上海市教辅畅销品牌

新高考新思路

XINGAOKAO XINSILU FUDAO YU XUNLIAN

辅导与训练

主编 徐岳灿

数学 SHUXUE

高中三年级

上海科学技术出版社

新高考新思路
辅导与训练
数学

高中三年级

主编 徐岳灿

上海科学技术出版社

内容提要

《新高考新思路辅导与训练　数学　高中三年级》一书根据上海市二期课改数学学科课程标准，并根据2017年起高考综合改革方案，以高中数学在高中三年级第二学期不分文理的拓展内容为依据，适应课程标准和高考要求的变化编写而成.全书分两部分，第一部分按章分单元编写，每单元包括知识提要、例题选讲、单元练习，章末附有本章测试；第二部分为走近高考，主要为各章近年高考题选.本书通过归纳各个知识要点，指导各类题的解法，让学生牢固掌握数学基础知识，及时消化所学知识内容，克服学习上的困难，提高学生分析问题和解决问题的能力.

图书在版编目(CIP)数据

新高考新思路辅导与训练. 数学. 高中三年级/徐岳灿主编.—上海：上海科学技术出版社，2016.6
ISBN 978-7-5478-3054-3

Ⅰ.①新…　Ⅱ.①徐…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 099343 号

责任编辑　武执政　杨铮园　朱先锋

新高考新思路辅导与训练　数学　高中三年级
主编　徐岳灿

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版
(上海钦州南路71号　邮政编码200235)
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001　上海福建中路193号　www. ewen. co
××印刷有限公司印刷
开本787×1092　1/16　印张24.5
字数540千字
2016年6月第1版　2016年6月第1次印刷
ISBN 978-7-5478-3054-3/G・676
定价：53.00元

出 版 说 明

上世纪90年代初，上海科学技术出版社约请了上海教材主编和一些著名中学的资深教师推出《辅导与训练》丛书，涉及数学、物理、化学等出版社的优势学科.这套丛书在使用过程中，经多次修订改版，一直以“辅导得当、训练有素”而深受广大师生的青睐，已经成为上海市场的品牌教辅.

本世纪初，为适应上海“二期课改”的需要，我社根据新课标教材，又推出了《新教材辅导与训练》丛书，同样受到读者肯定.随后推出的《新思路辅导与训练》丛书也受到了广泛好评.现在，我社在总结各版优点的基础上，根据2017年起高考综合改革方案的实施，适应课程标准和高考要求的变化，特别是从2017年起，高考数学不再文理分科，对本套丛书进行再次修订，旨在帮助学生理解“新高考”涉及的知识内容(基本知识、基本技能和相关的重点、难点)，克服学习上的困难，增长自学能力，提高学科素养.

《新高考新思路辅导与训练　数学　高中三年级》是以“新高考”要求、《上海市中学数学课程标准》和现行教材，并结合数学在高中三年级第二学期不分文理的拓展内容为依据编写的.内容紧密围绕“新高考”，专为高中三年级学生而精心设计编写.本书分为两大部分，第一部分以章节为单位编写，每节设有知识提要、例题选讲和单元练习等栏目，每章后配有本章测试.

本书第二部分为“走进高考”，收录了从2011年起，近五年的

全国各省高考优秀试题，这部分试题都是经过编者反复斟酌，具有一定的典型性，适合各类高中三年级学生使用，以便读者随时把握与衡量自己的学习水平.这种高效的练习必将有利于读者高考数学成绩的提升.

本书由上海中学教师编写，每位编者都有多年的毕业班教学经验，所教学生高考成绩相当突出.其中吕宝兴老师任主审，徐岳灿老师任主编，负责统稿，徐岳灿老师负责编写第一、二、三章内容，吴坚老师负责编写第四章内容，周珺老师负责编写第六、十章内容，王永庆老师负责编写第五、八、九章内容，刘丽霞老师负责编写第七、十一章内容.

为初、高中师生提供一套适用而又有指导意义的数学辅导书，是我们一贯的心愿，也是当前数学教学和学生、家长的需要.对于我们所做的努力和尝试，诚挚地期望广大读者给予批评指正.

上海科学技术出版社

2016年6月

辅导与训练

目　录

第一部分　高考复习

第二部分　走近高考

第一部分
高考复习

第一章　集合与函数

一、集合与命题

知识提要

1. 集合中的元素具有三个特性:确定性、互异性和无序性.元素与集合是从属关系,只用符号“$\in$”或“$\notin$”表示.

2. 集合的主要表示方法有两种:列举法与描述法.要注意恰当使用.

3. 集合与集合之间的关系:可以将$\subseteq$、$\subsetneqq$、$=$与实数的$\leqslant$、$<$、$=$进行类比,将集合运算“$\cap$”“$\cup$”与实数的“$\times$”“$+$”运算进行类比,发现集合的交、并运算也满足交换律、结合律和分配律.

4. 命题具有四种形式.注意四种形式的书写与相互之间的关系,关键是要分清命题的条件与结论,建议写成“如果……,那么……”的形式.

5. 充要条件的判断与证明,要注意方法的合理使用.

例题选讲

1. 集合的概念与运算

例 1　(1) 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2-2x-1, x\in\mathbf{R}\}$,
$B=\{y\mid y=-x^2+2x+15, x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\cap B$;
(2) 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=x^2-2x-1, x\in\mathbf{R}\}$,
$N=\{(x,y)\mid y=-x^2+2x+15, x\in\mathbf{R}\}$,求 $M\cap N$.

解　(1) $A=\{y\mid y=x^2-2x-1, x\in\mathbf{R}\}$,表示 $y=x^2-2x-1$ 的值域.由 $y=x^2-$

$2x-1\geqslant -2$，解得 $A=[-2,+\infty)$。同理，得 $B=(-\infty,16]$。

所以　$A\cap B=[-2,16]$。

(2) $M=\{(x,y)\mid y=x^2-2x-1,x\in\mathbf{R}\}$表示抛物线 $y=x^2-2x-1$ 上的点集，因此 $M\cap N$ 表示同时在曲线 $y=x^2-2x-1$ 与 $y=-x^2+2x+15$ 上的点集，解方程组

$$\begin{cases}y=x^2-2x-1,\\ y=-x^2+2x+15,\end{cases}$$

得$\begin{cases}x=4,\\ y=7\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\ y=7.\end{cases}$

所以　$M\cap N=\{(4,7),(-2,7)\}$。

说明　用描述法表示集合时，要弄清集合中元素的特征形式，如$\{y\mid y=\sqrt{1-x^2},x\in\mathbf{R}\}$，$\{x\mid y=\sqrt{1-x^2},x\in\mathbf{R}\}$，$\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2},x\in\mathbf{R}\}$表示三个不同的集合。其中起到关键作用的是代表元素的特性。这三个集合分别表示函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的值域，定义域以及函数表示的图像（上半个单位圆）上的点所组成的集合。

例 2　已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-2}{x-1}=a+2,x,y\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{(x,y)\mid(a^2-4)x+(a-2)y=16,x,y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$。求 a 的值。

解　当 $a^2-4=a-2=0$，即 $a=2$ 时，$B=\varnothing$，显然满足 $A\cap B=\varnothing$；

当集合 A 与 B 表示的直线互相平行且不重合时，即

$$a+2=-\frac{a^2-4}{a-2}.$$

得 $a=-2$ 时，$A\cap B=\varnothing$。

由于集合 A 表示的不是完整的一条直线，需排除点$(1,2)$，因此当两直线的交点坐标为$(1,2)$时，仍有 $A\cap B=\varnothing$。即

$$(a^2-4)+2(a-2)=16.$$

解得 $a=-6$ 或 $a=4$。

综上所述：当 $a=\pm2$，$a=-6$ 或 $a=4$ 时，$A\cap B=\varnothing$。

说明　(1) 本例采用数形结合思想求解，容易使人理解。但要注意 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-2}{x-1}=a+2,x,y\in\mathbf{R}\right\}$与 $A'=\{(x,y)\mid y-2=(a+2)(x-1)\}$的区别。后者表示过点$(1,2)$，斜率为 $a+2$ 的一条直线上所有点的集合，但前者需要排除点$(1,2)$。

(2) 必须注意空集在集合问题中的特殊地位，如本例中当 $B=\varnothing$时显然符合题意。另外空集在实际问题中有多种可能的表现方式，在接下去的例题或习题中将充分展示给大家。

例 3　已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-24<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0,x\in\mathbf{R}\}$。

(1) 实数 a 在什么取值范围内时，$A\cap B=\varnothing$；

(2) 实数 a 在什么取值范围内时，$B\subsetneqq A$。

解　(1) $A=\{x\mid x^2-2x-24<0\}=(-4,6)$。

不等式 $x^2-4ax+3a^2<0$，即$(x-3a)(x-a)<0$。

当 $a>0$ 时，$B=(a,3a)$；当 $a<0$ 时，$B=(3a,a)$；当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$。

因此，若 $a>0$，则当 $a\geqslant6$ 时，$A\cap B=\varnothing$；若 $a<0$，当 $a\leqslant-4$ 时，$A\cap B=\varnothing$；当 $a=0$ 时，显然成立。综上所述：实数 a 的取值范围为 $a\geqslant6$，$a\leqslant-4$ 或 $a=0$。

(2) 由 $B \subsetneqq A$，得

当 $a>0$ 时，$-4<a<3a\leqslant 6$　或　$-4\leqslant a<3a<6$，即 $0<a\leqslant 2$；

当 $a<0$ 时，$-4<3a<a\leqslant 6$　或　$-4\leqslant 3a<a<6$.解不等式组，得 $-\dfrac{4}{3}\leqslant a<0$.

当 $a=0$ 时，$B \subsetneqq A$.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left[-\dfrac{4}{3},2\right]$.

例 4　已知 $f(x)=x^2+ax+b$，$a,b\in\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid x=f[f(x)],x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 写出集合 A 与 B 之间的关系，并证明；

(2) 当 $A=\{-1,3\}$时，用列举法表示 B.

解　(1) 在集合 A 中任取一个元素 x_0，因为 $x_0\in A$，即 x_0 满足 $x_0=f(x_0)$.那么，

$$f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0.$$

即 $x_0=f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in B$.因此 $A\subseteq B$.

(2) 由 $f(x)=x$，得 $x^2+ax+b=x$，

即　$x^2+(a-1)x+b=0$ 有两解 $x_1=-1$，$x_2=3$.

由韦达定理，得　$\begin{cases}-1+3=-(a-1),\\ -1\times 3=b.\end{cases}$

解方程组，得　$\begin{cases}a=-1,\\ b=-3,\end{cases}$　$\therefore$　$f(x)=x^2-x-3$.

$\therefore$　$f[f(x)]=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$.

又当 $x\in B$ 时，$x=f[f(x)]$，得　$x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$.

可化为　$(x^2-x-3)^2=x^2$，

即　$x^2-x-3=x$ 或 $x^2-x-3=-x$.

解方程，得 $x=-1,3$ 或 $\pm\sqrt{3}$.即 $B=\{-1,3,\pm\sqrt{3}\}$.

说明　本例在考虑 A 与 B 的关系时，用 $A\subseteq B$ 表示.不能用 $A\subsetneqq B$ 表示.例如当 $f(x)=x^2$ 时，$A=B=\{0,1\}$.

2. 命题的四种形式和充要条件

例 5　设命题甲：函数 $y=(1-c)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；命题乙：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.如果命题甲与命题乙至少有一个命题为真命题，求 c 的取值范围.

解　函数 $y=(1-c)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，即 $0<1-c<1$.

解不等式，得 $0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

记 $f(x)=x+|x-2c|$，

$$f(x)=\begin{cases}2x-2c, & \text{当 } x\geqslant 2c \text{ 时；}\\ 2c, & \text{当 } x<2c \text{ 时.}\end{cases}$$

只需求出满足 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值恒大于 1 的 c 的取值范围即可.

$f(x)_{\min}=2c>1$，得 $c>\dfrac{1}{2}$.

因为命题甲与命题乙至少有一个命题为真命题，所以 c 的取值范围满足 $(0,1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)=(0,+\infty)$ 即可.

所以，所求 c 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

说明　遇到“至少”问题，可采用两种做法.一是直接法，写出每个命题为真时的条件，然后取各自的并集即可；二是间接法，考虑问题的反面，即所有命题均为假的条件，然后再取其补集即可.

单元练习

A　　级

一、选择题

1. 满足 $\{1,2\}\subsetneqq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 X 的个数为(　　).

(A) 4　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

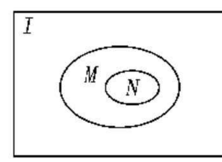
2. 设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，集合 $M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 是(　　).

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$　　(C) $\{a,c\}$　　(D) $\{b,e\}$

3. 已知集合 I,M,N 的关系如图，则 I,M,N 的关系为(　　).

(A) $\complement_I M\supseteq\complement_I N$　　(B) $M\subseteq\complement_I N$

(C) $\complement_I M\subseteq\complement_I N$　　(D) $M\supseteq\complement_I N$



(第 3 题)

4. 给出以下四个命题：(1) 若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=1$ 或 $x=2$；(2) 若 $-2\leqslant x<3$，则 $(x-2)(x-3)\leqslant 0$；(3) 若 $x=y=0$，则 $x^2+y^2=0$；(4) 若 $x,y\in\mathbf{N}^*$，$x+y$ 是奇数，则 x,y 中一个是奇数，一个是偶数，则(　　).

(A) (1)的逆命题为真　　(B) (2)的否命题为真

(C) (3)的逆否命题为假　　(D) (4)的逆命题为假

5. 已知 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\cos\frac{n\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\sin\frac{2m-3}{6}\pi,m\in\mathbf{Z}\right\}$，那么 A 和 B 的关系是(　　).

(A) $A\subsetneqq B$　　(B) $A\supsetneqq B$　　(C) $A=B$　　(D) $A\neq B$

二、填空题

1. 某班学生共 45 人，一次摸底考试：数学 20 人得优，语文 15 人得优，这两门都不得优的有 20 人，则这两门都得优的人数为______.

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid 0<x-m<9\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 m 的取值范围是__________.

3. 设 $M=\{(x,y)\mid mx+ny=4\}$，且 $\{(2,1),(-2,5)\}\subsetneqq M$，则 $m=$______，$n=$______.

4. 已知集合 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{x\mid x=a\cdot b,a,b\in A$，且 $a\neq b\}$，则集合 B 的子集个数为______.

5. “$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$”是“$b^2=ac$”的______________条件.

6. 已知集合 $M=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$N=[0,5)$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup(\complement_{\mathbf{R}}N)=$__________.

7. 已知真命题“$a\geqslant b\Rightarrow c>d$”和“$a<b\Rightarrow e\leqslant f$”，则“$c\leqslant d$”是“$e\leqslant f$”的__________条件.

8. 若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$，$g(x)$ 均为二次函数，$P=\{x \mid f(x)<0\}$，$Q=\{x \mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集可用 P，Q 表示为________.

9. 设集合 $A=\{x \mid 2\lg x=\lg(8x-15), x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, \cos\dfrac{x}{2}>0, x\in\mathbf{R}\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为________个.

10. 已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$________.

三、解答题

1. 已知 $U=\mathbf{R}$ 且 $A=\{x \mid x^2-5x-6<0\}$，$B=\{x \mid |x-2|\geqslant 1\}$. 求

(1) $A\cap B$；　(2) $A\cup B$；　(3) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

2. 设集合 $A=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{1}{32}\leqslant 2^{-x}\leqslant 4\right\}$，$B=\{x \mid x^2-3mx+2m^2-m-1<0\}$.

(1) 当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，求 A 的非空真子集的个数；(2) 若 $B=\varnothing$，求 m 的取值范围；

(3) 若 $A\supseteq B$，求 m 的取值范围.

3. 已知集合 $A=\{x \mid y=\sqrt{2x+1}\}$，$B=\{y \mid y=\sqrt{x^2+1}\}$，$C=\{(x,y) \mid y=\sqrt{x^2+1}\}$，试讨论集合 A，B，C 三者之间的关系.

4. 设非空集合 $A=\{x \mid x^2+(b+2)x+b+1=0\}$，$b\in\mathbf{R}$，求集合 A 中所有元素的和.

5. 设集合 $A=\{(x,y) \mid y^2=x+1\}$，集合 $B=\{(x,y) \mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，集合 $C=\{(x,y) \mid y=kx+b\}$，问是否存在自然数 k，b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？证明你的结论.

B　级

一、选择题

1. 设 $A=\{(x,y) \mid |x+1|+(y-2)^2=0\}$，$B=\{-1,2\}$，则必有（　　）.

(A) $A\supsetneqq B$　　(B) $A\subsetneqq B$　　(C) $A=B$　　(D) $A\cap B=\varnothing$

2. 集合 $M=\{y \mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $N=\{x \mid y=\sqrt{3-x^2}\}$，则 $M\cap N$ 等于（　　）.

(A) $\{(-\sqrt{2},1),(\sqrt{2},1)\}$　　(B) $[0,\sqrt{3}]$

(C) $[-1,\sqrt{3}]$　　(D) $\varnothing$

3. “$a^2+b^2>0$”是“$ab\neq 0$”的（　　）.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

4. 集合 A，B，C 满足 $A\cup B=A\cup C$，则成立的等式是（　　）.

(A) $B=C$　　(B) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap C$

(C) $A\cap B=A\cap C$　　(D) $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=A\cap\complement_{\mathbf{R}}C$

5. 设全集为实数集 $\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，集合 $P=\{x \mid f(x)\neq 0\}$，$M=\{x \mid g(x)\neq 0\}$，那么集合 $\{x \mid f(x)\cdot g(x)=0\}$ 等于（　　）.

(A) $\complement_{\mathbf{R}}P\cap\complement_{\mathbf{R}}M$　(B) $\complement_{\mathbf{R}}P\cup M$　(C) $P\cup\complement_{\mathbf{R}}M$　(D) $\complement_{\mathbf{R}}P\cup\complement_{\mathbf{R}}M$

6. 与命题“若 $m\in M$，则 $n\notin M$”等价的命题是（　　）.

(A) 若 $m\notin M$，则 $n\notin M$　　(B) 若 $n\notin M$，则 $m\in M$

(C) 若 $m\notin M$,则 $n\in M$　　　　　　(D) 若 $n\in M$,则 $m\notin M$

二、填空题

1. 已知 $M=\{2,a^2-3a+5,5\}$,$N=\{1,a^2-6a+10,3\}$,$M\cap N=\{2,3\}$,则 a 的值是______.

2. 已知命题 p:不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$,命题 q:$f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数,若"p 或 q"为真命题,"p 且 q"为假命题,则实数 m 的取值范围是______________.

3. 设 $A=\{(x,y)|3x+y=1\}$,$B=\{(x,y)|y=(1-2k^2)x+5\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则 $k=$______.

4. 某班级 50 人,开设英语和日语两门外语课,规定每人至少选学一门,估计报英语的人数占全班 80%到 90%之间,报日语的人数占全班 32%到 40%之间,设 M 是两门都学的人数的最大值,m 是两门都学的人数的最小值,则 $M-m=$__________.

5. 同时满足(1) $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$;(2) 若 $a\in M$,则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有______个.

6. 对于非空集合 M 和 N,把所有属于 M 但不属于 N 的元素形成的集合称为 M 与 N 的差集,记作 $M-N$,那么 $M-(M-N)$等于________.

7. 集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$,$B=\{(x,y)|(x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$,其中 $r>0$,若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,则 r 的值是__________.

8. 已知函数 $f(x)=x|x|+px+q(x\in\mathbf{R})$,给出下列四个命题:(1) $f(x)$为奇函数的充要条件是 $q=0$;(2) $f(x)$的图像关于点$(0,q)$对称;(3) 当 $p=0$ 时,方程 $f(x)=0$ 的解集一定非空;(4) 方程 $f(x)=0$ 的解的个数一定不超过两个.其中所有正确命题的序号是______________.

三、解答题

1. 设 $f(x)=x^2+mx+n$,$A=\{x|f(x)=x,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x|f[f(x)]=x,x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 判断 A 与 B 的关系,并说明理由; (2) 若 $A=\{-1,2\}$,求 B.

2. 已知正整数集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$,其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$,$A\cap B=\{a_1,a_4\}$,且 $a_1+a_4=10$,$A\cup B$ 中所有元素之和为 124,求 A.

3. 已知一元二次方程:(1) $mx^2-4x+4=0$;(2) $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0(m\in\mathbf{Z})$,求方程(1)和(2)的根都是整数的充要条件.

4. 设 a,b 是两个实数,$A=\{(x,y)|x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 xOy 内的点的集合.是否存在实数 a 和 b,使得$A\cap B\neq\varnothing$与$(a,b)\in C$ 同时成立?若存在,求出 a,b 的值,若不存在,请说明理由.

二、函数及其性质

知识提要

1. 函数的定义中强调定义域 D 中的任意 x,都有唯一确定的函数值 y 与之对应.定义域、对应法则与值域是函数的三个要素.函数主要有三种表示方法,即解析法、列表法与图像法.

2. 函数的性质主要包括定义域、值域、奇偶性、单调性、零点以及函数的最大(小)值.

函数的定义域关于原点对称是此函数为奇函数(或偶函数)的必要条件,函数的奇偶性还体现在其图像具有对称性:奇函数$\Leftrightarrow$图像关于原点对称,偶函数$\Leftrightarrow$图像关于 y 轴

对称.

函数的单调性要在其定义域 D 内加以研究.往往可从以下三个方面着手:一是根据函数图像的上升或下降;二是利用定义加以判断;三是利用复合函数的单调性的判别法则.

函数的最大(小)值是一个比较复杂的问题,一般可借助函数的单调性、基本不等式、函数图像等方法加以研究.

3. 反函数的概念要着重理解三点:(1) 对于任意一个函数 $y=f(x)$来说,不一定存在反函数,只有是定义域到值域上一一对应的映射所确定的函数才存在反函数;(2) 反函数的定义域与值域分别为原函数的值域与定义域;(3) 互为反函数的两个函数图像关于直线 $y=x$ 对称,其逆命题也成立.

例题选讲

1. 求函数的定义域

由分式的分母不为零、偶次方根的被开方式非负、对数式的真数大于零,底数大于零且不等于 1 等,根据给定函数的解析式,列出不等式(组),解不等式(组)所得的解集就是函数的定义域.

例 1 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x-2}+\lg(x-1)$的定义域.

解 $\begin{cases}5-x^2\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$ 或 $2<x\leqslant\sqrt{5}$.

所以函数的定义域为$(1,2)\cup(2,\sqrt{5}]$.

2. 求函数的值域

例 2 求下列函数的值域:

(1) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$;(2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$;(3) $y=7-\sqrt{-x^2+x+1}$;

(4) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$;(5) $y=x-2+\sqrt{x-3}$;(6) $y=x-2+\sqrt{3-x}$.

解 (1) 由 $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$,得 $(2-y)x^2=y+1$.

$\because$ $y\neq 2$,$\therefore$ $x^2=\dfrac{y+1}{2-y}\geqslant 0$.解不等式,得 $-1\leqslant y<2$.$\therefore$ $y\in[-1,2)$.

(2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{(x-1+1)^2}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$.

$\because$ $x-1+\dfrac{1}{x-1}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,

$\therefore$ $y\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

(3) $\because$ $-x^2+x+1=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$,

$\therefore$ $0\leqslant\sqrt{-x^2+x+1}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,$\therefore$ $y\in\left[7-\dfrac{\sqrt{5}}{2},7\right]$.

(4) 由 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$,得 $y=\dfrac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}=\dfrac{10^{2x}+1-2}{10^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{10^{2x}+1}$.

$\because$ $10^{2x}+1>1$,$\therefore$ $\dfrac{2}{10^{2x}+1}\in(0,2)$.$\therefore$ $y\in(-1,1)$.

(5) 由定义域可知 $x\geqslant 3$,利用函数的单调性,

$\therefore$ $x-2+\sqrt{x-3}\geqslant 1$.$\therefore$ $y\in[1,+\infty)$.

(6) 设$\sqrt{3-x}=t$,则 $x=3-t^2$,且 $t\geqslant 0$.原函数可化为

$$y=3-t^2-2+t=-t^2+t+1.$$

由 $t\geqslant 0$,得 $y\leqslant\dfrac{5}{4}$.$\therefore$ $y\in\left(-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$.

说明 本例给出了求值域的几种常用方法:涉及换元法、基本不等式法、有界函数法、单调函数等等.对于第(4)小题也可用 $10^{2x}=\dfrac{y+1}{1-y}>0$ 求得.对于第(1)小题也可用 $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=2+\dfrac{-3}{x^2+1}\in[-1,2)$求得,或者利用判别式法:原式化为$(y-2)x^2+y+1=0$,即 $\Delta=-4(y-2)(y+1)\geqslant 0$,且 $y\neq 2$.

3. 判断函数的奇偶性

例 3 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$; (2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$;

(3) $f(x)=\lg(10^x+1)-\dfrac{x}{2}$; (4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|x-3|-3}$;

(5) $f(x)=|x|(|x-2|+|x+2|)$.

解 (1) $\sqrt{x^2+1}+x>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,且

$$f(x)+f(-x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)=\log_a[(\sqrt{x^2+1})^2-x^2]=0,$$

即$f(x)=-f(-x)$,$\therefore$ $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$是奇函数.

(2) 由题意,得 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x^2-1\geqslant 0.\end{cases}$ 即 $x^2=1$.函数的定义域为$\{1,-1\}$,此时$f(x)=0$.

所以$f(x)$既是奇函数又是偶函数.

(3) $$\begin{aligned}f(x)&=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}=\lg(10^x+1)+\lg 10^{-\frac{x}{2}}\\&=\lg[(10^x+1)\cdot 10^{-\frac{x}{2}}]=\lg(10^{\frac{x}{2}}+10^{-\frac{x}{2}}),\end{aligned}$$

$x\in\mathbf{R}$,显然$f(x)$为偶函数.

(4) $4-x^2\geqslant 0$,即$-2\leqslant x\leqslant 2$,此时$|x-3|-3=3-x-3=-x$.

原函数可化为 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{-x}$,$f(x)$为奇函数.

(5) $\because$ $f(x)=|x|(|x-2|+|x+2|)$,

$\therefore$ $f(-x)=|-x|\cdot(|-x-2|+|-x+2|)=|x|(|x+2|+|x-2|)=f(x)$.

所以 $f(x)=|x|(|x-2|+|x+2|)$为偶函数.

说明 在判断函数奇偶性时要注意:

(1) 先确定函数定义域.判断是否关于原点对称是先决条件.若将第(2)小题改为 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$,其定义域为$\{1\}$,不关于原点对称,因此$f(x)$是非奇非偶函数.