪个亮，哪个不亮，就对应这十个位置上哪个是1，哪个是0。这样，用灯泡表示的一种信号，就对应由1和0组成的一个十位数码；反之，一个由1和0组成的十位数码，也就对应一种信号。即信号与十位数码之间建立了一一对应关系。于是，原问题就可转变为：“用1和0可以组成多少个不同的

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbo

十位数码”？显然，这个新问题就简单明瞭多了。一眼就可以看出，它是一个“从两个不同的元素中，每次取出10个元素的可重复排列”问题。众所周知，其总种数为2^{10}。

这几个例子说明：通过某种手续把原对象或原问题转变为新对象或新问题，往往也可使问题顺利解决。

类似于上面的例子是举不胜举的（读者由以上例子的启发，也一定能举出其它数学分支的各种各样的例子）。然而，仅由以上例子就可以看出，变而解之的确是一种重要的解题策略。它的特点是通过把问题适当“加工”、“改造”、“变换”，而使其“改头换面”来求得问题的解决。或者说，它是通过或借助问题的变化、“运动”，而使问题得到解决的。把这种方法概括一下，可用如下的框图来表示：



上面的例子也向我们说明：“变化”在数学解题中有着非常重要的作用。变，就可能化繁为简；变，就可能化难为易；变，就可能找到解题的途径。而不变，则可能就没有出路，或者就要走远路。正如恩格斯所说：形态的变化，不是无聊的游戏，而是解决问题的有力杠杆。事实上，在数学中有许多问题，乍一看去似乎十分繁难，但只要把它适当一变，却又显得非常简单；有许多问题，初看起来似乎无法下手，但只要把它适当一变，便会立即找到解决的途径；还有一些问题，只要适当一变，其解法甚至其结果便就一目了然

了。

变而解之，实际上是一种重要的数学思想。在通常的数学解题与研究中，我们也时常自觉不自觉地在运用着这种思想与方法。例如：如前所述，在初等数学中我们常常通过建立坐标系，把几何问题转化为代数问题（或者反之），通过某种运动或变换把空间问题转化为平面问题，利用换元或平方运算把无理方程问题转化为有理方程问题等等都是一些典型的例子。还有，象用同解变形来解方程（组）及不等式（组），利用平移、旋转及反射等几何变换来转化问题，通过几何、代数和三角问题的互化来处理问题，……等等。在高等数学中，我们常常利用变量替换来求积分、求极限、解微分方程等，也是变而解之的典型例子。还有象利用对应关系，把级数问题转化为序列问题来处理（或者反之），把线性变换问题转化为矩阵问题来处理（或者反之）、利用仿射、射影以及拓扑变换来转化问题，利用保角变换来转化问题，……等等。特别应该指出的是，利用数学对象之间的某种“对应关系”，引进“变换”，从而来转化问题的方法，已成为现代数学中一个基本而常用的重要方法。总之，变而解之这种思想与方法在数学中有着十分广泛的应用。可以说，它是数学解题与数学研究中的一个最基本的思想与方法。

纵观数学发展史，变而解之的例子也是屡见不鲜的。例如我国古代著名数学家刘徽，在求园周率时，就运用了这一思想。为了求园周率，刘徽先作了一个半径为1尺的园，于是该园的面积为

$$S=\pi r^2=\pi\cdot 1^2=\pi.$$

由这个式子可以看出，要求园周率 π 的值，只须求出该园的面积即可。这样就把求园周率的问题巧妙地转变成了求园面积的问题。于是刘徽再用“割园术”求出了园面积的近似值，从而也就得到了园周率的近似值（刘徽求出了正192边形的面积，从而得到 $\pi \approx 3.14$）。

又如大数学家高斯，在上小学的时候，有一次老师出了这样一道数学题：求 $1+2+3+\cdots+100$ 的和，当老师刚解释完题目，别的学生都还在逐个数地做加法运算的时候，高斯就已把答卷交给了老师，他的答案是5050，这是正确的。高斯是怎样快速而准确地求得上式的和呢？其实高斯在解决这个问题时，就用的是变而解之的策略。他没有逐个数地依次相加，而是先把原式变形为

$$(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)$$

于是立即可以看出其和等于5050。

再如，数学史上有名的代数方程的根式求解问题，其研究和解决过程始终贯穿着变而解之的思想方法。最初人们导出了二次代数方程的求根公式，对于三次和四次方程，人们通过“换元”使它们转化成了二次方程，从而也导出了它们的求根公式（这就是说运用变而解之的思想，人们解决了三次和四次方程的根式求解问题）。但对于五次以上的代数方程无论怎样换元，也导不出其求根公式，所以五次以上的代数方程的根式求解就成了一个世界难题。此问题提出后，曾吸引了不少数学家，但几百年过去了直到19世纪20年代，此问题仍未获解。最后，到了1830年，法国青年数学家伽罗华（Galois）才最后解决了这个问题。伽罗华解决这个问题仍然用的是变而解之的策略，但这次他不是用换元来变化问

题，而是利用“群”的概念把方程的根式求解问题转化成了群论中的问题，从而方便这个悬了三百多年的世界难题得到了园满的解决。

为什么一个繁难的问题，一经适当变形、改写、或“变换”，就可能得到顺利解决呢？在前面，我们对此已作过分析。但我们说，从根本上来讲，是因为通过这些手续，原来不能或不易直接应用有关理论和方法来解决的问题，就转化成了能直接或易直接应用有关理论方法来解决的问题。事实上，在我们遇到的数学问题中，有些直接应用我们已知的有关理论和方法就能得到解决。例如，要计算“$\cos 30° + \sin 30°$”或要证明“$12n+6$能被2整除”（这些问题，一般就是所谓的简单题或容易题，教科书上的练习题多属于此类）；而有些题则不然，从表面上看，它们不能直接应用有关理论和方法来解决，或者虽然可以，但比较麻烦（这些题一般也就是所谓的复杂题或难题，前面所举的例子都属于此类）。那么，要解决这后一类问题，就得通过“变”的手续把它们转化成前一类问题。否则。就不能或不易解决。例如前面的例1，如果不变，就不能直接说明 n^3+11n能被6 整除。这时，也许你对有关“整除”方面的理论很熟悉，但也是无能为力。而只有当经过恒等变形，把 n^3+11n变成 $(n+1)n(n-1)+12n$ 时，我们所掌握的理论才发挥了威力。又如例8，如果不变，就不容易看清是什么排列，因而也就很难求出其种数。这时也许你把各种排列的计算公式能背得滚瓜烂熟，但也是无济于事。而只有当把问题“变换”以后，是什么排列才一目了然了。这时我们所掌握的计算公式才有了用场。所以，把问题适当变形，改写，或“变

换”的这种手续和过程，就好象人体肠胃消化食物的“手续”和过程一样——把不能或不易被吸收的食物“变形”、分解……，使其转化成能被吸收或易被吸收的成份。

二、间接解之

所谓“间接解之”，顾名思义，就是间接地解决问题。怎么间接地解决问题呢？简单来讲，就是解决某问题不从该问题本身考虑进行解决，而是设法通过解决与原题有关的另一个问题，使原问题得到解决。具体来说，间接解题又可分为以下几种：

1. 通过解决蕴含原问题的新问题，使原问题间接获解。

所谓蕴含原问题的新问题，就是比原问题更普遍、更一般，或更“大”即以原问题为子问题的问题；还包括那些虽比问题“小”或虽与原问题似乎没有“大、小”关系，但却能从它的结论中推得原问题的结论的那样的问题。（这段话通过后面的例子读者将会明白）。由于新问题蕴含着原问题，所以新问题的解就蕴含着原问题的解。从而当新问题被解决时，原问题也就跟着被解决了，我们试看下面的例子。

例1. 证明 $\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}} > \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{9}}$ （1）

直接证明此不等式比较困难，那么我们证明

$$a^{x_1} > a^{x_2} \quad (2)$$

其中 $0 < a < 1$，$x_1 < x_2$. 可以看出，这是（1）式的一般情形，由指数函数的性质可知 $y = a^x$ 是减函数。所以(2)式显然成立，从而（1）式也成立。这样就间接地解决了原

问题。

例2.证明 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000}}>\sqrt{1000}$（1）

对于这个不等式我们也不直接证明，我们先考虑它的一般的情形：

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \quad (2)$$

不等式（2）是一个关于自然数n的不等式，故我们可用数学归纳法进行证明（证明从略）。由于（2）成立，所以（1）式也就自然成立了。

例3.设n为自然数，试证 $n^3+11n+1$ 不能被6整除。

可以看出，仅从此命题本身考虑，是不容易证明的，但不难看出，若能证明"n^3+11n能被6整除"则 $n^3+11n+1$ 就一定不能被6整除，而这个新命题我们在前面已经证明过了（见一、例1）。

例4.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

易见，直接求此极限是困难的。但我们知道，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。于是，我们考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 的收敛性。

因为 $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!}{n^n}=$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\longrightarrow\frac{1}{e}<1\ (n\to\infty)$$

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbo