G A O D E N G S H U X U E

普通高等教育“十三五”规划教材

（理工类）高等数学 上册

主编 赵利彬

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高 等 数 学

（理工类）上册

主　编　赵利彬
副主编　马合保　王宜洁

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神的基础上，并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，结合一些本、专科院校学生的基础和特点进行编写的. 是面向21世纪课程教材.

全书分上、下两册，上册内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用. 下册内容包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程. 书内各节后均配有相应的习题，同时每章还配有综合练习，书末附有习题的参考答案.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富. 适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用. 也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类. 上册 / 赵利彬主编. -- 上海：同济大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5608-5709-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第285332号

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学(理工类)上册

主编 赵利彬 **副主编** 马合保 王宜洁

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 同济大学印刷厂

开　本 787 mm×1 092 mm 1/16

印　张 17.75

印　数 1—4 100

字　数 355 000

版　次 2014年7月第1版 2014年7月第1次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-5709-1

定　价 36.00元

前　言

“高等数学”是普通高等院校理工类本科各专业普遍开设的一门公共基础课程. 在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用. 为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求,适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变,满足一些高等院校新的教学形势、学生基础和教学特点,根据我们多年的教学改革实践,在多次研讨和反复实践的基础上,编写了这部高等数学课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神,并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,参考了近几年来国内出版的一些优秀教材,结合编者多年的教学实践经验,编写而成的. 全书以严谨的知识体系,通俗易懂的语言,丰富的例题、习题,深入浅出地讲解高等数学的知识. 培养学生分析问题、解决问题的能力.

全书分上、下两册,上册内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用.

下册内容包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程. 书内各节后均配有相应的习题,同时每章还配有综合练习,书末附有习题的参考答案. 本书的主要特色有以下几点:

1. 在满足教学基本要求前提下,淡化理论推导过程. 加强训练,强化应用.

在第1章中没有介绍映射的内容,直接通过实例给出函数的定义,同时在有些章节中还淡化了定理证明的推导过程. 既简明易懂,又解决了课时少、内容多的矛盾. 同时,本书经过精心设计与编选,配备了相当丰富的例题、习题,目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质,掌握重要的解题方法和应用技巧.

2. 内容结构设计合理,突出重点消除难点. 篇幅比传统教材要少,但高等数学的基本内容都讲到了,且有一定的理论深度.

平面极坐标是积分中经常用的重要内容,因此,在第5章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系,给出了一些常用曲线的极坐标方程,为后面的学习奠定了一定的理论基础.

3. 较为通俗、易懂,便于教师授课,也便于学生阅读、理解.

4. 注重理论联系实际,增加了数学在工程技术上应用的例子,培养学生解决实际问题的能力.

5. 注重渗透现代化教学思想及手段,注重渗透数学建模思想.

一致连续、一致收敛等内容可根据教学需要和学时安排酌情增删.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富.适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用.也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书由赵利彬担任主编,马合保、王宜洁任副主编,编写大纲由赵利彬提出,并经过编者充分讨论而确定.具体分工如下:第1章、第9章由马合保编写,第2章、第3章由王宜洁编写,第4章、第7章由许晓玲编写,第5章、第8章由黄建吾编写,第6章、第10章由赵利彬编写.全书由赵利彬统稿、定稿.

在本书的编写过程中得到了有关领导、老师的支持,在此我们表示诚挚的谢意!在编写过程中参考了书后所列的参考文献,对参考文献的作者在此一并表示感谢!

虽然编者力求本书通俗易懂,简明流畅,便于教学,但由于作者水平与学识有限,本书疏漏与错误之处在所难免,书中一定还有不少不尽人意之处;敬请专家和读者多提出宝贵意见不吝批评和赐教.我们将万分感激.本书将不断改进与完善,突出自己的特色,更好地服务于教学.

赵利彬

2014年6月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数，应用无限逼近的方法即极限方法来研究函数的性态. 本章介绍函数的概念及其运算和特性，给出初等函数的构造. 讲述数列极限与函数极限的概念以及性质，最后讨论函数的连续性.

1.1　函　　数

1.1.1　集合、区间和邻域

1. 集合的概念

集合是数学中最基本的一个概念，它的定义是描述性的.

定义 1.1.1　具有某种特定性质的事物的全体称为集合. 集合中的事物称为该集合的元素.

设 A 是一个集合，如果 x 是 A 的元素，则称 x 属于 A，记为 $x \in A$；如果 x 不是 A 的元素，则称 x 不属于 A，记为 $x \overline{\in} A$ 或 $x \notin A$.

集合中的元素具有确定性和可区分性.

一个集合，如果其元素的个数是有限的，则称为有限集，否则就称为无限集. 不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

一般地，表示一个集合有两种方法. 一种是列举法，即将集合中的元素逐一列举出来. 例如，由数字 1，3，5，7，9 组成的集合表示为 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$；自然数的集合表示为 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

集合中的元素之间没有次序关系，也就是说，在集合的表示中，同一元素在不同位置上出现不具有任何特殊意义. 例如，$\{1, 2, 3\}$ 与 $\{2, 1, 3\}$ 表示的是同一个集合.

习惯上用 $\mathbf{N}$ 表示自然数的集合，$\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数的集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合.

另一种是描述法，即用集合中的元素所具有的性质来描述，记为 $\{x|x$ 具有性

质$P(x)\}$.

例如,方程 $x^2-2=0$ 的实数根全体组成的集合可表示为 $\{x \mid x^2-2=0\}$.

定义 1.1.2 设 A, B 是两个集合,如果 A 中的元素都是 B 中的元素,即

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B,$$

则称 A 是 B 的子集,记为 $A \subset B$, 读作 A 包含于 B, 或记为 $B \supset A$, 读作 B 包含 A.

如果 A 中至少存在一个元素 x 不属于 B, 即 $\exists x \in A$, 但 $x \notin B$, 那么 A 不是 B 的子集,记为 $A \not\subset B$.

符号“$\forall$”表示“对于任意的”或“对于每一个”; 符号“$\exists$”表示“存在”或“可以找到”.

例如,设 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \subset B$.

显然, $\mathbf{N}^{+} \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

由定义 1.1.2 可知,任何集合都是其自身的子集;空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

定义 1.1.3 设 A, B 是两个集合,如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B 相等,记为 $A=B$. 此时 A 与 B 的元素完全相同,实际上是同一个集合.

例 1.1.1 设 $A=\{a, b, c\}$, 写出 A 的所有子集.

解 $\varnothing$; $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$; $\{a, b, c\}$, 共有 2^3 个子集.

容易证明,由 n 个元素组成的集合共有 2^n 个子集.

2. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种.

设 A, B 是两个集合,由 A 与 B 的全部元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 与 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

特别地,如果 $A \cap B=\varnothing$, 则称 A 与 B 不相交.

由属于 A 但不属于 B 的一切元素构成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记为 $A \backslash B$, 即

$$A \backslash B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例 1.1.2　设 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, 则

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,　$A\cap B=\{4\}$,　$A\backslash B=\{1, 2\}$,　$B\backslash A=\{3, 5\}$.

注意：一般地，$A\backslash B\neq B\backslash A$.

通常在讨论一个问题时，所涉及的集合总是某个最大集合 X 的子集，此时称 X 是全集.

如果 $A\subset X$, 则称集合

$$X\backslash A=\{x|x\in X \text{ 且 } x\overline{\in} A\}$$

为集合 A 关于全集 X 的余集或补集，记为 A_X^C. 在不会发生混淆的前提下，通常也简称为 A 的余集或补集，记为 A^C.

显然，有下列简单事实：

(1) $A\cup A^C=X$, $A\cap A^C=\varnothing$;

(2) $(A^C)^C=A$;

(3) $A\backslash B=A\cap B^C$.

以上等式根据集合相等的定义易证. 现就等式(3)证明如下：

因为

$$x\in A\backslash B\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\overline{\in} B\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in B^C\Leftrightarrow x\in A\cap B^C,$$

所以 $A\backslash B=A\cap B^C$.

关于集合的并、交、余及其联合运算，有下列规律：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
　　　　　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 对偶律(De Morgan 公式)　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

以上运算规律根据集合相等的定义易证.

由于集合的并与交满足结合律，于是有限个集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的并记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x|\ \exists i: 1\leqslant i\leqslant n, x\in A_i\};$$

有限个集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的交记为

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x|\ \forall i: 1\leqslant i\leqslant n, x\in A_i\}.$$

注意:集合运算不满足消去律

$$A \cup B = A \cup C \nRightarrow B = C,\ A \cap B = A \cap C \nRightarrow B = C.$$

3. 区间和邻域

在高等数学课程中,经常用到的实数集 **R** 的子集是区间和邻域两种类型.

设 $a,\ b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$.

集合 $\{x|a < x < b\}$ 称为以 $a,\ b$ 为端点的开区间,记为 $(a,\ b)$, 即

$$(a,\ b) = \{x|a < x < b\};$$

集合 $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为以 $a,\ b$ 为端点的闭区间,记为 $[a,\ b]$, 即

$$[a,\ b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\};$$

集合 $\{x|a < x \leqslant b\} = (a,\ b]$ 和 $\{x|a \leqslant x < b\} = [a,\ b)$ 都称为半开半闭区间.

以上这几类区间的长度是有限的,称为有限区间.

类似地,记

$$\begin{aligned}
&(a,\ +\infty) = \{x|x > a\}, \quad [a,\ +\infty) = \{x|x \geqslant a\}, \\
&(-\infty,\ b) = \{x|x < b\}, \quad (-\infty,\ b] = \{x|x \leqslant b\}, \\
&(-\infty,\ +\infty) = \{x|-\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

这里符号 ∞ 读作“无穷大”, $+\infty$ 读作“正无穷大”, $-\infty$ 读作“负无穷大”.

上述这几类区间都称为无限区间.

有限区间和无限区间统称为区间.

数的图像是数轴上的点,反过来,数轴上的点的坐标又是数. 这样实数集 **R** 与数轴上的点就建立了一一对应,所以数与点,我们以后不加区别.

定义 1.1.4 设 $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 开区间

$$(a-\delta,\ a+\delta) = \{x|a-\delta < x < a+\delta\} = \{x|\,|x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\ \delta)$. 点 a 称为邻域中心, δ 称为邻域半径(图 1-1). 当不需要注明邻域半径时,也简记为 $U(a)$.

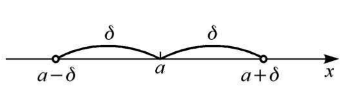

图 1-1

集合 $\{x|0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 去心邻域,记为 $\mathring{U}(a,\ \delta)$, 即

$$\mathring{U}(a,\ \delta) = \{x|0 < |x-a| < \delta\}.$$

为了方便，把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，记为 $\mathring{U}^{-}(a, \delta)$；把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域，记为 $\mathring{U}^{+}(a, \delta)$.

1.1.2　函数概念

1. 函数的定义

定义 1.1.5　设数集 $D\neq\varnothing$，若存在某种对应法则 f，对于 D 中每个数 x，按照对应法则 f，都有实数集 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数 y 与之对应，则称对应法则 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数，记为

$$f: D \to \mathbf{R},$$
$$x \mapsto y,$$

数 x 对应的数 y 称为函数 f 在点 x 的函数值，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量. 数集 D 称为函数 f 的定义域，记为 D_f. 全体函数值的集合 $\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 f 的值域，记为 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}\subset \mathbf{R}.$$

关于函数定义的几点说明：

(1) 函数定义包含两个要素，对应法则和定义域. 这时 $f: D\to\mathbf{R}$ 也称 f 是定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x), x\in D$.

(2) 函数定义指出，$\forall x\in D$，按照对应法则 f，在实数集 $\mathbf{R}$ 中存在唯一一个数 y 与之对应，这种对应称为由 D 到 $\mathbf{R}$ 中的单值对应. 注意不要求不同的 x 要不同的 y 与之对应，即不同的 x 可能对应相同的 y.

(3) 从函数定义来说，给定一个函数一定要指出函数的定义域，没有求定义域的问题. 但是，有时为了方便并不指出函数 $y=f(x)$ 的定义域，这时认为函数的定义域是自明的. 即函数的定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $D_f=\{x \mid f(x)\in\mathbf{R}\}$，也即自变量 x 的最大取值范围，此定义域称为该函数的自然定义域.

(4) 在函数定义中，并没有表明对应法则非得用一个公式来表达不可. 也就是说，变量间有没有函数关系，在于有没有对应法则，而不在于有没有公式. 所以具体表示一个函数时，可以用解析法（或称公式法）、图示法、表格法，甚至用语言描述等.

设函数 $y=f(x), x\in D$，坐标平面上的点集

$$G(f)=\{(x, y) \mid x\in D, y=f(x)\}$$

称为函数 f 的图像.

函数的图像能将函数的几何性态表现得十分明显.显然,坐标平面上一个点集 G 是某个函数的图像的必要充分条件是,平行 y 轴的每条直线与点集 G 至多有一个交点.

例 1.1.3 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=f(x)=\sin(\ln\sin\sqrt{x})$;　　(2) $y=g(x)=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

解 (1) 由于

$$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ \sin\sqrt{x}>0\end{cases}\Rightarrow 2k\pi<\sqrt{x}<(2k+1)\pi\Rightarrow 4k^2\pi^2<x<(2k+1)^2\pi^2,\ k\in\mathbf{N},$$

所以
$$D_f=\{x\,|\,4k^2\pi^2<x<(2k+1)^2\pi^2,\ k\in\mathbf{N}\}.$$

(2) 因为

$$\begin{cases}x>0,\\ -1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{1}{10}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant 10\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant 100,$$

所以
$$D_g=[1,\ 100].$$

例 1.1.4 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$,求 $f(x)$.

解 令 $\dfrac{x}{x-1}=t$,则 $x=\dfrac{t}{t-1}$. 于是

$$f(t)=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3\cdot\dfrac{t}{t-1}-1}{3\cdot\dfrac{t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1},$$

所以
$$f(x)=\frac{2x+1}{4x-1}.$$

例 1.1.5 直梁 OAB 由两种材料接合而成,OA 长 2 个单位,其线密度为 3;AB 长 3 个单位,其线密度为 5. 设 P 为直梁上任意一点,试建立 OP 一段的质量 m 与 OP 的长 x 之间的函数关系.

解 根据题意可得函数关系为

$$m=m(x)=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 5x-4, & 2<x\leqslant 5.\end{cases}$$

这个函数的对应法则是:当 $x\in[0,\ 2]$ 时,按公式 $m=3x$ 计算函数值;当 $x\in$

$(2, 5]$ 时，按公式 $m = 5x - 4$ 计算函数值. 从函数定义来看它是定义在 $[0, 5]$ 上的一个函数，称为分段表示的函数，而不是两个函数.

这类在定义域的不同部分，对应法则由不同的式子来表示的函数，称为分段函数.

例 1.1.6　气温自动仪所记录的某地某日 24 小时的气温变化曲线(图 1-2)描述了当日气温 T 随时间 t 的变化情形. 根据这个图形，就可确定这一天内任何时刻所对应的气温，即时间 t 与气温 T 之间的对应法则由一条曲线表示.

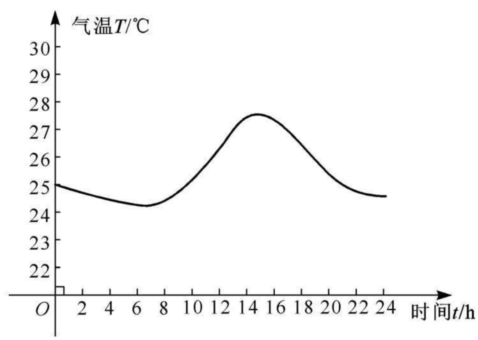

图 1-2

例 1.1.7　温度一定时，火药的燃烧速度与燃烧室内的压强有关. 一般地，压强越大，燃烧越快. 某种火药在常温 20℃ 下，测得压强 p (MPa) 与燃烧速度 v (mm/s) 之间的对应关系如下表：

p/MPa	30	60	90	120	150	180
v/(mm/s)	6.2	6.1	9.6	11.5	13.5	15.8

压强 p 与燃烧速度 v 之间的对应法则由上面的表格表示.

例 1.1.8　$\forall x \in \mathbf{R}$, 对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 显然，$\forall x \in \mathbf{R}$ 都对应唯一一个 y，这是一个函数，称为"整数部分"函数(图 1-3)，记为

$$y = [x] = n,\ n \leqslant x < n + 1,\ n \in \mathbf{Z}.$$

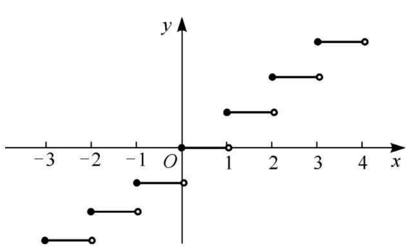

图 1-3

例 1.1.5 和例 1.1.8 的共同特点是函数形式均为 $y = f(x)$，即因变量 y 单独放在等式的一边，而等式的另一边是只含有自变量 x 的表达式，这种表示形式的函