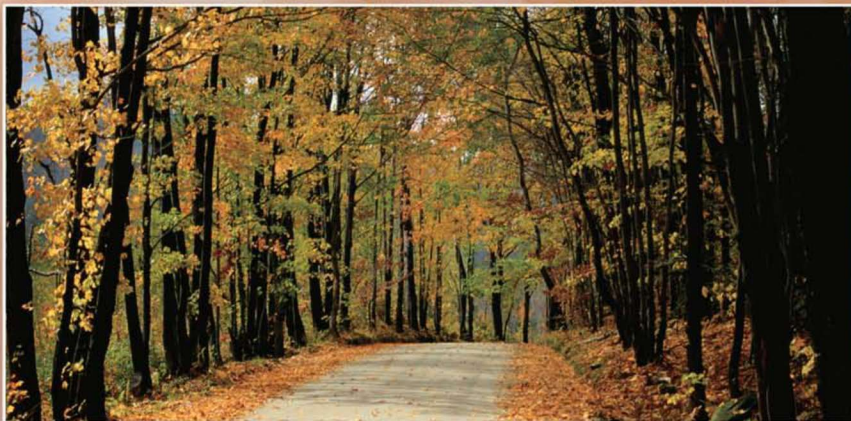


G A O D E N G S H U X U E



普通高等教育“十三五”规划教材

(理工类)

# 高等数学 上册

主 编 赵利彬



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

# 高等数学

(理工类) 上册

主 编 赵利彬

副主编 马合保 王宜洁

 同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神的基础上,并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,为适应 21 世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求,结合一些本、专科院校学生的基础和特点进行编写的.是面向 21 世纪课程教材.

全书分上、下两册,上册内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用.下册内容包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程.书内各节后均配有相应的习题,同时每章还配有综合练习,书末附有习题的参考答案.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富,适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用,也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类.上册 / 赵利彬主编. — 上海:  
同济大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5608-5709-1

I. ①高… II. ①赵… III. ①高等数学—高等学校—  
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 285332 号

---

普通高等教育“十二五”规划教材

## 高等数学(理工类)上册

主编 赵利彬 副主编 马合保 王宜洁

责任编辑 陈佳蔚 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

---

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)  
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张 17.75

印 数 1—4 100

字 数 355 000

版 次 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5709-1

---

定 价 36.00 元

---

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

# 前 言

“高等数学”是普通高等院校理工类本科各专业普遍开设的一门公共基础课程. 在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用. 为适应 21 世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求, 适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变, 满足一些高等院校新的教学形势、学生基础和教学特点, 根据我们多年的教学改革实践, 在多次研讨和反复实践的基础上, 编写了这部高等数学课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻落实教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神, 并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”, 参考了近几年来国内出版的一些优秀教材, 结合编者多年的教学实践经验, 编写而成的. 全书以严谨的知识体系, 通俗易懂的语言, 丰富的例题、习题, 深入浅出地讲解高等数学的知识. 培养学生分析问题、解决问题的能力.

全书分上、下两册, 上册内容包括: 函数、极限与连续, 导数与微分, 导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用.

下册内容包括: 向量代数与空间解析几何, 多元函数微分学, 多元函数积分学, 无穷级数, 常微分方程. 书内各节后均配有相应的习题, 同时每章还配有综合练习, 书末附有习题的参考答案. 本书的主要特色有以下几点:

1. 在满足教学基本要求前提下, 淡化理论推导过程. 加强训练, 强化应用.

在第 1 章中没有介绍映射的内容, 直接通过实例给出函数的定义, 同时在有些章节中还淡化了定理证明的推导过程. 既简明易懂, 又解决了课时少、内容多的矛盾. 同时, 本书经过精心设计与编选, 配备了相当丰富的例题、习题, 目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质, 掌握重要的解题方法和应用技巧.

2. 内容结构设计合理, 突出重点消除难点. 篇幅比传统教材要少, 但高等数学的基本内容都讲到了, 且有一定的理论深度.

平面极坐标是积分中经常用的重要内容, 因此, 在第 5 章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系, 给出了一些常用曲线的极坐标方程, 为后面的学习奠定了一定的理论基础.

3. 较为通俗、易懂,便于教师授课,也便于学生阅读、理解.

4. 注重理论联系实际,增加了数学在工程技术上应用的例子,培养学生解决实际问题的能力.

5. 注重渗透现代化教学思想及手段,注重渗透数学建模思想.

一致连续、一致收敛等内容可根据教学需要和学时安排酌情增删.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富.适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用.也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书由赵利彬担任主编,马合保、王宜洁任副主编,编写大纲由赵利彬提出,并经过编者充分讨论而确定.具体分工如下:第1章、第9章由马合保编写,第2章、第3章由王宜洁编写,第4章、第7章由许晓玲编写,第5章、第8章由黄建吾编写,第6章、第10章由赵利彬编写.全书由赵利彬统稿、定稿.

在本书的编写过程中得到了有关领导、老师的支持,在此我们表示诚挚的谢意!在编写过程中参考了书后所列的参考文献,对参考文献的作者在此一并表示感谢!

虽然编者力求本书通俗易懂,简明流畅,便于教学,但由于作者水平与学识有限,本书疏漏与错误之处在所难免,书中一定还有不少不尽人意之处;敬请专家和读者多提出宝贵意见不吝批评和赐教.我们将万分感激.本书将不断改进与完善,突出自己的特色,更好地服务于教学.

赵利彬

2014年6月

# 目 录

## 前 言

第 1 章 函数、极限与连续 .....	1
1.1 函数 .....	1
1.1.1 集合、区间和邻域 .....	1
1.1.2 函数概念 .....	5
1.1.3 具有某种特性的函数 .....	8
1.1.4 反函数与复合函数 .....	12
1.1.5 初等函数 .....	15
习题 1-1 .....	17
1.2 数列极限 .....	19
1.2.1 数列极限的概念 .....	20
1.2.2 数列极限的性质 .....	25
1.2.3 数列极限的四则运算法则 .....	28
1.2.4 数列极限存在的两个准则 .....	31
习题 1-2 .....	35
1.3 函数极限 .....	36
1.3.1 函数极限的概念 .....	36
1.3.2 函数极限的性质 .....	43
1.3.3 函数极限存在的夹逼准则 两个重要极限 .....	48
习题 1-3 .....	51
1.4 无穷小量与无穷大量 .....	52
1.4.1 无穷小量 .....	52
1.4.2 无穷大量 .....	53
1.4.3 无穷小量阶的比较 .....	54
习题 1-4 .....	56
1.5 函数的连续性 .....	57

1.5.1	连续函数的定义	57
1.5.2	间断点及其分类	59
1.5.3	连续函数的运算	60
1.5.4	初等函数的连续性	62
1.5.5	闭区间上连续函数的性质	63
1.5.6	一致连续性	65
	习题 1-5	67
	综合练习 1	68
<b>第 2 章</b>	<b>导数与微分</b>	<b>71</b>
2.1	导数概念	71
2.1.1	切线与速度	71
2.1.2	导数概念	72
2.1.3	求导问题举例	75
2.1.4	导数的几何意义	78
2.1.5	可导与连续	79
	习题 2-1	80
2.2	函数的求导法则	81
2.2.1	导数的四则运算法则	81
2.2.2	反函数的求导法则	84
2.2.3	复合函数的求导法则	86
2.2.4	高阶导数	90
2.2.5	隐函数的求导法则	94
2.2.6	由参数方程所确定函数的求导法则	97
	习题 2-2	99
2.3	函数微分及其应用	102
2.3.1	微分的定义	102
2.3.2	微分的运算	104
2.3.3	微分在近似计算中的应用	107
	习题 2-3	109
	综合练习 2	110
<b>第 3 章</b>	<b>导数的应用</b>	<b>114</b>
3.1	微分中值定理	114

3.1.1 罗尔(Rolle)定理 .....	114
3.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理 .....	116
3.1.3 柯西(Cauchy)中值定理 .....	119
习题 3-1 .....	120
3.2 洛必达(L'Hospital)法则 .....	121
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型 .....	121
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 .....	123
3.2.3 其他类型的未定式 .....	124
习题 3-2 .....	126
3.3 泰勒(Taylor)公式 .....	127
3.3.1 泰勒公式 .....	127
3.3.2 几个常用函数的展开式 .....	129
习题 3-3 .....	132
3.4 函数的极值与最值 .....	132
3.4.1 函数单调性的判定法 .....	132
3.4.2 函数的极值 .....	136
3.4.3 函数的最值及其应用 .....	140
习题 3-4 .....	145
3.5 函数图形的描绘 .....	146
3.5.1 函数的凹凸性与拐点 .....	146
3.5.2 曲线的渐近线 .....	150
3.5.3 函数图形的描绘 .....	152
习题 3-5 .....	154
3.6 曲率 .....	155
3.6.1 弧微分 .....	155
3.6.2 曲率的概念及其计算公式 .....	156
3.6.3 曲率圆与曲率半径 .....	159
习题 3-6 .....	161
综合练习 3 .....	161
<b>第 4 章 不定积分</b> .....	<b>164</b>
4.1 不定积分的概念与性质 .....	164
4.1.1 原函数与不定积分的概念 .....	164



4.1.2 不定积分的性质 .....	166
4.1.3 基本积分公式 .....	167
习题 4-1 .....	169
4.2 换元积分法 .....	170
4.2.1 第一类换元积分法 .....	170
4.2.2 第二类换元积分法 .....	175
习题 4-2 .....	179
4.3 分部积分法 .....	180
习题 4-3 .....	183
4.4 几种特殊类型函数的不定积分 .....	184
4.4.1 有理函数的不定积分 .....	184
4.4.2 三角函数有理式的不定积分 .....	187
4.4.3 简单无理函数的不定积分 .....	187
习题 4-4 .....	189
综合练习 4 .....	189
<b>第 5 章 定积分及其应用</b> .....	<b>193</b>
5.1 定积分的概念与性质 .....	193
5.1.1 面积与路程 .....	193
5.1.2 定积分的定义 .....	195
5.1.3 定积分的性质 .....	198
习题 5-1 .....	202
5.2 微积分的基本公式 .....	203
5.2.1 积分上限函数 .....	203
5.2.2 牛顿-莱布尼兹公式 .....	207
习题 5-2 .....	210
5.3 定积分的计算 .....	211
5.3.1 换元积分法 .....	212
5.3.2 分部积分法 .....	216
习题 5-3 .....	218
5.4 定积分的几何应用 .....	220
5.4.1 定积分的元素法 .....	220
5.4.2 平面图形的面积 .....	222
5.4.3 体积 .....	228

---

5.4.4 平面曲线的弧长 .....	232
习题 5-4 .....	235
5.5 定积分在工程技术上的应用 .....	236
5.5.1 变力做功 .....	236
5.5.2 流体的压力 .....	239
5.5.3 引力 .....	240
习题 5-5 .....	241
5.6 反常积分与 $\Gamma$ 函数 .....	241
5.6.1 无穷限的反常积分 .....	241
5.6.2 无界函数的反常积分 .....	245
5.6.3 无穷限反常积分的审敛法 .....	247
5.6.4 无界函数反常积分的审敛法 .....	250
5.6.5 $\Gamma$ 函数 .....	252
习题 5-6 .....	253
综合练习 5 .....	253
参考答案 .....	258
参考文献 .....	272

# 第 1 章 函数、极限与连续

高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数,应用无限逼近的方法即极限方法来研究函数的性态.本章介绍函数的概念及其运算和特性,给出初等函数的构造.讲述数列极限与函数极限的概念以及性质,最后讨论函数的连续性.

## 1.1 函 数

### 1.1.1 集合、区间和邻域

#### 1. 集合的概念

集合是数学中最基本的概念,它的定义是描述性的.

**定义 1.1.1** 具有某种特定性质的事物的全体称为集合.集合中的事物称为该集合的元素.

设  $A$  是一个集合,如果  $x$  是  $A$  的元素,则称  $x$  属于  $A$ ,记为  $x \in A$ ;如果  $x$  不是  $A$  的元素,则称  $x$  不属于  $A$ ,记为  $x \notin A$  或  $x \in \bar{A}$ .

集合中的元素具有确定性和可区分性.

一个集合,如果其元素的个数是有限的,则称为有限集,否则就称为无限集.不包含任何元素的集合称为空集,记为  $\emptyset$ .

一般地,表示一个集合有两种方法.一种是列举法,即将集合中的元素逐一列举出来.例如,由数字 1, 3, 5, 7, 9 组成的集合表示为  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ;自然数的集合表示为  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

集合中的元素之间没有次序关系,也就是说,在集合的表示中,同一元素在不同位置上出现不具有任何特殊意义.例如,  $\{1, 2, 3\}$  与  $\{2, 1, 3\}$  表示的是同一个集合.

习惯上用  $\mathbf{N}$  表示自然数的集合,  $\mathbf{N}^+$  表示全体正整数的集合,  $\mathbf{Z}$  表示全体整数的集合,  $\mathbf{Q}$  表示全体有理数的集合,  $\mathbf{R}$  表示全体实数的集合.

另一种是描述法,即用集合中的元素所具有的性质来描述,记为  $\{x|x \text{ 具有性}$

质  $P(x)$  }.

例如,方程  $x^2 - 2 = 0$  的实数根全体组成的集合可表示为  $\{x | x^2 - 2 = 0\}$ .

**定义 1.1.2** 设  $A, B$  是两个集合,如果  $A$  中的元素都是  $B$  中的元素,即

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B,$$

则称  $A$  是  $B$  的子集,记为  $A \subset B$ ,读作  $A$  包含于  $B$ ,或记为  $B \supset A$ ,读作  $B$  包含  $A$ .

如果  $A$  中至少存在一个元素  $x$  不属于  $B$ ,即  $\exists x \in A$ ,但  $x \notin B$ ,那么  $A$  不是  $B$  的子集,记为  $A \not\subset B$ .

符号“ $\forall$ ”表示“对于任意的”或“对于每一个”;符号“ $\exists$ ”表示“存在”或“可以找到”.

例如,设  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,则  $A \subset B$ .

显然,  $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

由定义 1.1.2 可知,任何集合都是其自身的子集;空集  $\emptyset$  是任何集合的子集.

**定义 1.1.3** 设  $A, B$  是两个集合,如果  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ,则称集合  $A$  与  $B$  相等,记为  $A = B$ .此时  $A$  与  $B$  的元素完全相同,实际上是同一个集合.

**例 1.1.1** 设  $A = \{a, b, c\}$ ,写出  $A$  的所有子集.

**解**  $\emptyset; \{a\}, \{b\}, \{c\}; \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}; \{a, b, c\}$ ,共有  $2^3$  个子集.

容易证明,由  $n$  个元素组成的集合共有  $2^n$  个子集.

## 2. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种.

设  $A, B$  是两个集合,由  $A$  与  $B$  的全部元素构成的集合,称为  $A$  与  $B$  的并集(简称并),记为  $A \cup B$ ,即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由  $A$  与  $B$  的所有公共元素构成的集合,称为  $A$  与  $B$  的交集(简称交),记为  $A \cap B$ ,即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

特别地,如果  $A \cap B = \emptyset$ ,则称  $A$  与  $B$  不相交.

由属于  $A$  但不属于  $B$  的一切元素构成的集合,称为  $A$  与  $B$  的差集(简称差),记为  $A \setminus B$ ,即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

**例 1.1.2** 设  $A = \{1, 2, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{4\}, \quad A \setminus B = \{1, 2\}, \quad B \setminus A = \{3, 5\}.$$

注意:一般地,  $A \setminus B \neq B \setminus A$ .

通常在讨论一个问题时,所涉及的集合总是某个最大集合  $X$  的子集,此时称  $X$  是全集.

如果  $A \subset X$ , 则称集合

$$X \setminus A = \{x | x \in X \text{ 且 } x \notin A\}$$

为集合  $A$  关于全集  $X$  的余集或补集,记为  $A^c$ . 在不会发生混淆的前提下,通常也简称为  $A$  的余集或补集,记为  $A^c$ .

显然,有下列简单事实:

$$(1) A \cup A^c = X, \quad A \cap A^c = \emptyset;$$

$$(2) (A^c)^c = A;$$

$$(3) A \setminus B = A \cap B^c.$$

以上等式根据集合相等的定义易证. 现就等式(3)证明如下:

因为

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c,$$

所以  $A \setminus B = A \cap B^c$ .

关于集合的并、交、余及其联合运算,有下列规律:

$$(1) \text{ 交换律 } \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

$$(2) \text{ 结合律 } \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$(3) \text{ 分配律 } \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$(4) \text{ 对偶律(De Morgan 公式) } \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

以上运算规律根据集合相等的定义易证.

由于集合的并与交满足结合律,于是有限个集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并记为

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x | \exists i: 1 \leq i \leq n, x \in A_i\};$$

有限个集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的交记为

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x | \forall i: 1 \leq i \leq n, x \in A_i\}.$$

注意:集合运算不满足消去律

$$A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C, A \cap B = A \cap C \not\Rightarrow B = C.$$

### 3. 区间和邻域

在高等数学课程中,经常用到的实数集  $\mathbf{R}$  的子集是区间和邻域两种类型.

设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a < b$ .

集合  $\{x|a < x < b\}$  称为以  $a, b$  为端点的开区间, 记为  $(a, b)$ , 即

$$(a, b) = \{x|a < x < b\};$$

集合  $\{x|a \leq x \leq b\}$  称为以  $a, b$  为端点的闭区间, 记为  $[a, b]$ , 即

$$[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\};$$

集合  $\{x|a < x \leq b\} = (a, b]$  和  $\{x|a \leq x < b\} = [a, b)$  都称为半开半闭区间.

以上这几类区间的长度是有限的, 称为有限区间.

类似地, 记

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x|x > a\}, & [a, +\infty) &= \{x|x \geq a\}, \\ (-\infty, b) &= \{x|x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x|x \leq b\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \{x|-\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}. \end{aligned}$$

这里符号  $\infty$  读作“无穷大”,  $+\infty$  读作“正无穷大”,  $-\infty$  读作“负无穷大”.

上述这几类区间都称为无限区间.

有限区间和无限区间统称为区间.

数的图像是数轴上的点, 反过来, 数轴上的点的坐标又是数. 这样实数集  $\mathbf{R}$  与数轴上的点就建立了一一对应, 所以数与点, 我们以后不加区别.

**定义 1.1.4** 设  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\delta > 0$ , 开区间

$$(a - \delta, a + \delta) = \{x|a - \delta < x < a + \delta\} = \{x||x - a| < \delta\}$$

称为点  $a$  的  $\delta$  邻域, 记为  $U(a, \delta)$ . 点  $a$  称为邻域中心,  $\delta$  称为邻域半径(图 1-1). 当不需要注明邻域半径时, 也简记为  $U(a)$ .

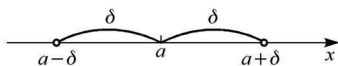


图 1-1

集合  $\{x|0 < |x - a| < \delta\}$  称为点  $a$  的  $\delta$  去心邻域, 记为  $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ , 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x|0 < |x - a| < \delta\}.$$

为了方便,把开区间  $(a - \delta, a)$  称为  $a$  的左  $\delta$  邻域,记为  $\mathring{U}^-(a, \delta)$ ; 把开区间  $(a, a + \delta)$  称为  $a$  的右  $\delta$  邻域,记为  $\mathring{U}^+(a, \delta)$ .

### 1.1.2 函数概念

#### 1. 函数的定义

**定义 1.1.5** 设数集  $D \neq \emptyset$ , 若存在某种对应法则  $f$ , 对于  $D$  中每个数  $x$ , 按照对应法则  $f$ , 都有实数集  $\mathbf{R}$  中唯一一个数  $y$  与之对应, 则称对应法则  $f$  是从  $D$  到  $\mathbf{R}$  的一个函数, 记为

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbf{R}, \\ x &\mapsto y, \end{aligned}$$

数  $x$  对应的数  $y$  称为函数  $f$  在点  $x$  的函数值, 记为  $y = f(x)$ .  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量. 数集  $D$  称为函数  $f$  的定义域, 记为  $D_f$ . 全体函数值的集合  $\{y | y = f(x), x \in D\}$  称为函数  $f$  的值域, 记为  $f(D)$ , 即

$$f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\} \subset \mathbf{R}.$$

关于函数定义的几点说明:

(1) 函数定义包含两个要素, 对应法则和定义域. 这时  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  也称  $f$  是定义在  $D$  上的函数, 记为  $y = f(x), x \in D$ .

(2) 函数定义指出,  $\forall x \in D$ , 按照对应法则  $f$ , 在实数集  $\mathbf{R}$  中存在唯一一个数  $y$  与之对应, 这种对应称为由  $D$  到  $\mathbf{R}$  中的单值对应. 注意不要求不同的  $x$  要不同的  $y$  与之对应, 即不同的  $x$  可能对应相同的  $y$ .

(3) 从函数定义来说, 给定一个函数一定要指出函数的定义域, 没有求定义域的问题. 但是, 有时为了方便并不指出函数  $y = f(x)$  的定义域, 这时认为函数的定义域是自明的. 即函数的定义域是使函数  $y = f(x)$  有意义的实数  $x$  的集合  $D_f = \{x | f(x) \in \mathbf{R}\}$ , 也即自变量  $x$  的最大取值范围, 此定义域称为该函数的自然定义域.

(4) 在函数定义中, 并没有表明对应法则非得用一个公式来表达不可. 也就是说, 变量间有没有函数关系, 在于有没有对应法则, 而不在于有没有公式. 所以具体表示一个函数时, 可以用解析法(或称公式法)、图示法、表格法, 甚至用语言描述等.

设函数  $y = f(x), x \in D$ , 坐标平面上的点集

$$G(f) = \{(x, y) | x \in D, y = f(x)\}$$

称为函数  $f$  的图像.

函数的图像能将函数的几何性态表现得十分明显. 显然, 坐标平面上一个点集  $G$  是某个函数的图像的必要充分条件是, 平行  $y$  轴的每条直线与点集  $G$  至多有一个交点.

**例 1.1.3** 求下列函数的自然定义域.

$$(1) y = f(x) = \sin(\ln \sin \sqrt{x}); \quad (2) y = g(x) = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right).$$

**解** (1) 由于

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \sin \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow 2k\pi < \sqrt{x} < (2k+1)\pi \Rightarrow 4k^2\pi^2 < x < (2k+1)^2\pi^2, k \in \mathbf{N},$$

所以  $D_f = \{x \mid 4k^2\pi^2 < x < (2k+1)^2\pi^2, k \in \mathbf{N}\}.$

(2) 因为

$$\begin{cases} x > 0, \\ -1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 100,$$

所以  $D_g = [1, 100].$

**例 1.1.4** 设  $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3x-1}{3x+1}$ , 求  $f(x)$ .

**解** 令  $\frac{x}{x-1} = t$ , 则  $x = \frac{t}{t-1}$ . 于是

$$f(t) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3 \cdot \frac{t}{t-1} - 1}{3 \cdot \frac{t}{t-1} + 1} = \frac{2t+1}{4t-1},$$

所以  $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}.$

**例 1.1.5** 直梁  $OAB$  由两种材料接合而成,  $OA$  长 2 个单位, 其线密度为 3;  $AB$  长 3 个单位, 其线密度为 5. 设  $P$  为直梁上任意一点, 试建立  $OP$  一段的质量  $m$  与  $OP$  的长  $x$  之间的函数关系.

**解** 根据题意可得函数关系为

$$m = m(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 5x - 4, & 2 < x \leq 5. \end{cases}$$

这个函数的对应法则是: 当  $x \in [0, 2]$  时, 按公式  $m = 3x$  计算函数值; 当  $x \in$



(2, 5] 时,按公式  $m = 5x - 4$  计算函数值.从函数定义来看它是定义在  $[0, 5]$  上的一个函数,称为分段表示的函数,而不是两个函数.

这类在定义域的不同部分,对应法则由不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

**例 1.1.6** 气温自动仪所记录的某地某日 24 小时的气温变化曲线(图 1-2)描述了当日气温  $T$  随时间  $t$  的变化情形.根据这个图形,就可确定这一天内任何时刻所对应的气温,即时间  $t$  与气温  $T$  之间的对应法则由一条曲线表示.

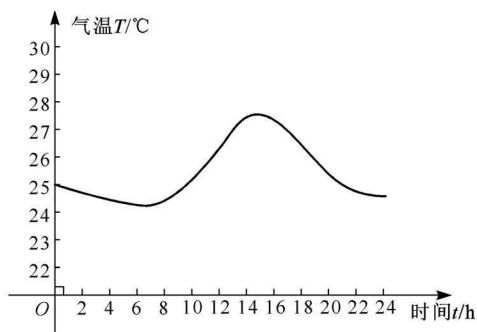


图 1-2

**例 1.1.7** 温度一定时,火药的燃烧速度与燃烧室内的压强有关.一般地,压强越大,燃烧越快.某种火药在常温  $20^\circ\text{C}$  下,测得压强  $p$  (MPa) 与燃烧速度  $v$  (mm/s) 之间的对应关系如下表:

$p/\text{MPa}$	30	60	90	120	150	180
$v/(\text{mm/s})$	6.2	6.1	9.6	11.5	13.5	15.8

压强  $p$  与燃烧速度  $v$  之间的对应法则由上面的表格表示.

**例 1.1.8**  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 对应的  $y$  是不超过  $x$  的最大整数.显然,  $\forall x \in \mathbf{R}$  都对应唯一一个  $y$ , 这是一个函数,称为“整数部分”函数(图 1-3),记为

$$y = [x] = n, n \leq x < n+1, n \in \mathbf{Z}.$$

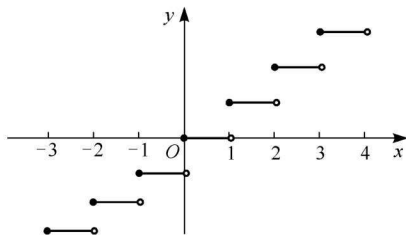


图 1-3

例 1.1.5 和例 1.1.8 的共同特点是函数形式均为  $y = f(x)$ , 即因变量  $y$  单独放在等式的一边,而等式的另一边是只含有自变量  $x$  的表达式,这种表示形式的函