



尖子生

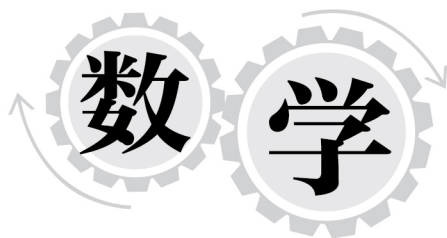
高分题库

从 **课本双基** 练到 **奥数培优**

丛书主编 ○ 叶立军
本册主编 ○ 叶事一
本册副主编 ○ 陈华云

高三 + 高考





尖子生

高分题库

从 课本双基 练到 奥数培优

高三 + 高考

丛书主编：叶立军

本册主编：叶事一

本册副主编：陈华云

编者：毛传挺 叶事一 庄迁福 吕杰富 李 勇 邵 达
陈芝飞 陈国恩 陈华云 陆 季 徐登群 董玲臣
谢尚志 叶杰利 叶晓武



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

数学尖子生高分题库:从课本双基练到奥数培优. 高三+高考/叶事一主编.
—上海:华东理工大学出版社,2015.1

(给力数学·数学尖子生高分题库/叶立军)

ISBN 978-7-5628-4051-0

I. ①数… II. ①叶… III. ①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料
IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 225288 号

给力数学

数学尖子生高分题库:从课本双基练到奥数培优(高三+高考)

.....

丛 书 主 编 / 叶立军

本 册 主 编 / 叶事一

本册副主编 / 陈华云

策 划 编 辑 / 庄晓明

责 任 编 辑 / 刘 婧

责 任 校 对 / 金慧娟

封 面 设 计 / 裴幼华

出 版 发 行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

(021)64252718(编辑室)

传 真:(021)64252707

网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷 / 常熟新骅印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 24.5

字 数 / 623 千字

版 次 / 2015 年 1 月第 1 版

印 次 / 2015 年 1 月第 1 次

书 号 / ISBN 978-7-5628-4051-0

定 价 / 58.00 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

淘宝官网 <http://shop61951206.taobao.com>





随着课程改革的不断深入,人人意识到学好数学的必要性,不同的人在学习数学上得到不同的发展等数学大众化的思想逐渐被人们接受.在高考面临改革的背景下,高中数学教育也正面临着前所未有的挑战与变革.

无论如何变革,学好数学,对每位高中生而言都是有百利而无一害的.

如何学好高中数学?方法是关键.

本书在内容编排上,结合当前高中数学教与学中的难点,兼顾数学尖子生应对奥数竞赛以及名校自主招生考试的需求,设置了以下栏目:

【知识梳理】对每一讲所要掌握的知识点进行了提纲挈领的归纳总结(包括主要公式、定理和常用的数学思想方法),促使学生对本讲的知识体系有一个全局的了解与认识,做到胸有成竹,从而提高学习效率.

【典型例题】精选典型例题,进行深入分析,对每一道题的解题关键点都一一进行了解读.

【双基训练】本单元的基础题,立足于教材本身,通过针对性训练打好基础知识和基本技能.

【能力提升】本单元的中档题,题目难度中等偏上,需要综合运用所学知识,适合中等程度的学生挑战数学高分.

【拓展资源】本单元的压轴题,面向数学尖子生,适合学有余力、准备参加奥数竞赛或参加名校自主招生考试的学生研读.

本书具有以下特点:

(1) 注重挖掘高中数学教材中的数学思想.高中数学教材主要包括以下几类数学思想:①转化思想;②方程思想;③数形结合思想;④函数思想;⑤整体思想;⑥分类讨论思想;⑦统计思想.同学们只要能够深入地理解上述思想方法,并能灵活地应用到具体的解题实践中,就能极大地提高解题能力.

(2) 注重通过针对性训练,锻炼学生的八大数学能力.这些能力分别是:①基础运算能力;②逻辑思维能力;③空间想象能力;④数学语言表达能力;⑤将实际问题抽象为数学问题的能力;⑥数形结合相互转化的能力;⑦观察、实验、比较、猜想、归纳问题的能力;⑧研究、探讨问题的能力和创新能力.

由于水平有限,书中不足之处在所难免,笔者真诚地希望得到读者的建议.

编者
2014 年秋



1	第 1 讲	集合及其运算
9	第 2 讲	命题及其关系、充分条件与必要条件
19	第 3 讲	函数及其图像、性质
31	第 4 讲	基本初等函数的图像与性质
45	第 5 讲	函数与方程、函数模型及其应用
59	第 6 讲	三角函数及其恒等变换
69	第 7 讲	三角函数的图像与性质
79	第 8 讲	平面向量及其应用
91	第 9 讲	解三角形
101	第 10 讲	数列的基础知识及其应用
115	第 11 讲	数列相关知识的综合应用
125	第 12 讲	不等式及不等式的解法
135	第 13 讲	二元一次不等式(组)及简单的线性规划问题
147	第 14 讲	基本不等式及不等式的应用
157	第 15 讲	空间几何体
171	第 16 讲	空间点、直线、平面之间的位置关系
183	第 17 讲	空间的夹角
195	第 18 讲	空间向量在立体几何中的应用
207	第 19 讲	直线与圆
219	第 20 讲	圆锥曲线及其性质
231	第 21 讲	直线与圆锥曲线的位置关系
243	第 22 讲	导数及其应用
257	第 23 讲	计数原理、概率与统计
269	第 24 讲	函数与方程思想和数形结合思想
277	第 25 讲	分类讨论思想、转化与化归思想
285	参考答案	

IDEA



第 1 讲

集合及其运算



知识梳理

一、集合与元素

(1) 元素与集合的关系有且仅有两种：属于（用符号“ $\in$ ”表示）和不属于（用符号“ $\notin$ ”表示），如 $a \in A, b \notin B$ 等。

(2) 集合元素的三个特征：确定性、互异性、无序性。

(3) 集合的表示法：列举法、描述法、图示法。

(4) 常用数集：自然数集 $\mathbf{N}$ ，正整数集 $\mathbf{N}^*$ （或 $\mathbf{N}_+$ ）；整数集 $\mathbf{Z}$ ；有理数集 $\mathbf{Q}$ ；实数集 $\mathbf{R}$ 。

(5) 集合的分类：有限集；无限集。特别地，我们把不含有任何元素的集合叫作空集，记作 $\emptyset$ 。

二、集合间的基本关系

1. 子集、真子集及其性质

对任意的 $x \in A$ ，都有 $x \in B$ ，则 $A \subseteq B$ （或 $B \supseteq A$ ）。

若 $A \subseteq B$ 且在 B 中至少有一个元素 $x \in B$ ，但 $x \notin A$ ，则 $A \subsetneq B$ （或 $B \supsetneq A$ ）。

$\emptyset \subseteq A; A \subseteq A; A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ 。

若 A 含有 n 个元素，则 A 的子集有 2^n 个， A 的非空子集有 $2^n - 1$ 个， A 的非空真子集有 $2^n - 2$ 个。

2. 集合相等

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。

三、集合的运算及其性质

1. 集合的并、交、补

并集： $A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}$ ；

交集： $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$ ；

补集： ${}_U A = \{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}$ 。

U 为全集， ${}_U A$ 表示 A 相对于全集 U 的补集。

2. 集合的运算性质

并集性质: $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$; $A \cup B = B \cup A$; $A \cup U = A \Leftrightarrow A \supseteq B$.

补集性质: $A \cup (\complement_U A) = U$, $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$, $\complement_U (\complement_U A) = A$.

典型例题

例 1

已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 集合 $A = \{0, 1, 3, 5, 8\}$, 集合 $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = (\quad)$.

A. $\{5, 8\}$ B. $\{7, 9\}$ C. $\{0, 1, 3\}$ D. $\{2, 4, 6\}$

解析 思路一: $\complement_U A = \{2, 4, 5, 7, 9\}$, $\complement_U B = \{0, 1, 3, 7, 9\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{7, 9\}$, 故选择 B.

思路二: 借助于韦恩(Venn)图(见图 1-1)求解, 一目了然.

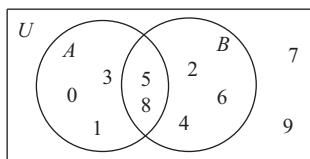


图 1-1

例 2

已知 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 且 $1 \in A$, 求实数 2014^a 的值.

解析 当 $a+2=1$, 即 $a=-1$ 时, $(a+1)^2=0$, $a^2+3a+3=1$ 与 $a+2=1$ 相同, 所以不符合题意.

当 $(a+1)^2=1$ 时, 即 $a=0$ 或 $a=-2$ 时,

① $a=0$ 符合要求,

② $a=-2$ 时, $a^2+3a+3=1$ 与 $(a+1)^2$ 相同, 所以不符合题意;

当 $a^2+3a+3=1$, 即 $a=-1$ 或 $a=-2$ 时,

① 当 $a=-2$ 时, $a^2+3a+3=(a+1)^2=1$, 所以不符合题意,

② 当 $a=-1$ 时, $a^2+3a+3=a+2=1$, 所以不符合题意.

综上所述, $a=0$, 所以 $2013^a=1$.

例 3

已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - (a-2)x - 2a \geq 0\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

解析 因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$,

而 $x^2 - (a-2)x - 2a \geq 0$, 得 $(x+2) \cdot (x-a) \geq 0$,

当 $a < -2$ 时, $x \leq a$ 或 $x \geq -2$ 符合题意, 如图 1-2(a) 所示;

当 $-2 \leq a \leq 1$ 时, $x \leq -2$ 或 $x \geq a$ 也符合题意, 如图 1-2(b) 所示;

当 $a > 1$ 时, $x \leq -2$ 或 $x \geq a$, 与 $B \subseteq A$ 矛盾, 因此不符合题意, 如图 1-2(c) 所示.

综上所述 a 的取值范围为 $\{a \mid a \leq 1\}$.

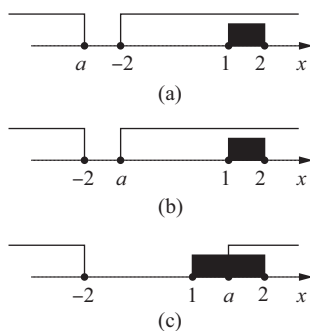


图 1-2

例 4

已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为().

A. 3

B. 6

C. 8

D. 10

解析 解法一: 由 $x - y \in A$ 及 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 得 $x > y$; 当 $y = 1$ 时, x 可取 2, 3, 4, 5, 有 4 个; 当 $y = 2$ 时, x 可取 3, 4, 5, 有 3 个; 当 $y = 3$ 时, x 可取 4, 5, 有 2 个; 当 $y = 4$ 时, x 可取 5, 有 1 个, 故共有 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (个).

解法二: 因为 A 中的元素均为正整数, 所以从 A 中任取两个元素作为 x, y 满足 $x > y$ 的即为集合 B 中的元素, 故共有 $C_5^2 = 10$ 个.

例 5

已知集合 $M = \{x \mid f(x) - x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 与集合 $P = \{x \mid f[f(x)] - x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 其中 $f(x)$ 是一个二次项系数为 1 的二次函数.

(1) 讨论 M 与 P 的关系;

(2) 若 M 是单元素集, 求证 $P = M$.

解析 (1) 设 $x_0 \in M$, 则 $f(x_0) = x_0$, 于是 $f[f(x_0)] = f(x_0) = x_0$, 这说明 $x_0 \in P$, 由此得 $M \subseteq P$.

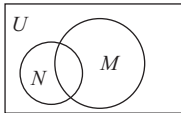
(2) 由题意可设 $M = \{a\} (a \in \mathbf{R})$, 则关于 x 的一元二次方程 $f(x) - x = 0$ 有两个相同的实根, 即有 $f(x) - x = (x - a)^2$, 由此得表达式 $f(x) = (x - a)^2 + x$.

再由方程 $f[f(x)] - x = 0$, 得 $x = \{[(x - a)^2 + x] - a\}^2 + [(x - a)^2 + x]$, 整理得 $[(x - a)^2 + (x - a)]^2 + (x - a)^2 = 0$, 即 $(x - a)^2 [(x - a + 1)^2 + 1] = 0$. 因为 $x, a \in \mathbf{R}$, 所以 $(x - a + 1)^2 + 1 \neq 0$, 于是 $x = a$. 这说明方程 $f[f(x)] - x = 0$ 也仅有一个实根 a , 即 $P = \{a\}$, 所以 $P = M$.

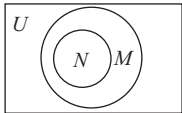
说明: 集合与集合的关系有包含与不包含、相等与不相等的关系 (当集合作为元素时例外). 要证明两个集合 A 与 B 相等, 通常是证明 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$. 本题的证明方法是直接证明它们所含元素相同. 一般地说, 在元素个数较少 (1 个或 2 个) 的情况下, 利用这一方法也比较简单.

双基训练

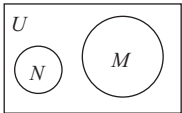
- 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 集合 $M = \{x | y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}, x, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y | y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}, x, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N =$ ().
A. $\emptyset$ B. $[-1, 4]$ C. $[-1, 7]$ D. $[0, 4]$
- 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 则正确表示集合 $M = \{-1, 0, 1\}$ 和 $N = \{x | x^2 + x = 0\}$ 关系的韦恩(Venn)图是().



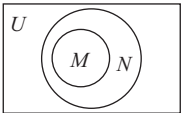
A.



B.



C.



D.
- 设集合 $A = \{x | |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 1 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是().
A. $\{a | 0 \leq a \leq 6\}$ B. $\{a | a \leq 2, \text{ 或 } a \geq 4\}$
C. $\{a | a \leq 0, \text{ 或 } a \geq 6\}$ D. $\{a | 2 \leq a \leq 4\}$
- 已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$, $B = \{1, m\}$, $A \cup B = A$, 则 $m =$ ().
A. 0 或 $\sqrt{3}$ B. 0 或 3 C. 1 或 $\sqrt{3}$ D. 1 或 3
- 设集合 $S = \{x | x > -2\}$, $T = \{x | x^2 + 3x - 4 \leq 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} S) \cup T =$ ().
A. $(-2, 1]$ B. $(-\infty, -4]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$
- 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集, 则 $A \subsetneq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的()条件.
A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分又不必要
- 已知 M, N 为集合 I 的非空真子集, 且 M, N 不相等, 若 $N \cap {}_I M = \emptyset$, 则 $M \cup N =$ ().
A. M B. N C. I D. $\emptyset$
- 设 A, B 是两个非空集合, 定义运算 $A \times B = \{x | x \in A \cup B, \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 已知 $A = \{x | y = \sqrt{2x - x^2}\}$, $B = \{y | y = 2^x, x > 0\}$, 则 $A \times B =$ ().
A. $[0, 1] \cup (2, +\infty)$ B. $[0, 1) \cup (2, +\infty)$
C. $[0, 1]$ D. $[0, 2]$
- 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P - Q = \{x | x \in P, \text{ 且 } x \notin Q\}$, 如果 $P = \{x | \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x | |x - 2| < 1\}$, 那么 $P - Q$ 等于().
A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$
C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 2 \leq x < 3\}$
- 某高级中学高三特长班有 100 名学生, 其中学绘画的学生有 67 人, 学音乐的学生有

45 人,而学体育的学生既不能学绘画,又不能学音乐,其人数是 21 人,那么同时学绘画和音乐的学生有_____人.

12. 设集合 $A = \{2, 0, 1, 3\}$, 集合 $B = \{x \mid -x \in A, 2 - x^2 \notin A\}$, 则集合 B 中所有元素的和为_____.

13. 已知集合 $A = \{x \mid x \leq 1\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知集合 $M = \{a^2, a+1, -3\}$, $N = \{a^2+1, 2a-1, a-3\}$, 若 $M \cap N = \{-3\}$, 则 a 的值是_____.

15. 设全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid \lg x < 1\}$, 若 $A \cap {}_U B = \{m \mid m = 2n+1, n=0, 1, 2, 3, 4\}$, 则集合 $B =$ _____.

16. 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 都有 $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b} \in P$ (除数 $b \neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 Q 是数域; 数集 $F = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ 也是数域. 有下列命题: ①整数集是数域; ②若有理数集 $Q \subseteq M$, 则数集 M 必为数域; ③数域必为无限集; ④存在无穷多个数域. 其中正确的命题的序号是_____. (把你认为正确的命题的序号填上)

17. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, A, B 是 U 的子集, 同时满足 $A \cap B = \{2\}$, $({}_U A) \cap B = \{1, 9\}$, $({}_U A) \cap ({}_U B) = \{4, 6, 8\}$, 求 A 和 B .

18. 已知集合 $A = \{x \mid mx^2 - 2x + 3 = 0, m \in \mathbf{R}\}$

- (1) 若 A 是空集, 求 m 的取值范围;
- (2) 若 A 中只有一个元素, 求 m 的值;
- (3) 若 A 中至少有一个元素, 求 m 的取值范围.

19. 设 $a \in \mathbf{R}$, 二次函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$. 若 $f(x) > 0$ 的解集为 A , $B = \{x \mid 1 < x < 3\}$, $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

20. 已知 $M = \{(x, y) \mid y = x^2\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 + (y-a)^2 = 1\}$, $A = M \cap N$.

- (1) 若 $|A| = 3$, 求实数 a 的值;
- (2) 若 $A = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

能力提升

21. 已知集合 $P = \{x | 0 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{y | y = |x^2 - 1|, x \in P\}$, 则 $P \cap Q$ 中的元素个数为().

- A. 3 B. 6 C. 8 D. 9

22. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } y = x\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

23. 设集合 $A = \{x | |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | |x - b| > 2, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \subseteq B$, 则实数 a, b 必满足().

- A. $|a + b| \leq 3$ B. $|a + b| \geq 3$ C. $|a - b| \leq 3$ D. $|a - b| \geq 3$

24. 已知集合 M, N, P 为全集 I 的子集, 满足 $P \cup M = P \cap N$ 则下列结论不正确的是().

- A. $P \subseteq N$ B. $M \subseteq P$ C. $(\complement_I P) \cap M = \emptyset$ D. $M = N$

25. 已知集合 $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 若非空集合 A 满足: A 中各元素都加 4 后构成 M 的一个子集, A 中各元素都减 4 后也构成 M 的一个子集, 则 $A =$ _____.

26. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x + 3| + |x - 4| \leq 9\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} | x = 4t + \frac{1}{t} - 6, t \in (0, +\infty)\right\}$, 则集合 $A \cap B =$ _____.

27. 设 $A = \{x | |x| \leq 3\}$, $B = \{y | y = -x^2 + t\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 t 的取值范围是 _____.

28. 已知集合 $A = \{x | x \leq a\}$, $B = \{x | x > b\}$, $a, b \in \mathbf{N}$, 且 $A \cap B \cap \mathbf{N} = \{1\}$, 则 $a + b =$ _____.

29. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 4 \leq 0, x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 $A \cap B = [0, 3]$, 求实数 m 的值;

(2) 若 $A \subseteq {}_{\mathbf{R}}B$, 求实数 m 的取值范围.

30. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-5}{x+1} \leq 0\right\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - m < 0\}$.

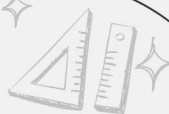
(1) 当 $m = 3$ 时, 求 $A \cap ({}_{\mathbf{R}}B)$;

(2) 若 $A \cap B = \{x | -1 < x < 4\}$, 求实数 m 的值.

拓展资源

31. 对于复数 a, b, c, d , 若集合 $S = \{a, b, c, d\}$ 具有性质“对任意 $x, y \in S$, 必有 $xy \in S$ ”, 则当 $\begin{cases} a=1, \\ b^2=1 \text{ 时}, b+c+d \text{ 等于} (\quad). \\ c^2=b \end{cases}$
- A. 1 B. -1 C. 0 D. i
32. 设整数 $n \geq 4$, 集合 $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. 令集合 $S = \{(x, y, z) | x, y, z \in X\}$, 且三条件 $x < y < z, y < z < x, z < x < y$ 恰有一个成立, 若 (x, y, z) 和 (z, w, x) 都在 S 中, 则下列选项正确的是 ().
- A. $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \notin S$ B. $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \in S$
C. $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \in S$ D. $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \notin S$
33. 设 a, b, c 为实数, $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c), g(x) = (ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}, T = \{x | g(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $|S|, |T|$ 分别为集合 S, T 的元素个数, 则下列结论不可能的是 ().
- A. $|S|=1$ 且 $|T|=0$ B. $|S|=1$ 且 $|T|=1$
C. $|S|=2$ 且 $|T|=2$ D. $|S|=2$ 且 $|T|=3$
34. 设函数 $f(x) = a^x + b^x - c^x$, 其中 $c > a > 0, c > b > 0$, 记集合 $M = \{(a, b, c) | a, b, c \text{ 不能构成一个三角形的三条边长, 且 } a=b\}$, 则 $(a, b, c) \in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为 _____.
35. 对正整数 n , 记 $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}, P_n = \left\{ m \frac{m}{\sqrt{k}} \mid m \in I_n, k \in I_n \right\}$.
- (1) 求集合 P_7 中元素的个数.
- (2) 若 P_n 的子集 A 中任意两个元素之和不是整数的平方, 则称 A 为“稀疏集”. 求 n 的最大值, 使 P_n 能分成两个不相交的稀疏集的并集.

IDEA



第 2 讲

命题及其关系、 充分条件与必要条件



知识梳理

一、命题的概念

在数学中把用语言、符号或式子表达的、可以判断真假的陈述句叫作命题. 其中判断为真的语句叫作真命题,判断为假的语句叫作假命题.

二、四种命题及其关系

1. 四种命题(见表 2-1)

表 2-1

命题	表述形式
原命题	若 p , 则 q
逆命题	若 q , 则 p
否命题	若非 p , 则非 q
逆否命题	若非 q , 则非 p

2. 四种命题间的逆否关系(见图 2-1)

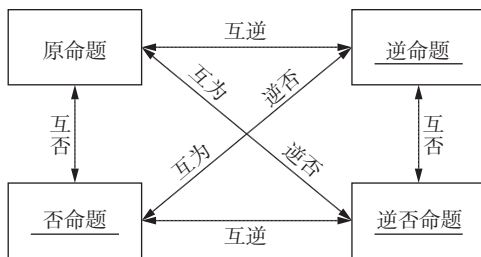


图 2-1

3. 四种命题的真假关系

- ① 两个命题互为逆否命题, 它们有相同的真假性;
- ② 两个命题互为逆命题或互为否命题, 它们的真假性没有关系.

三、简单的逻辑联结词

1. 逻辑联结词

逻辑联结词有“或”“且”“非”.

2. 用来判断复合命题真假的真值表(见表 2-2)

表 2-2

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
真	真	假	假	真	真	假	假	假	假
真	假	假	真	真	假	假	真	真	假
假	真	真	假	真	假	假	真	真	假
假	假	真	真	假	假	真	真	真	假

3. 一些常见语句的否定

“对所有 x 成立”的否定是“存在某个 x 不成立”;

“对任意 x 不成立”的否定是“存在某个 x 成立”;

“至少有一个”的否定是“没有一个”;

“至多有一个”的否定是“至少有两个”;

“至少有 n 个”的否定是“至多有 $(n-1)$ 个”;

“至多有 n 个”的否定是“至少有 $(n+1)$ 个”.

4. 复合命题的否定

“非 p ”的否定是“ p ”

“ p 或 q ”的否定是“非 p 且非 q ”;

“ p 且 q ”的否定是“非 p 或非 q ”.

5. 特别注意

命题的否命题是既否定命题的条件,又否定命题的结论;而命题的否定只是否定命题的结论.

四、充分条件与必要条件

(1) 如果 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

(2) 如果 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分必要条件.

(3) 从集合角度理解: 若 p 以集合 A 的形式出现, q 以集合 B 的形式出现, 即 $A = \{x | p(x)\}, B = \{x | q(x)\}$, 则关于充分条件、必要条件可叙述为:

- 1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件
- 2) 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要条件
- 3) 若 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件

典型例题

例 1

有下列四个命题：

- ①“若 $x+y=0$, 则 x, y 互为相反数”的逆命题；
- ②“全等三角形的面积相等”的否命题；
- ③“若 $q \leq 1$, 则 $x^2+2x+q=0$ 有实根”的逆否命题；
- ④“不等边三角形的三个内角相等”的逆命题.

其中真命题的序号为 ①③.

解析 ①的逆命题是“若 x, y 互为相反数, 则 $x+y=0$ ”是真命题,

②的否命题是“不全等三角形的面积不相等”是假命题；

③若 $q \leq 1$, 则 $\Delta = 4 - 4q \geq 0$, 所以 $x^2+2x+q=0$ 有实根”其逆否命题与原命题是等价命题, 因此是真命题；

④的逆否命题是“三个内角相等的三角形是不等边三角形的”, 是假命题.

例 2

已知命题 p : 存在实数 x , 使得不等式 $x^2+2ax+a \leq 0$ 成立. 若命题 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 .

解析 解法一 当命题 p 是真命题时有 $(x^2+2ax+a)_{\min} \leq 0$, 即 $a-a^2 \leq 0$, 得 $a \geq 1$ 或 $a \leq 0$, 故当命题 p 是假命题时, 有 $0 < a < 1$.

解法二 命题 p 是假命题, 即不存在实数 x , 使得不等式 $x^2+2ax+a \leq 0$ 成立, 即对于任意实数 x , 不等式 $x^2+2ax+a > 0$ 恒成立, 从而 $\Delta = 4a^2 - 4a < 0$, 得 $0 < a < 1$

例 3

(1) 已知 a, b 是实数, 则“ $|a+b| = |a| + |b|$ ”是“ $ab > 0$ ”的().

- | | |
|------------|---------------|
| A. 充分不必要条件 | B. 必要不充分条件 |
| C. 充分必要条件 | D. 既不充分也不必要条件 |

解析 利用等价命题判断充要条件.

因为 $|a+b| = |a| + |b|$, 两边平方得 $a^2+2ab+b^2 = a^2+2|ab|+b^2$, 所以 $|ab| = ab$, 所以 $ab \geq 0$, 而由 $ab \geq 0$, 不能推出 $ab > 0$, 由 $ab > 0$ 能推出 $ab \geq 0$, 即由 $|a+b| = |a| + |b|$ 不能推出 $ab > 0$, 由 $ab > 0$ 能推出 $|a+b| = |a| + |b|$, 故选 B.

(2) 设 $\varphi \in \mathbf{R}$, 则“ $\varphi = 0$ ”是“ $f(x) = \cos(x+\varphi) (x \in \mathbf{R})$ 为偶函数”的().

- | | |
|------------|---------------|
| A. 充分不必要条件 | B. 必要不充分条件 |
| C. 充分必要条件 | D. 既不充分也不必要条件 |